A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE FREGE NO CONTEXTO DO NEOKANTISMO*

Gottfried Gabriel

Friedrich-Schiller-Universität Jena – Jena, Germany
gottfried.gabriel@uni-jena.de

Sven Schlotter

Friedrich-Schiller-Universität Jena – Jena, Germany
sven.schlotter@uni-jena.de

Resumo: Há muitos pontos de concordância entre Frege e os neokantianos. Isso vale especialmente para os representantes do neokantismo da teoria do valor ou do Sudoeste alemão na tradição de Hermann Lotze. Não discutiremos aqui todos os aspectos dessa proximidade; de acordo com o tema que propomos, ficaremos restritos à filosofia da matemática. A primeira parte do artigo tratará da relação entre aritmética e geometria, mostrando surpreendentes semelhanças entre Frege e o neokantiano Otto Liebmann. A segunda parte discutirá as diferentes recepções do logicismo de Frege por Jonas Cohn, Paul Natorp, Heinrich Rickert, Ernst Cassirer e Bruno Bauch.
Palavras-chave: Neokantismo; Frege; Filosofia da matemática.

Zusammenfassung: Zwischen Frege und den Neukantianern bestehen in vielen Punkten Übereinstimmungen. Dies gilt insbesondere für die Vertreter des werttheoretischen oder Südwestdeutschen Neukantianismus in der Tradition Hermann Lotzes. Alle Aspekte dieser Nähe sind hier nicht auszubreiten, gemäß der Themenstellung erfolgt eine Beschränkung auf die Philosophie der Mathematik. Im ersten Teil des Beitrags wird es um das Verhältnis von Arithmetik und Geometrie gehen, wobei überraschende Gemeinsamkeiten zwischen Frege und dem Neukantianer Otto Liebmann nachgewiesen werden. Der zweite Teil erörtert die unterschiedlichen Rezeptionen von Freges Logizismus durch Jonas Cohn, Paul Natorp, Heinrich Rickert, Ernst Cassirer und Bruno Bauch.
Schlüsselwörter: Neokantianismus; Frege; Philosophie der Mathematik.

Há muitos pontos de concordância entre Frege e os neokantianos. Isso vale especialmente para os representantes do neokantismo da teoria do valor ou do Sudoeste alemão na tradição de Hermann Lotze. Não discutiremos aqui todos os aspectos dessa proximidade; de acordo com o tema que propomos, ficaremos restritos à filosofia da matemática. A primeira parte do artigo tratará da relação entre aritmética e geometria, mostrando surpreendentes semelhanças entre Frege e o neokantiano Otto Liebmann. A segunda parte discutirá as diferentes recepções da lógicismo de Frege por Jonas Cohn, Paul Natorp, Heinrich Rickert, Ernst Cassirer e Bruno Bauch.

* Publicado originalmente em: Gabriel, G., & Schlotter, S. (2019). Freges Philosophie der Mathematik im Kontext des Neukantianismus. In D. Koenig, G. Nickel, S. Shokrani, & R. Krömer (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* (Bd. 11, pp. 3-15) (Mathematics in the Tradition of Neo-Kantianism).

I. A relação entre aritmética e geometria

A filosofia da matemática de Frege não é diretamente kantiana, mas é em partes *neo*kantiana. Os neokantianos de forma alguma concordaram com Kant em todos os pontos. Isto já vale, é verdade, para Liebmann, cujo apelo - "Então devemos voltar a Kant!" - iniciou a tradição neokantiana (Liebmann 1865). Para os neokantianos, porém, era claro que era preciso não só *voltar* a Kant, mas também *ir além* dele. Wilhelm Windelband o colocou explicitamente (1883), "Entender Kant significa ir além dele" (Windelband, 1915, p. IV). Se alguém tomar esta atitude como base, então também pode contar Frege como pertencente ao neokantismo[1].

Frege reconhece a concepção de Kant de que a geometria é uma ciência sintético-apriorística porque a validade de seus axiomas, que para ele são os da geometria euclidiana, é baseada na intuição pura. A aritmética, por outro lado, deve ser comprovada como um ramo da lógica e, portanto, analítica. Frege tenta tornar plausível sua preocupação perguntando qual "área" as verdades da aritmética "dominam" em distinção da geometria (Frege, 1884, § 14). Ele afirma que o domínio da geometria é o do "espacialmente intuitivo" (como distinto do temporalmente intuitivo), e mais precisamente, do espaço real e do meramente representado. Mas esta atribuição acarreta uma restrição da geometria. O espacialmente intuitivo é seu domínio, mas também *apenas* o espacialmente intuitivo. Além de nossa possibilidade de intuição, chega-se ao "pensamento conceitual", cujo domínio é o "pensável" em geral. Agora, de acordo com Frege, as verdades aritméticas dominam "a área do contável". O contável, entretanto, se estende não apenas ao tangível (efetivo ou meramente imaginado), mas também ao pensável não-intuitivo, de modo que as verdades aritméticas dominam uma área maior do que as geométricas.

Para Frege, estas considerações servem para tornar plausível a conexão da aritmética à lógica, mesmo antes da execução de seu programa logicista. Resumindo ambas as argumentações, pode-se dizer: as leis lógicas definem a área do pensável, a aritmética, ao contrário da geometria, estende-se a tudo o que é pensável, de modo que se pode presumir que a aritmética está mais próxima da lógica do que da geometria: "Não

[1] O texto a seguir se baseia em partes em Gabriel/Schlotter, 2017.

deveriam, então, as leis dos números estar na conexão mais íntima com as do pensamento?" (Frege, 1884, § 14)[2].

Frege introduz estas considerações, nas quais ele procura trazer a aritmética para o reino do pensamento conceitual, discursivo, com um breve exame da geometria não-euclidiana. Ele afirma que um espaço não-euclidiano não é intuível, mas pelo menos pensável. A tendência de sua consideração parte de que a assunção da negação de um princípio de geometria (euclidiano) ainda não leva o pensamento em contradição consigo mesmo, enquanto que este é o caso em relação aos princípios da aritmética.

As considerações de Frege aqui mostram grandes semelhanças com as concepções do neokantiano Otto Liebmann, que foi colega de filosofia de Frege em Jena. Assim, referindo-se à geometria não-Euclidiana, Liebmann faz uma distinção entre "necessidade lógica" e "necessidade-da-intuição", segundo a qual o oposto contraditório de uma proposição intuitivamente necessária é simplesmente "não-intuitiva", mas pensável (Liebmann, 1880, p. 77)[3]. Isto em distinção ao oposto contraditório de uma proposição logicamente necessária. Mais precisamente, seria preciso acrescentar aqui, no sentido de Frege, que a negação de uma lei lógica não é pensável como sendo *válida*. Afinal, é preciso primeiro pensar no próprio conteúdo para depois negar sua validade, ou seja, reconhecer sua negação no juízo. Essencialmente de acordo com a concepção de Kant, Liebmann afirma:

> Agora, o criticismo de Kant contém, estritamente falando, três afirmações. Primeiro: os axiomas da geometria euclidiana e, portanto, do espaço euclidiano, *não* são necessidades *lógicas*. Segundo: mas eles são inevitáveis para mim e para toda faculdade de intuição semelhante à minha, ou seja, seu oposto [é], embora não contendo nenhuma contradição, intuitivamente não representável; eles são pura necessidade da intuição ou, o que diz a mesma coisa, intuições *a priori*. Terceiro: porque dados como necessários pela organização de minha faculdade de intuição, *mas não* pela lógica, eles são *subjetivos*. (Liebmann, 1880, p. 77)

A subjetividade aqui referida significa subjetividade no sentido de idealismo *transcendental*, não do idealismo subjetivo. Frege poderia concordar com esta

[2] Cf. também o seguinte a título de complemento: Frege, 1885/86, p. 94 s.
[3] Está documentado que Frege pegou emprestado a segunda edição do livro de Liebmann da Biblioteca da Universidade Jena no momento de escrever os *Grundlagen der Arithmetik* (*Fundamentos da Aritmética*). Ver Kreiser, 1984, p. 25.

reformulação de Kant, mesmo com a caracterização dos axiomas euclidianos como "subjetivos", se acrescentarmos sua própria determinação de objetividade, que requer, entre outras coisas, independência do "intuir" (Frege, 1884, § 26, conclusão).

De tais considerações Liebmann deriva então uma determinação bastante correspondente da relação entre lógica, aritmética (doutrina das magnitudes) e geometria, como a encontramos em Frege:

> Enquanto nossa geometria possui apodicidade apenas para as inteligências que intuem na mesma forma de espaço que nós, a apodicidade da doutrina geral das magnitudes, bem como da lógica, se estende a todas as inteligências. O escopo ou área de validez dos dois últimos, portanto, supera o dos primeiros; inclui-o concentricamente. (Liebmann, 1880, p. 253)

A visão em concordância também é expressa no julgamento daqueles sujeitos do conhecimento que, ficticiamente ou não, seguem leis do pensamento que contradizem as nossas. Frege não vê aqui (nas *Grundgesetzen der Arithmetik* [*Leis fundamentais da aritmética*]) nenhuma outra possibilidade além de diagnosticar "um tipo de loucura até então desconhecido" (Frege, 1893, p. XVI). Seguindo seu logicismo, Frege teria de dizer o mesmo daqueles cujas leis aritméticas básicas contradizem as nossas. Assim, ainda formulado como uma pergunta, é dito nos *Grundlagen*: "Não cai tudo em confusão se se quiser negar um destes ["princípios da ciência dos números"]?" (Frege, 1884, § 14). Encontramos a mesma concepção literalmente já em Liebmann, que, referindo-se à proposição aritmética elementar "3x3=9", declara que alguém que "*entendesse* esta proposição sem *acreditar* imediatamente de uma vez por todas", ou seja, reconhecendo-a como uma verdade atemporal, "seria um louco para nós" (Liebmann, 1880, p. 240). Não é assim no caso da geometria:

> Se alguém nos garantisse que intui um espaço, ou o mundo num espaço no qual o teorema de Pitágoras é inválido, primeiro duvidaríamos de sua credibilidade ou sanidade, então teríamos que testá-la, e se ele passasse [no] teste, teríamos que admitir: este homem, embora logicamente semelhante a mim, possui uma faculdade de intuição que é heterogênea à minha e incompreensível para mim. (Liebmann, 1880, p. 79)

A comparação de Frege com a geometria nos *Grundlagen der Arithmetik* serve para sublinhar o *status* da aritmética como uma ciência pura da razão. Como um tema epistemológico independente, a geometria não desempenha inicialmente um papel especial em seu trabalho. Na dissertação geométrica há simplesmente a proposição, que se pode bem entender no sentido kantiano, "que toda geometria é, em última análise, baseada em axiomas que derivam sua validade da natureza de nossa faculdade da intuição" (Frege, 1873, p. 3). Embora Frege tenha continuado a tratar de temas da geometria como matemático e tenha realizado atividades acadêmicas correspondentes (Kreiser, 2001, cap. 4), ela só volta a ser vista *epistemologicamente* depois de ele abandonar a realização da justificativa logicista da aritmética por conta da antinomia de Russell.

Primeiro, Frege retorna à concepção kantiana de que a aritmética é uma ciência sintética-apriorística. Partindo da construção de um sistema axiomático de conteúdos, a ideia de Hilbert de sistemas axiomáticos *formais* é rejeitada por Frege, que exige que todas as inferências sejam puramente lógicas para ele:

(1) Uma lei fundamental é sintética precisamente se for uma verdade não lógica.

(2) Uma lei fundamental é *a priori* precisamente se for uma verdade não *a posteriori*.

(3) Uma ciência é sintético-apriorística precisamente se todas as suas leis fundamentais (axiomas) forem *a priori* e entre estas leis fundamentais há pelo menos uma sintético-apriorística (cf. Frege, 1884, § 3).

No texto póstumo *Logik in der Mathematik* (*Lógica na matemática*), Frege invoca a forma legal da indução completa como lei fundamental da aritmética, válidas para (1) e (2). A lei é, portanto, tanto sintética como também apriorística. Assim, a aritmética contém pelo menos uma lei fundamental sintético-apriorística, e porque todas as suas leis fundamentais são apriorísticas, ela é, nessa medida (3) uma ciência sintética-apriorística. Uma relação da aritmética com a forma da intuição do tempo, tal como encontra-se em Kant, falta a Frege. Em última instância, isso se baseia em que a forma da intuição do tempo entra em jogo através de ações de contagem (que acontecem no tempo). De acordo com Frege, porém, os atos de contagem formam a base dos "números infantis", que o Frege tardio agora rejeita explicitamente, porque "nenhuma ponte" os leva a outros tipos de números: "A contagem, tendo surgido psicologicamente a partir de uma exigência de vida ativa, levou os estudiosos a um engano" (Frege, 1983, p. 296 s.). Um ponto essencial para Frege é que da fonte do conhecimento geométrico e não do "e assim por diante" flui "o infinito no sentido próprio e mais estrito da palavra". Um exemplo que ele dá é que em qualquer linha reta temos "infinitamente muitos pontos" (Frege, 1983, p. 293). Frege quer dizer, assim, o real-infinito e declara no sentido da suposta proposição acima da entrada da Academia Platônica "Proibida a entrada sem geometria"[4]:

> É aqui que a geometria e a filosofia se aproximam mais. Afinal de contas, eles pertencem uma a outra. Um filósofo que não tem relações com a geometria é apenas meio filósofo, e um matemático que não tem veia filosófica é apenas meio matemático. (Frege, 1983, p. 293)

Em suas últimas reflexões sobre uma nova fundamentação da aritmética, Frege chega ao ponto de reivindicar para toda a matemática, ou seja, também para a aritmética, a "fonte do conhecimento geométrico" e, portanto, a "intuição" como o "fundamento da prova" (Frege, 1983, p. 298; cf. Kaulbach, 1983). Assim Frege, como Kant, identifica a matemática como um todo como uma ciência sintética-apriorística:

> Quanto mais pensava nisso, mais me convencia de que a aritmética e a geometria cresceram no mesmo solo, ou seja, em um solo geométrico, de modo que toda a matemática é realmente geometria. (Frege, 1983, p. 297)

Ao contrário de Kant, toda a matemática se baseia, portanto, na forma pura de intuição do espaço, onde a forma pura de intuição do tempo é deixada de fora.

II. A recepção do logicismo de Frege

O papel da intuição e, neste contexto, a questão da relação entre "*sensibilidade* e *entendimento*" como os "dois troncos do conhecimento humano" distinguidos por Kant (Kant 1911, B 29) foi um tema central no neokantismo. As distintas concepções se inflamavam de acordo com a natureza da questão sobre as fontes do conhecimento da matemática. Aqui estava em decisão se a justificação da matemática é puramente lógico-conceitual ou se ela precisa adicionalmente da intuição pura. Sabidamente, para Kant a geometria consiste na construção de seus conceitos na forma pura da intuição do espaço

[4] Liebmann, 1900, p. IV, também se refere a esta sentença.

e a aritmética na construção de seus conceitos na forma pura da intuição do tempo. Kant faz uso do exemplo da matemática como comprovação da possibilidade dos juízos sintéticos *a priori*, porque os juízos matemáticos não são justificáveis de modo puramente lógico a partir de conceitos, ou seja, analiticamente, mas, sim, precisam adicionalmente da intuição pura para a sua justificação. À matemática, portanto, cabe um lugar epistemológico exemplar para a filosofia transcendental, pois nela se decide se a lógica transcendental precisa de uma complementação através de uma estética transcendental.

No contexto dessas considerações, diversos neokantianos do início do século XX também se ocuparam com as posições de Frege. Assim, eles pertencem aos primeiros que dedicaram atenção à sua obra no interior da filosofia acadêmica alemã. Um impulso essencial para a recepção veio naturalmente do exterior. Ele consistiu em que Bertrand Russell, no anexo de seu *Principles of Mathematics* (1903, p. 501ss.) destacou com veemência as contribuições de Frege[5]. Jonas Cohn, neokantiano de Friburgo, seguiu esta indicação em seu livro *Voraussetzungen und Ziele des Erkennens* (*Pressupostos e metas do conhecimento*), publicado em 1908. A uma discussão minuciosa da concepção de número de Russell ele acrescenta a observação: antes de Russell, uma teoria aparentada foi desenvolvida por Frege; infelizmente não tenho condições de apresentar os fundamentos desta forma, porque não pude ler os escritos conceituais de Frege" (Cohn, 1908, p. 515). Apesar dos obstáculos mencionados, Cohn reconheceu com clareza o significado filosófico das considerações de Frege. Ele preza de modo particular a distinção consequente entre "justificação lógica" e "dedução genética". Assim, Frege e Russell teriam destacado "com um discernimento que causou vergonha a muitos filósofos" que o conteúdo lógico do número é completamente independente do jeito pelo qual uma pessoa qualquer representa os números (Cohn, 1908, p. 175s.).

O colega de Friburgo de Cohn, Rickert, expressou-se com reconhecimento similar em 1911 no ensaio *Das Eine, die Einheit und die Eins*. O "pensamento de que a proposição 2+2=4 pode ter se desenvolvido de 2+2=5 somente através da criação natural na luta pela existência" lhe parece, com Frege, "ser por excelência absurda, como qualquer 'lógica' darwiniana ou pragmática" (Rickert, 1911, p. 30)[6]. Apesar de toda sua

[5] Sobre a recepção da Frege como um todo, ver Wille, 2013.
[6] Uma segunda edição substancialmente ampliada foi publicada como um estudo separado: Rickert, 1924. Rickert até enviou à Frege uma cópia impressa deste ensaio. Sobre o conteúdo da resposta deste último, cf. Gabriel/Schlotter, 2017, p. 203ss.

dissociação da concepção naturalista dos números, à qual Rickert (1911, p. 29) se refere em concordância com a rejeição de Frege da aritmética empírica de "bolo de gengibre e seixos", ele, por outro lado, também se opõe de forma bastante decisiva a uma posição "racionalista" ou "logicista" que considera os números como construtos puramente lógicos. A parte principal de seu ensaio é dedicada à sua refutação. Isto não é um ataque direto à Frege, como os leitores de hoje podem supor, mas uma disputa interna entre as duas principais correntes do neokantismo. Trata-se, sobretudo, da distinção entre intuição e conceito.

Os representantes da Escola do Sudoeste da Alemanha aderiram basicamente à posição de Kant, segundo a qual os dois "troncos de conhecimento" podem ser distinguidos, mas são mutuamente dependentes um do outro, a fim de tornar o conhecimento possível. Em contraste, os neokantianos de Marburgo estavam preocupados em minimizar ou até mesmo eliminar o papel da intuição. De acordo com isso, em afastamento crítico de Kant, eles se esforçaram para dar à matemática uma justificação lógica sem apelo à intuição pura. Nesta questão, os marburgueses se viam em sintonia com a moderna pesquisa matemática e lógica, cujos resultados eles receberam intensivamente. A história da matemática moderna se apresenta para eles como uma história do recuo dos elementos intuitivos, desde a geometria analítica de Descartes até o *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos da geometria*) de Hilbert[7].

Como representante da visão de Marburgo, Cassirer enfatiza em seu ensaio *Kant und die moderne Mathematik* (*Kant e Matemática Moderna*) (1907, p. 31) que o desenvolvimento posterior da filosofia kantiana e da "logística" coincide em tendência, na medida em que ambas progrediram além da doutrina da "pura sensibilidade". Enquanto Cassirer discute longamente as concepções de Russell e Couturat neste contexto, Frege ainda não é mencionado. Mas três anos depois, no livro *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (*Conceito de substância e conceito de função*), ele se refere de forma bastante benevolente e bem informada à fundamentação do número em *Grundlagen der Arithmetik*. Ao fazer isso, Cassirer reconhece que através de Frege (e Russell) foi alcançada uma "extraordinária libertação e aprofundamento" em relação à visão sensualista (Cassirer, 1910, p. 69). Ele também se refere à crítica de Frege à "aritmética

[7] A posição de Marburgo também se encontra - influenciada por Hilbert - em Rudolf Carnap, que originalmente em sua dissertação *Der Raum* [*O espaço*] (1922), supervisionada por Bruno Bauch, ainda deu lugar ao "espaço intuitivo" ao lado do "espaço formal" e do "espaço físico".

de seixos e pimentões" (p. 37), que nesta formulação se tornou verdadeiramente um provérbio no neokantismo[8]. Cassirer entretanto objeta que o "pensamento fundamental crítico" não chegou "a uma realização perfeita". Pois não basta "enfatizar o caráter puramente *conceitual* da afirmação numérica" (p. 69), enquanto que ainda se pressupuser o próprio conceito como algo existente. Aqui Cassirer vê um remanescente do antigo pensamento de substância, que ele gostaria de superar.

Tal pensamento de substância, entretanto, diz respeito apenas à concepção objetiva dos números, que os compreende como determinadas classes de classes. Ela pode ser considerada responsável pelo surgimento da antinomia de Russell. Mas não é um pensamento de substância que determina o discernimento essencial de Frege, que fora preparado por Herbart, que as declarações numéricas são afirmações de segundo nível, ou seja, indicações de quantos objetos se enquadram nos conceitos de tipos correspondentes. Isto envolve a conexão entre declarações numéricas e declarações existenciais, de acordo com a qual declarações existenciais são declarações numéricas indeterminadas e declarações numéricas são declarações existenciais determinadas. A exposição do quantificador-lógico das declarações numéricas de Frege se mantém independentemente da versão lógica de classe do conceito de número que levou à antinomia de Russell.

A exposição do quantificador-lógico dos números tem de ser brevemente esclarecida aqui. A declaração que ao conceito *F* corresponde o número 0 quer dizer que a quantidade dos objetos que estão sob o conceito (de primeiro nível) *F* é 0. Frege expressa isso com a aplicação do quantificador universal, de tal modo que é negado para quaisquer objetos que eles estejam sob o conceito *F* (Frege, 1884, § 55). Em notação moderna: $\forall x \neg F(x)$. Essa exposição surge porque Frege desiste da introdução de um quantificador existencial em seu simbolismo e expressa a existência com ajuda do quantificador universal e da negação. A referida declaração é logicamente equivalente à declaração existencial negativa 'não é o caso que exista um objeto que esteja sob o conceito *F*': $\neg\exists x F(x)$. 'Ao conceito *F* corresponde o número 1' quer dizer 'existe um e apenas um objeto que está sob o conceito *F*.' Isso é definido de tal modo que "não universalmente, o que também seja *a*, vale a sentença que *a* não estaria sob *F*, e [...] das sentenças '*a* está sob *F*' e '*b* está sob *F*' segue-se universalmente que *a* e *b* são o mesmo"

[8] Ver também Cassirer, 1929, p. 402.

(Frege, 1884, § 55). A tradução dessa definição no formalismo lógico (de hoje) resulta em (com a substituição de ‘a’ por ‘x’ e ‘b’ por ‘y’):

$$\neg\forall x\neg F(x)\land\forall x\forall y[(F(x)\land F(y))\rightarrow x=y]$$

O que é logicamente equivalente a

$$\exists x[F(x)\land\forall y(F(y)\rightarrow y=x)]$$

Em seguida, segue a definição da transição de qualquer número n para o próximo número n+1.

Cassirer cita as passagens correspondentes dos *Grundlagen der Arithmetik* em *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* e resume o ponto essencial da seguinte forma: “Todo juízo sobre relações numéricas não atribui determinadas notas características aos objetos, mas a seus conceitos.”[9] Falta, é claro, uma apreciação sistemática deste entendimento. Entretanto, não se pode censurar Cassirer por isso, já que Frege não se deteve na exposição logico-quantitativa das declarações numéricas nos *Grundlagen*, mas realiza ele mesmo a objetificação dos números no seguinte.

A introdução de números (Anzahlen) como objetos lógicos é justificada por Frege pelo fato de que as palavras numéricas são usadas como nomes próprios de números, já que falamos de “*o* um” e de “*o* dois” e assim por diante. Deve-se considerar se a aplicação do artigo determinado e a conseguinte substantivação que levou Frege a sua objetificação ‘substancializadora’ dos números não é simplesmente expressão de um passo de abstração no qual se prescinde daquilo *o que* será numerado. Ao falar de ‘o sete’ e ‘o cinco’ e montar, digamos, a equação ‘7+5=12’, dá-se a entender que - não importa o que se numera - 7 coisas mais 5 coisas são 12 coisas. A expressão cotidiana ‘coisas’ significa conceitos de tipos indeterminados de primeiro nível e, com isso, equivale a uma variável conceitual correspondente. De modo semelhante, uma formulação como “nós éramos cinco” (o título da autobiografia de Viktor Mann, o irmão de Heinrich e Thomas) deixa aberta sobre qual tipo deve ser preenchido aqui. Poderiam ser, por exemplo, ‘irmãos’, ‘crianças’ e assim por diante.

Uma atitude ambivalente, como encontrada em Cassirer, também é assumida por Paul Natorp em seu livro *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (*Os fundamentos lógicos das ciências exatas*), publicado em 1910. Já na primeira seção, ele

[9] Cassirer, 1910, p. 61, com referência a Frege, 1884, § 46. Mais precisamente, no sentido de Frege, deveria ler-se ‘propriedades’ ao invés de ‘notas características’.

inclui Frege entre os matemáticos que “lutam para frente”, que rejeitariam completamente o dualismo de pura intuição e puro pensamento e trabalhariam com esforço para “erguer o edifício da matemática puramente sobre bases lógicas” (Natorp, 1910, p. 3). Ao mesmo tempo, porém, ele se distanciou de uma “direção extrema” que se apoiava nesse projeto em uma lógica que, sob o nome de “logística” ou “lógica simbólica”, basicamente nada mais era do que uma ampliação da tradicional “lógica formal”. Por outro lado, deve ser dito que tal atribuição não corresponde de forma alguma à autocompreensão de Frege, para quem a lógica não pode se sustentar sem conteúdo. O logicismo de Frege, que afirma que a aritmética é um ramo da lógica, praticamente pressupõe uma compreensão do conteúdo da lógica; pois nenhum conteúdo aritmético pode ser derivado de meras formas.

A apreciação de Natorp é mais diferenciada em uma seção posterior do livro, na qual ele trata da “tentativa de dedução” de zero e um de Frege. Contudo, ele ainda não sabe como separá-las das outras funções puras do pensamento e vê-las em suas verdadeiras relações lógicas (Natorp, 1910, p. 112ss.; cf. sobre este Thiel, 1997). Uma tal justificação da matemática a partir da interação correlativa das funções lógicas primordiais é o que o próprio Natorp se esforça para conseguir.

É precisamente este “logicismo” de Marburgo contra o qual Rickert se dirige em seu ensaio sobre o conceito de número. Esta referência é claramente expressa no *suplemento literário crítico* da segunda edição do artigo de Rickert:

> O trabalho anterior é dirigido não tanto contra o empirismo unilateral [...] mas contra o logicismo unilateral, como tem sido defendido depois de Kant [...] especialmente pelo kantismo de “Marburgo”. (Rickert, 1924, p. 87)

Para atingir este oponente, por assim dizer, em seu ponto mais sensível, Rickert quer provar que mesmo a aritmética, como a mais racional de todas as ciências, não se sustenta com meios puramente lógicos[10]. Nisso, Rickert argumenta fortemente a favor de uma demarcação nítida entre a matemática e a lógica. Em sua opinião, a lógica (como a doutrina do logos) em sua cunhagem mais pura trata das formas de objetividade em geral. A matemática como ciência particular, por outro lado, lida com objetos que já são

---

[10] O papel da intuição é particularmente enfatizado por Rickert neste contexto e ele sublinha, seguindo Kant: “conceitos sem intuição ou formas sem conteúdo são ‘vazios’” (Rickert, 1924, p. 86). Ele continua (ibid.) a falar de “intuição” como o “irracional” e acrescenta (p. 87) no sentido da ligação entre conceito e intuição: “Aquele que quer saber deve pensar e ver [*schauen*]. Ele precisa de um e de outro”.

determinados de uma determinada forma, nomeadamente quantitativa. Embora Rickert admita, de acordo com Frege, que como objetos matemáticos não são reais da mesma forma que as coisas físicas ou mentais, o reconhecimento desta “irrealidade” ainda não implica seu caráter puramente lógico. Ao contrário, o número seria um construto que contém elementos alógicos, além de determinações lógicas. Para enfatizar a “essência alógica do número”, Rickert a distingue do conceito de número no decorrer de sua investigação: “Há qualquer número de um, qualquer número de dois, *etc*., que se enquadram todos como exemplos sob os conceitos de um, dois, *etc*., mesmo que, naturalmente, só possa haver um conceito de um, dois, etc. para cada um” (Rickert, 1911, p. 69).

É precisamente aqui que Bruno Bauch vê uma recaída na “aritmética de seixos e pimentões ridicularizada por Frege” (Bauch, 1926, p. 63). De fato, segundo a concepção de Rickert, os próprios números aparecem, por seu turno, como objetos contáveis, ainda que irreais. Embora Bauch seja geralmente contado entre os neokantianos do sudoeste alemão, ele também chegou muito perto das posições dos marburgueses. Além disso, ele manteve relações estreitas com Frege em Jena[11]. Bauch defende a tentativa de Frege de “logicizar” a aritmética com particular veemência em seu trabalho *Die Idee* (*A Ideia*), de 1926. Aqui ele escreve para seu professor Rickert - sem mencionar seu nome, mas com uma referência clara: “Um ato científico, como a realização de Frege, não pode mais ser ignorado pelo lógico que hoje quer ter uma palavra a dizer sobre a natureza dos números” (Bauch, 1926, p. 71).

Em suma, é de se esperar que a consideração aqui apresentada da história dos problemas da filosofia matemática de Frege no contexto do neokantismo tenha apontado as alternativas possíveis e talvez também impossíveis de uma justificação sistemática da aritmética e da geometria, que teria que ser discutida ulteriormente.

Referências

Bauch, B. (1926). *Die Idee*. Leipzig.

Bauch, B. (1942). Zum Problem der Zahl. *Die Tatwelt, 18*, 93–104.

[11] cf. também Bauch, 1942. Sobre Bauch, ver em detalhe Schlotter, 2004.

Carnap, R. (1922). Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre. *Kant-Studien*, Ergänzungshefte, Nr. 56. Berlin.

Cassirer, E. (1907). Kant und die moderne Mathematik. *Kant-Studien*, *12*, 1–49.

Cassirer, E. (1910). *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik*. Berlin.

Cassirer, E. (1929). *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil: Phänomenologie der Erkenntnis*. Berlin.

Cohn, J. (1908). *Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. Untersuchungen über die Grundfragen der Logik*. Leipzig.

Frege, G. (1873). *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*. Diss. Göttingen. Jena.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau.

Frege, G. (1885/86). Über formale Theorien der Arithmetik. In *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, *19*, 94–104.

Frege, G. (1893). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Bd. 1. Jena.

Frege, G. (1983). Nachgelassene Schriften, hg. von H. Hermes/F. Kambartel/F. Kaulbach. 2. Aufl. Hamburg.

Gabriel, G.; Schlotter, S. (2017). *Frege und die kontinentalen Ursprünge der analytischen Philosophie*. Münster.

Kant, I. (1911). Kritik der reinen Vernunft (zweite Auflage). In Kants gesammelte Schriften (Akademie-Ausgabe), Bd. 3. Berlin.

Kaulbach, F. (1983). Der neue Ansatz und die geometrische Erkenntnisquelle (Einleitung zu Frege 1983), S. XXV–XXXIII.

Kreiser, L. (1984). G. Frege „Die Grundlagen der Arithmetik“ – Werk und Geschichte. In Frege Conference 1984, hg. von G. Wechsung. Berlin (Ost), S. 13–27.

Kreiser, L. (2001). *Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit*. Hamburg.

Liebmann, O. (1865). *Kant und die Epigonen. Eine kritische Abhandlung*. Stuttgart.

Liebmann, O. (1880). *Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie*. 2. Aufl. Straßburg.

Liebmann, O. (1900). *Zur Analysis der Wirklichkeit. Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie*. 3. Aufl. Straßburg.

Natorp, P. (1910). *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*. Leipzig.

Rickert, H. (1911). Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffs. *Logos* 2, S. 26–78.

Rickert, H. (1924). Das Eine, die Einheit und die Eins. Bemerkungen zur Logik des Zahlbegriffs. Zweite, umgearbeitete Aufl. (Heidelberger Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte, hg. von E. Hoffmann u. H. Rickert, Nr. 1). Tübingen.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge.

Schlotter, S. (2004). *Die Totalität der Kultur. Philosophisches Denken und politisches Handeln bei Bruno Bauch*. Würzburg.

Thiel, C. (1997). Natorps Kritik an Freges Zahlbegriff. In Frege in Jena. Beiträge zur Spurensicherung, hg. von G. Gabriel u. W. Kienzler. Würzburg, S. 123–128.

Wille, M. (2016). *Largely unknown*. Gottlob Frege und der posthume Ruhm. Münster.

Windelband, W. (1915). Präludien. Aufsätze und Reden zur Philosophie und ihrer Geschichte, Bd. 1. 5. Aufl. Tübingen.

Tradução:
Lucas A. D. Amaral*

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – São Paulo, Brasil
lucasadamaral@gmail.com

Rafael R. Garcia

Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil
raroga@unicamp.br

Tradução recebida em: 08.10.2020

Tradução aprovada em: 01.03.2021

* Pós-doutorando em filosofia (PNPD/CAPES) pela PUC-SP.