GEOMETRIA E INTUIÇÃO ESPACIAL EM KANT[*] [†]

MICHAEL FRIEDMAN
Stanford University

A filosofia da geometria de Kant só pode ser adequadamente compreendida no contexto de duas características mais gerais de sua posição filosófica: sua dicotomia fundamental entre as duas faculdades cognitivas básicas da mente, sensibilidade e entendimento, e sua peculiar teoria do espaço como a "forma pura de nossa intuição sensível externa." A concepção kantiana do espaço e do tempo como nossas formas puras de intuição sensível (externa e interna) é central para sua posição filosófica geral, que ele denomina idealismo "formal" ou "transcendental". E, embora uma dicotomia fundamental entre as duas faculdades de sensação e intelecto preceda Kant por muitos séculos, sendo característica de todas as formas do racionalismo tradicional de Platão a Leibniz, a versão particular de Kant da dicotomia é inteiramente peculiar a ele. Pois, em nítido contraste com todas as formas de racionalismo tradicional, Kant localiza a sede principal do conhecimento matemático *a priori* na sensibilidade, e não no intelecto. Em particular, nossa forma pura da intuição sensível externa – o espaço – constitui a base fundamental de nosso conhecimento geométrico puro.

Kant caracteriza o papel distintivo na geometria de nossa intuição pura do espaço em termos do que ele chama "construção na intuição pura", e ilustra esse papel com exemplos de construção geométrica extraídos dos *Elementos* de Euclides. Assim, é natural que, para elucidar a concepção de Kant, voltemo-nos para os recentes trabalhos

---

[*] Apresentei, na segunda reunião de uma oficina Stanford-Paris sobre diagramas em matemática, no outono de 2008, uma versão preliminar deste artigo, em grande parte inspirada em um trabalho de Marco Panza sobre o raciocínio diagramático em Euclides, apresentado na primeira reunião dessa mesma oficina no outono de 2007. Visto que Panza revisou substancialmente seu texto mais tarde, aproveitei a oportunidade para também revisar substancialmente meu próprio trabalho; e, em particular, optei por adotar como alvo principal o trabalho da estudiosa de Kant, Lisa Shabel, que está bem próximo do espírito da discussão original de Kenneth Manders sobre o diagrama euclidiano (ver nota 1 abaixo). Em relação a isto, devo agradecer também os comentários de Jeremy Avigad sobre uma versão anterior do meu texto. Devo ainda a Daniel Sutherland e um revisor anônimo de *Synthese* alguns úteis comentários sobre a penúltima versão deste texto.

[†] [N. E.] Trabalho apresentado no XIII Colóquio Kant da UNICAMP "Kant e a Ciência de seu Tempo", em 15 de dezembro de 2011, sob o título "Kant on Geometry and Spatial Intuition". Os organizadores do Colóquio agradecem ao autor pela cessão do texto para publicação em *Kant e-Prints*, concomitantemente com a publicação do trabalho original em *Synthese*. Tradução para o português de José Oscar de Almeida Marques e Andrea Faggion, com especiais agradecimentos a Luis Cláudio Balan de Campos.

sobre o raciocínio diagramático em Euclides inaugurados por Kenneth Manders.[1] Em particular, quando Kant diz que a intuição espacial desempenha um papel necessário na ciência da geometria, poderíamos supor que ele está querendo dizer que o raciocínio diagramático, no sentido de Manders, desempenha um papel necessário. Argumentarei que, por mais iluminadora que possa ser enquanto uma interpretação dos *Elementos,* essa maneira de entender a geometria euclidiana não é adequada para interpretar Kant, e, de modo mais geral, que os recentes trabalhos sobre o raciocínio diagramático só podem, na melhor das hipóteses, capturar uma parte do que está envolvido na concepção de geometria de Kant. E, o que é mais importante, o raciocínio diagramático não pode explicar por que Kant supõe que sua concepção da geometria envolve crucialmente uma nova e revolucionária teoria do *espaço* – o próprio espaço (tridimensional) em que nós e todos os outros objetos físicos vivemos, movemo-nos e temos nossa existência.

Kant, como eu disse, separa-se do racionalismo tradicional ao localizar a sede da geometria pura na sensibilidade e não no entendimento, e, com isso, atribui um papel central na geometria ao que ele denomina "a imaginação produtiva pura". Talvez o problema mais importante enfrentado pelas interpretações da filosofia kantiana da geometria seja, assim, explicar como, para Kant, a sensibilidade e a imaginação – faculdades tradicionalmente associadas à apreensão imediata de particulares sensíveis – possam fornecer um conhecimento verdadeiramente universal e necessário. Por exemplo, em uma passagem bem conhecida da "Disciplina da razão pura em seu uso dogmático", na primeira *Crítica*, Kant estabelece um contraste entre a cognição filosófica, enquanto "*cognição racional a partir de conceitos*", e a cognição matemática, enquanto cognição racional "a partir da *construção* de conceitos" – com o famoso adendo de que "*construir* um conceito é apresentar a intuição que lhe corresponde *a priori*" (A713/B741).[2] Kant conclui: "[a filosofia] se restringe meramente a conceitos universais, [a matemática] não pode realizar nada por meio de meros conceitos, mas recorre imediatamente à intuição,

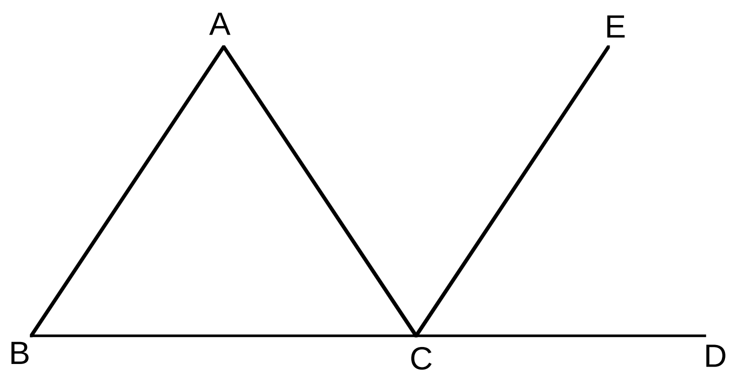
[1] O clássico trabalho de Manders, "The Euclidean Diagram," tem circulado amplamente na forma de manuscrito desde 1995. Foi finalmente impresso, acompanhado de uma nova introdução de Manders ao assunto, "Diagram-Based Geometrical Practice," em Mancosu, P. (org.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (Oxford: Oxford University Press, 2008), p. 65-133.

[2] Todas as traduções dos escritos de Kant são de minha autoria [MF] e eu as cito de acordo com as convenções padronizadas: todas as citações da *Crítica da razão pura* referem-se respectivamente à paginação da primeira edição, de 1781 (A), e da segunda edição, de 1787 (B); todos os outros escritos de Kant são citados segundo o volume e número de página na edição da *Akademie* dos *Kants gesammelte Schriften* (Berlim: de Gruyter, 1902-). [Nesta tradução para o português foram seguidas da maneira mais próxima possível as traduções para o inglês preparadas pelo autor.]

na qual ela considera os conceitos *in concreto* – não, contudo, empiricamente, mas apenas em uma [intuição] que ela apresenta *a priori*, isto é, que ela construiu, e na qual aquilo que se segue das condições universais de construção deve também valer universalmente para o objeto do conceito construído.” (A715-716/B743-744).

Mas em que consiste, exatamente, uma intuição pura ou não empírica correspondente a um conceito geral – isto é, um exemplo singular desse conceito que, não obstante, se apresenta de maneira puramente *a priori*? Além disso, como é possível que qualquer exemplo singular de um conceito geral (independentemente de como se supõe que seja produzido) venha a constituir uma fonte adicional, acima e além da representação puramente conceitual, de conhecimento universal e necessário? Imediatamente após a sentença citada acima, que define a construção de um conceito como a apresentação *a priori* da intuição correspondente, Kant continua (A713/B741): “Para a construção de um conceito requer-se, portanto, uma intuição *não empírica*, que, consequentemente, enquanto intuição, é um objeto *singular* [*einzelnes*], mas que, não obstante, enquanto construção de um conceito (uma representação universal), deve expressar validade universal, na representação, para todas as intuições possíveis que caem sob esse conceito.” Mais uma vez, porém, pode-se perguntar: como é possível que uma representação essencialmente singular (independentemente de como se supõe que seja produzida) venha a expressar essa validade verdadeiramente universal? São precisamente problemas desse tipo que subjazem à opinião contrária, comum a todas as formas tradicionais de racionalismo, de que o conhecimento matemático deve ser conceitual ou intelectual, *em oposição* a sensível.

Kant ilustra o que quer dizer, na continuação dessa passagem, por meio de um exemplo de uma prova euclidiana, a Proposição I.32 dos *Elementos*, em que se mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à soma de dois ângulos retos:



Dado um triângulo ABC, estende-se o lado BC (em uma linha reta) até D e traça-se a linha CE paralela a AB. Observa-se então (pela Proposição I.29), que os ângulos alternos BAC e ACE são iguais, e também que o ângulo ECD é igual ao ângulo interno e oposto ABC. Mas o ângulo interno restante ACB somado aos dois ângulos ACE e ECD (cuja soma é o ângulo externo ACD) é igual à soma de dois ângulos retos (a linha reta BCD), e já se mostrou que os dois ângulos ACE e ECD são iguais, respectivamente, aos dois primeiros ângulos internos. Portanto, os três ângulos internos, tomados em conjunto, também são iguais à soma de dois ângulos retos. Esta construção e prova têm, obviamente, validade universal para todos os triângulos, porque as inferências e construções auxiliares requeridas (estender a linha BC até D e traçar a paralela CE a AB) sempre podem ser levadas a cabo na geometria euclidiana, não importa qual triângulo ABC se tome como ponto de partida.

Parece, de fato, que o procedimento de prova dos *Elementos* de Euclides é o paradigma de construção na intuição pura ao longo de toda discussão de Kant sobre a matemática na primeira *Crítica* – que inclui uma apresentação razoavelmente completa da geometria euclidiana elementar do triângulo. Na Estética Transcendental, por exemplo, Kant apresenta a propriedade correspondente da soma dos lados do triângulo – que dois lados tomados em conjunto são sempre maiores que o terceiro (Proposição I.20) – como uma ilustração de como proposições geométricas "nunca se derivam de conceitos universais de linha e triângulo, mas antes da intuição, e, de fato, [assim se derivam] *a priori* com certeza apodítica" (A25/B39). E a prova euclidiana dessa proposição procede, assim como a Proposição I.32, por meio de construções auxiliares e inferências a partir de um triângulo arbitrário ABC: estendemos o lado BA (em linha reta) até D de tal modo que AD seja igual a AC; traçamos então CD e observamos (pela Proposição I.5) que os dois ângulos ACD e ADC são iguais, de modo que BCD é maior que BDC; dado que (pela Proposição I.19) o maior ângulo é subtendido pelo maior lado, segue-se que BD é maior que BC; mas BD é igual à soma de BA e AD (= AC). Além disso, Kant refere-se à prova euclidiana da própria Proposição I.5 – que os ângulos na base de um triângulo isósceles são iguais – em uma famosa passagem do Prefácio da segunda edição (1787), louvando o método característico da matemática introduzido pela "revolução no pensamento" realizada pelos gregos da Antiguidade; e também essa prova procede pela expansão de um triângulo original (e arbitrário) ABC em uma figura mais complicada, por meio de construções auxiliares.[3]

Assim, é muito claro que Kant se apoia em Euclides e, mais uma vez, portanto, é natural que nos voltemos para os recentes trabalhos sobre o raciocínio diagramático encontrado nos *Elementos* para elucidar a perspectiva de Kant. Com respeito, por exemplo, à questão de como a percepção de um particular sensível individual (tal como um diagrama físico concreto) poderia prover um conhecimento universalmente válido, podemos apelar para a distinção central de Manders entre propriedades *exatas* e *co-exatas* de um diagrama euclidiano. As primeiras envolvem relações métricas de igualdade ou desigualdade entre comprimentos, ângulos e áreas, ao passo que as últimas envolvem apenas relações topológicas (ou mereotopológicas) de inclusão entre regiões definidas por essas grandezas. Observamos, por exemplo, que os aspectos especificamente métricos do triângulo que figura na prova da Proposição I.32 – os comprimentos particulares de seus lados e as grandezas particulares de seus ângulos – não desempenham nela nenhum papel: a prova permanece verdadeira para todas as variações contínuas desses comprimentos e ângulos. Em contraste, o fato de que o ângulo externo ACD do diagrama estendido (ABCDE) contém (como sua soma) os dois ângulos ACE e ECD é essencial para a prova, e isso, igualmente, permanece verdadeiro para todas as variações contínuas dos lados e ângulos originais. Assim, ao levar em conta apenas as

[3] A referência à Proposição I.5 é explicitada em uma carta a Christian Schütz de 25 de junho de 1787, em que Kant corrige *gleichseitiger* no texto impresso para *gleichschenkligter* (Ak. 10, 489). A passagem, corrigida, lê-se assim (Bxi-xii): "Uma iluminação ocorreu ao primeiro homem (quer tenha sido Tales ou algum outro) que pela primeira vez demonstrou o triângulo isósceles; pois ele descobriu que o que tinha a fazer não era inspecionar o que via na figura, ou mesmo no mero conceito dela, e, por assim dizer, ler aí suas propriedades, mas antes produzir o que ele próprio havia *a priori* injetado em pensamento [*hineindachte*] e apresentado (por meio de uma construção), de acordo com conceitos, e que, para conhecer seguramente alguma coisa *a priori*, nada deveria atribuir à coisa exceto o que se seguia necessariamente daquilo que ele próprio havia nela colocado de acordo com seu conceito."

propriedades *co-exatas* do diagrama estendido, provamos efetivamente uma proposição válida para todos os triângulos particulares, quaisquer que sejam.

Tendo notado quão atraentes suas ideias se revelaram nesse meio tempo para os estudiosos de Kant, Manders tratou brevemente da relação entre sua concepção da prova euclidiana e a concepção kantiana de intuição (pura) em seu texto "Diagram-Based Geometric Practice": "[Minha compreensão dos diagramas euclidianos] conforma-se à concepção de Kant (cf. Shabel (2003), Goodwin (2003)) de que intuições (diagramas) são particulares, e conectam-se a asserções gerais mediante esquematização (conceituação mediante condições de construção de diagramas). O fato de que asserções (co-exatas) baseadas em diagramas mantêm-se estáveis quando os diagramas sofrem distorção, sendo, portanto, independentes de qualquer particular realização empírica, poderia, então, motivar a necessidade ou o caráter *a priori* da intuição geométrica."[4] Manders refere-se aqui à dissertação de Lisa Shabel, apresentada à Universidade da Pensilvânia em 1997 – e publicada em 2003 na Outstanding Dissertation Series: Studies in Philosophy[5] – juntamente com a dissertação de William Goodwin apresentada em 2003 à Universidade da Califórnia-Berkeley.

A ideia básica de Shabel é que uma intuição pura é simplesmente uma intuição empírica (uma figura particular efetivamente desenhada) que funciona de uma certa maneira em demonstrações geométricas – precisamente de uma maneira que possa, então, proporcionar tanto aprioridade como universalidade a essas demonstrações.[6] Ela ilustra a função característica em questão distinguindo entre duas diferentes provas da Proposição I.32 de Euclides: uma demonstração "mecânica" devida a Christian Wolff, baseada na realização de comparações (métricas) exatas entre os ângulos na figura estendida (ABCDE) que são transportados por um compasso aberto, e a prova original de Euclides da Proposição I.32, à qual, como vimos, o próprio Kant faz apelo. Para Shabel, a segunda demonstração, isto é, a demonstração "matemática", tem sucesso em conferir

[4] Mancosu (2008) (ver nota 1 acima), p. 74.

[5] Shabel, L. *Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice* (Routledge: Nova York e Londres, 2003).

[6] Ver Shabel (2003) (nota 5 acima), p. 94: "Proponho que Kant está aqui [A714/B742] mostrando como uma intuição pura pode ser interpretada como *efetivamente* desenhada, e, portanto, como empiricamente dada, sem deixar de funcionar como uma intuição 'pura'. As três maneiras pelas quais uma intuição empírica pode conferir aprioridade são lidas então como maneiras pelas quais uma figura individual desenhada pode funcionar de maneira 'pura'… [A]s intuições puras que exibem e constroem conceitos matemáticos, e nas quais se baseiam as demonstrações matemáticas, são intuições de objetos sensíveis individuais singulares, consideradas juntamente com o procedimento para construção desses objetos."

tanto aprioridade como universalidade à sua conclusão precisamente porque não depende de informação métrica exata. Assim, embora não cite explicitamente o trabalho original de Manders de 1995, a análise de Shabel da distinção entre demonstrações "matemáticas" e "mecânicas" apresenta um estreito paralelismo com a distinção fundamental de Manders entre propriedades "exatas" e "co-exatas" de diagramas concretos particulares.[7] Em consequência, Shabel dá o mesmo tipo de destaque que Manders ao diagrama individual concreto (a figura particular efetivamente desenhada): começamos com este e então o conectamos a "asserções gerais" por meio de "condições de construção de diagramas."[8] De minha parte, acredito que, enquanto interpretação de Kant, esse destaque está mal colocado.

Nos Axiomas da Intuição (os princípios do entendimento puro que correspondem às categorias da quantidade – unidade, pluralidade, e totalidade), Kant considera a construção euclidiana de um triângulo em geral a partir de três linhas quaisquer tais que duas, tomadas conjuntamente, sejam maiores que a terceira (Proposição I.22: a restrição é

[7] Veja-se *op. cit.*, pp. 99-100: "Em contraste [com a demonstração mecânica], o diagrama construído para a demonstração matemática não provê nenhuma informação 'exata', tal como as medidas comparativas dos ângulos internos e externos do triângulo. O diagrama [ABCDE] provê informação sobre relações de parte/todo (e, consequentemente, menor/maior) sem determinar igualdades estritas entre partes. Podemos dizer que o diagrama, considerado mecanicamente, provê uma informação exata (embora possivelmente imprecisa) acerca das medidas de grandezas; quando considerado matematicamente, o diagrama provê informação inexata acerca da inclusão espacial de grandezas. Na prova mecânica, a asserção de que os ângulos ABC e BAC juntos são iguais ao ângulo ACD justifica-se pela medição de todos os três ângulos com instrumentos e pela comparação dos resultados, ao passo que, na prova matemática, a mesma asserção é justificada pelas relações previamente demonstradas entre ângulos demarcados por linhas paralelas e uma transversal." Shabel conclui (p. 101): "[A]ssim, a demonstração mecânica não se distingue da demonstração matemática em virtude de uma distinção entre uma figura efetivamente construída e uma figura imaginada, mas, antes, pela maneira pela qual operamos com essa figura efetivamente construída, e dela extraímos inferências."

[8] Para Shabel, essa prioridade do diagrama individual concreto expressa-se em sua tese de que uma intuição pura é simplesmente uma intuição empírica funcionando "de maneira pura." *Cf. op. cit.*, p. 102: "Apesar do fato de que as figuras construídas nas demonstrações mecânica e matemática da Proposição I.32 são idênticas, a primeira figura é, em termos kantianos, um caso de intuição empírica, e a última, de intuição pura[27]. Dado que elas não se distinguem pela maneira como aparecem, nem pelo meio ou instrumentos no qual e pelos quais elas são construídas, devem distinguir-se por sua função na demonstração." A nota de fim de texto 27 acrescenta (p.160): "[A] intuição pura poderia ser empírica, na medida em que é (ou pode ser) a intuição de uma figura efetivamente desenhada, e não apenas imaginada. Mas ela é uma intuição empírica que funciona de maneira pura." Isto se coaduna com a ideia anterior de Shabel (nota 6 acima) de que intuições puras "são intuições de objetos sensíveis individuais singulares, *consideradas juntamente com* o procedimento para construção desses objetos" (meus itálicos). Shabel depois explica que os procedimentos relevantes para a construção são o que Kant entende por "esquemas", e, assim, um esquema, na interpretação de Shabel, é uma condição geral pela qual um diagrama individual concreto é *visto como* expressando universalidade. Retornarei mais à frente à interpretação de Shabel do esquematismo.

obviamente necessária por causa do que foi provado na Proposição I.20). Isto torna claro, em minha opinião, que a construção na intuição pura do conceito de um triângulo em geral, para Kant, *é simplesmente* a construção euclidiana demonstrada na Proposição I.22 – onde, nas palavras de Kant, "tenho aqui a mera função da imaginação produtiva, que pode desenhar as linhas maiores ou menores e com isso possibilitar que elas se encontrem em todos e quaisquer ângulos arbitrários" (A164-5/B205). Além disso, no capítulo sobre o Esquematismo dos Conceitos Puros do Entendimento, Kant distingue cuidadosamente o *esquema* geral de um "conceito sensível puro" (*i.e.*, um conceito matemático) de qualquer *imagem* particular que caia sob esse conceito e possa ser produzida pelo esquema geral (A140/B179-180): "Chamo [a] representação de um procedimento geral da imaginação [*Einbildungskraft*] para prover um conceito de sua imagem [*Bild*] o esquema desse conceito." Kant então ilustra essa ideia, mais uma vez, pelo exemplo de um triângulo:

> De fato, são os esquemas e não as imagens dos objetos que estão na base de nossos conceitos sensíveis puros. Nenhuma imagem jamais seria adequada ao conceito de um triângulo em geral. Pois ela nunca atingiria a universalidade do conceito, que o faz valer para todos os triângulos, sejam retângulos, acutângulos, etc., mas estaria sempre limitada a uma parte apenas dessa esfera. O esquema do triângulo não pode existir em parte alguma senão no pensamento, e significa uma regra de síntese da imaginação com respeito a figuras puras no espaço. (A140-1/B180)

Essa "regra de síntese", portanto, parece não ser nada mais, nada menos, que a construção euclidiana de um triângulo arbitrário considerada nos Axiomas da Intuição como uma "mera função [universal] da imaginação produtiva."

De forma mais geral, então, podemos tomar as construções euclidianas que correspondem aos conceitos geométricos fundamentais (linha, círculo, triângulo, etc.) como sendo aquilo que Kant entende pelos *esquemas* desses conceitos.[9] Podemos

[9] Articulo essa interpretação dos esquemas geométricos em *Kant and the Exact Sciences* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1992), p. 90-91 (nota 59) e, mais extensamente, às p. 122-129. Shabel, em *op. cit.*, p. 109-114, desenvolve uma leitura estreitamente análoga, baseada em muitas das mesmas passagens. A principal diferença, como já sugerido, é que Shabel vê esse esquema como uma condição geral para tomar uma imagem particular como expressando universalidade (*cf.* a nota 8 acima). Como ela própria expõe (p. 114): "[A] intuição pura que é a base para uma demonstração matemática da proposição I.32 é uma imagem universalizável, dado que é intuída com, e somente com, o procedimento especificado para sua construção na imaginação… Pelo fato de que a 'cognição matemática considera o universal no particular…' (que é o mesmo que dizer que o conceito matemático esquematizado provê a regra para construir uma intuição pura e universalizável), a intuição pura individual assim construída pode ser

entender o esquema do conceito de triângulo como uma função ou operação construtiva que toma como *input* três linhas arbitrárias (tais que duas juntas são maiores que a terceira) e fornece, como *output*, o triângulo construído a partir dessas três linhas (de acordo com a Proposição I.22); podemos entender o esquema do conceito de círculo como uma função que toma como *input* um ponto e um segmento de linha arbitrários tal que o segmento contém o ponto como um de seus extremos e fornece, como *output*, o círculo que tem esse ponto dado como centro e o segmento de linha dado como seu raio (de acordo com o Postulado 3); e assim por diante.[10] Tais operações construtivas têm toda a generalidade ou universalidade dos conceitos correspondentes: elas fornecem, com os *inputs* apropriados, *todos e quaisquer* exemplos desses conceitos. Diferentemente dos conceitos gerais eles próprios, contudo, os *outputs* de um esquema são, de fato, representações singulares ou individuais – exemplos particulares, ou o que Kant chama "imagens", que caem sob o conceito em questão. Os *outputs* de um esquema, portanto, não são entidades lógicas ou conceituais como proposições ou valores de verdade.

Este último ponto é crucial para entender por que Kant considera que a matemática pura envolve essencialmente recursos cognitivos não discursivos ou não conceituais que, não obstante, possuem toda a universalidade e necessidade do pensamento puramente conceitual. Para Kant, a característica do pensamento conceitual é o procedimento lógico de *subsunção*, seja de um indivíduo a um conceito geral, ou de um conceito menos geral (*species*) a um conceito mais geral (*genus*). Em contraste, a característica do raciocínio matemático é o procedimento de *substituição* – mediante o qual, como vamos propor agora, um objeto é inserido na posição do argumento de uma função, produzindo outro objeto que pode ser inserido na posição do argumento de outras funções, e assim sucessivamente. O raciocínio por substituição é, portanto, essencialmente *iterativo*, e é precisamente esse pensamento iterativo, para Kant, que está na base tanto da geometria

---

entendida como 'geral'." Em minha leitura, ao contrário, a noção de uma "imagem universalizável" é um oxímoro, dado que uma imagem (diferentemente de um esquema) é precisamente aquilo que *não* é universal e, portanto, *nunca* pode "ser adequada ao conceito de um triângulo em geral." *Cf.* A140/B179 (meus itálicos): "O esquema em si mesmo é sempre apenas um produto da imaginação; contudo, na medida em que a síntese da imaginação *não visa nenhuma intuição individual*, mas antes tão somente a unidade na determinação da sensibilidade, o esquema deve distinguir-se da imagem."

[10] Veja-se A234/B287: "Ora, um postulado em matemática é a proposição prática que não contém nada exceto a síntese pela qual primeiramente nos damos um objeto e geramos seu conceito – p. ex., traçar um círculo com uma linha dada a partir de um ponto dado em um plano – e essa proposição pode ser provada, porque o procedimento que ela requer é precisamente aquele pelo qual nós geramos o conceito dessa figura."

pura (na forma da prova euclidiana) como da manipulação mais geral do cálculo de grandezas em álgebra e aritmética.[11]

A concepção kantiana do caráter essencialmente não conceitual do raciocínio geométrico é, assim, especialmente sensível à circunstância de que, na formulação euclidiana da geometria, a aplicação iterativa de operações construtivas iniciais representa as suposições existenciais que, nas formulações modernas que se guiam por Hilbert, seriam expressas por enunciados explicitamente quantificados. Assim, por exemplo, enquanto Hilbert representa a divisibilidade infinita de uma linha por um axioma quantificado explícito que afirma que entre dois pontos quaisquer existe um terceiro, Euclides representa a mesma ideia mostrando como construir uma função de bissecção para qualquer segmento de linha dado (Proposição I.10): nossa capacidade de repetir indefinidamente essa construção representa, então, a *infinita divisibilidade* desse mesmo segmento. De maneira mais geral, Euclides constrói todos os pontos em seu plano por meio da aplicação iterativa de três operações construtivas iniciais a qualquer par (arbitrário) dado de pontos: conectar dois pontos quaisquer por um segmento de linha reta (Postulado 1), estender por uma linha reta qualquer segmento de linha dado (Postulado 2), construir um círculo que tenha um ponto qualquer como centro e, como raio, qualquer segmento de linha dado que tenha esse ponto como um de seus extremos (Postulado 3). Esse procedimento produz todos os pontos capazes de serem construídos pelo uso de régua e compasso, os quais, é claro, compreendem apenas um pequeno subconjunto (enumerável) do contínuo bidimensional completo cuja existência é explicitamente postulada por Hilbert.[12] Nesse sentido, as suposições existenciais necessárias para os particulares procedimentos de prova de Euclides – as próprias suposições necessárias para justificar todas as construções auxiliares de que se precisa ao longo do caminho –

---

[11] Para uma discussão adicional da álgebra e aritmética deste ponto de vista, veja-se Friedman (1992) (nota 9 acima), p. 83-89, 104-122. Para uma posição contrastante, veja-se Shabel, L. "Kant on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts," *Studies in History and Philosophy of Science* 29 (1998): 589-621. *Cf.* também Sutherland, D. "Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportion," *Journal of the History of Philosophy* 44 (2006): 533-558.

[12] Mais precisamente, podemos representar todos os pontos que podem ser construídos por meio de régua e compasso no plano euclidiano pelo produto cartesiano, por si mesmo, do conjunto formado pelos racionais unido, por extensão de corpo, às raízes quadradas de seus elementos positivos (convenientemente chamado um "corpo euclidiano"), ao passo que o conjunto completo de pontos gerados por um axioma de continuidade genuíno (de segunda ordem) é representado por $\mathbf{R}^2$, onde $\mathbf{R}$ é o conjunto dos números reais. Um importante caso intermediário, estudado por Tarski, usa um *esquema* de continuidade (de primeira ordem), e é representado por um produto cartesiano sobre qualquer corpo real fechado: veja-se Tarski, A. "What is Elementary Geometry?," *in* Henkin, L., Suppes P. e Tarski A. (orgs.), *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics* (Amsterdam: North-Holland, 1959), p. 16-29.

são dadas por funções de Skolem para os quantificadores existenciais que empregaríamos para formular uma axiomatização no estilo de Hilbert na moderna lógica de quantificadores, ao passo que, em Euclides, todas essas funções de Skolem podem ser explicitamente construídas por iterações finitas das três operações construtivas iniciais apresentadas nos primeiros três postulados.

Na trilha de Leibniz, Kant toma a estrutura discursiva do entendimento ou intelecto como delimitada pelas formas lógicas da lógica tradicional de sujeito e predicado. Em explícita oposição a Leibniz, entretanto, Kant considera que essas formas lógicas estão estritamente limitadas a representações essencialmente finitárias: não há, para Kant, "conceitos completos" leibnizianos que contenham dentro de si mesmos (isto é, dentro de seus conjuntos de marcas definitórias [*Merkmale*] ou conceitos parciais [*Teilbegriffe*]) uma multiplicidade infinita de representações conceituais adicionais. Mas representações matemáticas (inclusive as representações matemáticas do espaço) podem conter, e de fato contêm, dentro de si mesmas uma multiplicidade infinita de representações (matemáticas) adicionais (como na representação da divisibilidade infinita). Assim, para Kant, essas representações não são nem podem ser conceituais.[13] É claro que temos hoje uma concepção de lógica inteiramente diferente da de Kant, uma concepção muito mais poderosa do que qualquer coisa que ele ou mesmo Leibniz jamais imaginaram. Não obstante, podemos ainda entender o *insight* fundamental de Kant, a partir da nossa perspectiva, se observarmos que nenhuma estrutura matemática infinita (tal como o espaço da geometria euclidiana ou a série dos números) pode ser representada no interior da lógica quantificacional *monádica*. Na lógica moderna, tais estruturas infinitas são representadas pelo uso de sequências embutidas de quantificadores universais e existenciais usando lógica *poliádica*. Em vez disso, o que torna possível essas mesmas representações, do ponto de vista de Kant, é a aplicação iterativa de funções construtivas

[13] Isto está a cargo do quarto argumento na Exposição Metafísica do Espaço na segunda edição da Estética Transcendental (B39-40): "O espaço é representado como uma quantidade infinita *dada*. Ora, todo conceito certamente deve ser pensado como uma representação que está contida em um agregado infinito de diferentes representações possíveis (enquanto a marca comum destas), e, portanto, como contendo-as *sob si mesmo*. Mas nenhum conceito, enquanto tal, pode ser pensado como se contivesse um agregado infinito de representações *dentro de si mesmo*. O espaço, porém, é pensado exatamente dessa maneira (pois todas as partes do espaço *in infinitum* existem simultaneamente). Assim, a representação original do espaço é uma *intuição a priori*, e não um *conceito*." Para uma discussão adicional, veja-se Friedman (1992), p. 66-71. Como explicarei à frente, contudo, penso agora que a relação entre a representação matemática (isto é, geométrica) do espaço e a representação "original" do espaço descrita na Exposição Metafísica é um pouco mais sutil: esta última *fundamenta* a primeira, mas não é simplesmente *idêntica* a ela.

na "imaginação produtiva", onde, como vimos, funções de Skolem são explicitamente construídas para os quantificadores existenciais que utilizaríamos em nossas formulações.

Vemos agora por que, do ponto de vista de Kant, o modo matemático de pensar envolve essencialmente o que ele denomina a imaginação produtiva pura, e por que, em consequência, esse modo de pensar ultrapassa essencialmente as fronteiras do pensamento puramente conceitual, intelectual. Meu primeiro problema com o emprego das interpretações diagramáticas de Euclides no estilo de Manders para interpretar a noção kantiana de construção na intuição pura é, então, que elas não se ajustam à compreensão kantiana da relação entre pensamento conceitual e intuição sensível. Mais especificamente, elas não se ajustam à sua avançada concepção da relação entre conceitos (geométricos) gerais, os esquemas gerais que lhes correspondem, e as imagens sensíveis particulares (figuras geométricas particulares) que resultam então da aplicação desses esquemas. Em particular, enquanto essas explicações diagramáticas da generalidade das proposições geométricas principiam, como vimos, com diagramas concretos particulares e esforçam-se em seguida para explicar como podemos abstrair de seus aspectos particulares irrelevantes (grandezas específicas de lados e ângulos) recorrendo apenas a seus aspectos *co-exatos*, Kant principia com conceitos gerais tais como concebidos no interior da tradição (lógica) leibniziana, e mostra, a seguir, como "esquematizá-los" sensivelmente por meio de um ato intelectual ou função da imaginação produtiva pura. Tanto os conceitos gerais em questão como seus esquemas gerais correspondentes são representações puras, e não empíricas; e uma figura concreta particular ocorre, por assim dizer, apenas incidentalmente para Kant, ao final de um processo de determinação intelectual da sensibilidade *pura* (e não empírica).

O ponto mais geral que subjaz estas considerações é que a intuição pura, para Kant, é a *forma* da intuição (empírica): ela jaz à espera antes da recepção de qualquer sensação – a correspondente *matéria* da intuição (empírica) – enquanto uma condição *a priori* da possibilidade de todas as percepções sensoriais e seus objetos.[14] Assim, diagramas concretos efetivamente percebidos pressupõem a estrutura da intuição pura tanto quanto

[14] Kant explica isso no início da Estética Transcendental (A20/B34): "Chamo aquilo no aparecimento que corresponde à sensação a *matéria* do aparecimento, mas o que faz com que o múltiplo do aparecimento *possa ser ordenado* em certas relações, eu chamo a *forma* do aparecimento. Dado que aquilo unicamente no qual as sensações podem ser ordenadas e postas em uma certa forma não pode ele próprio ser uma sensação, é apenas a matéria de todo aparecimento que nos pode ser dada *a posteriori*; mas a forma de todo aparecimento deve estar pronta para elas [as sensações] na mente *a priori*, e pode portanto ser considerada separadamente de todas as sensações."

todos os outros objetos percebidos pelos sentidos, e é, portanto, no mínimo muito enganoso interpretar uma intuição pura kantiana como um certo tipo de intuição empírica. Ao contrário, temos de ligar a concepção kantiana de raciocínio geométrico, em primeira instância, com as intuições puras de espaço e tempo – não com figuras espaciais particulares traçadas no papel ou quadro-negro, mas com o espaço e o tempo eles próprios, enquanto intuições puras, e não empíricas.[15] E é precisamente aqui, como sugeri, que Kant também se ocupa da concepção newtoniana de espaço (e tempo) tal como aparece na controvérsia com Leibniz. Para Newton, o espaço é como um grande receptáculo ontológico de todas as possíveis figuras geométricas, bem como de todos os possíveis objetos materiais, e – como veremos – a teoria kantiana do espaço enquanto forma pura da intuição é pensada exatamente como uma alternativa a essa concepção newtoniana.

Tem importância central na filosofia da geometria de Kant o fato de que todos os objetos possíveis da percepção sensorial humana – todos os objetos daquilo que Kant denomina intuição empírica – devem necessariamente conformar-se aos princípios *a priori* da matemática estabelecidos na intuição pura (A165-166/B206): "A síntese de espaços e tempos, enquanto forma essencial de toda intuição, é o que, ao mesmo tempo, torna possível a apreensão do aparecimento, e, assim, toda experiência externa, [e] portanto, toda cognição de seus objetos; e o que a matemática, em seu uso puro, demonstra dos primeiros vale também necessariamente para os últimos."[16] Assim, para

[15] Manders, em Mancosu (2007), p. 70-71, afirma explicitamente que, em sua perspectiva, os diagramas euclidianos são objetos *físicos* individuais – o que sugere que as "intuições puras" de Kant, entendidas em termos da concepção de Manders do raciocínio diagramático, seriam também objetos físicos individuais (*cf.* a passagem associada à nota 4 acima). Shabel aproxima-se muito dessa perspectiva ao insistir que as "intuições puras" kantianas, em geometria, "são intuições de objetos *sensíveis* individuais singulares" (*cf.* nota 6 acima, meu itálico). No Prefácio acrescentado à versão publicada (2003) de sua dissertação, Shabel explica que sua interpretação de Kant foi posteriormente mais esclarecida e desenvolvida (p. xi): "Meu presente projeto inclui uma tentativa de entender o papel da construção matemática no contexto de uma ampla investigação da teoria kantiana da sensibilidade, incluindo sua teoria da intuição pura tal como articulada na *Estética Transcendental*. Não adotei essa estratégia mais geral na dissertação, o que resultou em uma explicação incompleta e ocasionalmente obscura tanto do esquematismo como da distinção entre intuição pura e empírica enquanto modos de representação sensível." Convido o leitor interessado a consultar os escritos mais tardios de Shabel sobre o assunto e a compará-los (e contrastá-los) com a explicação aqui apresentada. Veja-se, por exemplo, seu ensaio sobre "Kant's Philosophy of Mathematics," em Guyer, P. (org.), *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy* (Cambridge: Cambridge University Press, 2006), p. 94-128, juntamente com os trabalhos ali citados.

[16] *Cf.* a importante passagem em A223-224/B272: "Parece, certamente, que a possibilidade de um triângulo poderia ser conhecida a partir de seu conceito tomado em si mesmo (ele certamente independe da experiência); pois podemos, de fato, dar-lhe um objeto completamente *a priori*, isto é, construí-lo. Contudo, como este é apenas a forma de um objeto, permaneceria para sempre apenas um produto da imaginação, e a possibilidade de seu objeto continuaria duvidosa – como algo para o qual ainda se requer

apreciar o papel que a geometria pura desempenha em nossa percepção de objetos empíricos, precisamos conectar explicitamente as funções da imaginação produtiva pura expressas na construção de conceitos geométricos com as formas kantianas da intuição pura (espaço e tempo), tal como descritas nas exposições metafísicas do espaço e tempo na Estética Transcendental.[17]

No decorrer de sua controvérsia com o filósofo leibniziano Johann August Eberhard, em 1790, Kant desenvolve um contraste entre o espaço (sucessivamente construído) do geômetra e o espaço "subjetivamente dado" de nossa forma pura da intuição sensível externa. Kant começa afirmando que "dizer que uma linha pode ser estendida ao infinito significa que o espaço em que eu traço essa linha é maior que qualquer linha que eu possa traçar nele", de modo que "o geômetra baseia a possibilidade de seu problema – ampliar um espaço (dos quais há muitos) até o infinito – na representação original de um espaço infinito singular *subjetivamente dado*." "[O] espaço geométrico e objetivo," Kant prossegue, "é sempre finito", pois "este último só é dado na

---

algo mais, a saber, que tal figura seja pensada sob condições puras que embasam todos os objetos da experiência. Ora, que o espaço seja uma condição formal *a priori* de experiências externas; que precisamente a mesma síntese formadora de imagens [*bildende*] pela qual construímos um triângulo na imaginação seja completamente idêntica àquela que exercemos na apreensão de um aparecimento para fazermo-nos um conceito empírico deste – é apenas isto que conecta esse conceito [de um triângulo] com a possibilidade de tal coisa." Assim, as condições formais de todas as intuições sensíveis ou empíricas incluem, por assim dizer, não apenas o espaço e tempo puros eles próprios, mas também as sínteses puras da imaginação produtiva expressas nas construções *a priori* (esquemas) de conceitos geométricos. É apenas porque se pressupõe que estes últimos já estão disponíveis que as primeiras (intuições sensíveis ou empíricas) tornam-se em primeiro lugar possíveis.

[17] Segue-se desta análise (ver especialmente nota 16 acima) que a imaginação produtiva *pura* é anterior a todas as intuições empíricas, e, assim – contrariamente a Shabel (*cf.* notas 6 e 7 acima) –, que a diferença entre uma figura efetivamente desenhada e uma meramente imaginada (de maneira pura e produtiva) é, de fato, central para a distinção kantiana entre intuição pura e empírica. Shabel está perfeitamente correta, é claro, quanto ao fato de que uma figura empírica concreta (mesmo mal desenhada) *pode* funcionar como uma intuição pura kantiana no contexto da realização de uma prova geométrica real (*cf.* nota 8 acima). Mas ela só pode fazê-lo, na minha leitura, porque todas as intuições empíricas (incluindo-se esta) estão de acordo com as sínteses puras da imaginação produtiva e as tomam como pano de fundo. Imediatamente após a passagem em A713/B741, com a qual demos início a nosso exame da construção na intuição pura (veja a passagem associada à nota 2 acima, juntamente com sua continuação no parágrafo seguinte), Kant continua (*ibid*., meus itálicos): "Assim, eu construo um triângulo, na medida em que apresento esse conceito com um objeto correspondente, ou mediante a mera imaginação na intuição pura, ou, *de acordo com esta* [intuição pura], também no papel, na intuição empírica – em ambos os casos, contudo, completamente *a priori*, sem ter derivado seu modelo de qualquer experiência." O ponto crucial, mais uma vez, é que as atividades da imaginação produtiva na intuição pura são *anteriores* ao efetivo desenho de uma figura sobre o papel na intuição empírica. (Retornarei mais adiante à questão de em que consiste, exatamente, essa prioridade.) NB: A tradução geralmente excelente de Guyer-Wood, que Shabel (2003) cita para introduzir sua distinção (p. 91-92), omite a frase "de acordo com esta" – não obstante, Shabel sugere, na p. 105, uma leitura alternativa do que poderia significar conhecer uma intuição empírica "de acordo com as condições da intuição pura".

medida em que é gerado [*gemacht*].” E esse espaço geométrico é então explicitamente contrastado com o que Kant chama espaço “metafísico”:

> Dizer, contudo, que o espaço metafísico, isto é, original, mas dado meramente de maneira subjetiva – o qual (visto que não há uma multiplicidade deles) não pode ser subsumido a nenhum conceito que fosse capaz de construção, mas ainda assim contém o fundamento da construção de todos os conceitos geométricos possíveis – é *infinito* significa apenas dizer que ele consiste na forma pura do modo de representação sensível do sujeito enquanto uma intuição *a priori*; com isso, nessa forma de intuição, enquanto representação singular [*einzelnen*], a possibilidade de todos os espaços, que avança ao infinito, está *dada* (Ak. 20, 420-421)

Assim, o espaço “metafísico” é o espaço considerado na Exposição Metafísica do Espaço na Estética Transcendental, ao passo que o espaço geométrico consiste no múltiplo indefinidamente extensível (mas sempre finito) de construções geométricas que se pode (em qualquer estágio finito) efetivamente levar a cabo a partir de algum par inicial (arbitrário) de pontos.[18]

Esta importante passagem, diferentemente da Exposição Metafísica, articula uma clara e explícita conexão entre o espaço como forma pura da intuição externa e a construção geométrica. Voltemo-nos agora, então, para os primeiros dois argumentos da própria Exposição Metafísica, nos quais, acredito, a natureza dessa conexão está, não obstante, implicitamente sugerida.[19] Esses argumentos pretendem mostrar, em particular, que o espaço é uma representação necessária *a priori* que precede todas as percepções

[18] A controvérsia em questão é discutida – e muitos textos relevantes são traduzidos – em Allison, H. E., *The Kant-Eberhard Controversy* (Baltimore; John Hopkins University Press, 1973). Em particular, a inteira passagem (de Ak. 20, 419-421) está traduzida às p. 175-176.

[19] Desenvolvo essa análise em Friedman, M. “Geometry, Construction, and Intuition in Kant and His Successors,” *in* Sher, G. e Tieszen, R. (orgs.), *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000), p. 186-218. Apresento ali uma resposta a um trabalho anterior de Charles Parsons e Emily Carson, buscando conciliar o que denomino a interpretação “lógica” da filosofia da geometria de Kant (tal como desenvolvida por Evert Beth, Jaakko Hintikka, e por mim mesmo anteriormente) com a interpretação “fenomenológica” articulada por Parsons e Carson. Os trabalhos desses autores aos quais me dirijo são: Parsons, C. “The Transcendental Aesthetic,” *in* Guyer, P. (org.), *The Cambridge Companion to Kant* (Cambridge, Cambridge University Press, 1992), p. 62-100; e Carson, E. “Kant on Intuition in Geometry,” *Canadian Journal of Philosophy* 27 (1997): 489-512. A ideia básica de minha tentativa de reconciliação é embutir a compreensão puramente lógica das construções geométricas (como funções de Skolem) no interior do espaço enquanto forma pura de nossa intuição sensível externa (tal como se descreve na Estética Transcendental).

empíricas – não uma representação que pudesse de alguma maneira ser abstraída de nossas percepções empíricas de objetos espaciais (externos).

O primeiro argumento tenta mostrar que o espaço é uma representação *a priori*, e não empírica, defendendo que toda percepção de objetos (empíricos) externos no espaço pressupõe a representação do espaço:

> O espaço não é um conceito empírico derivado de experiências externas. Pois, para que certas sensações se relacionem a alguma coisa fora de mim (isto é, a alguma coisa em um lugar no espaço distinto daquele em que me encontro), e, de maneira similar, para que eu seja capaz de representá-las como externas e vizinhas umas às outras – e, portanto, não simplesmente como distintas, mas como situadas em lugares distintos – a representação do espaço já deve estar na base disso. Portanto, a representação do espaço não pode ser obtida por meio da experiência a partir das relações dos aparecimentos externos, mas, antes, essa própria experiência externa só é possível, primeiramente, por meio da mencionada representação. (A23/B38)

Este argumento enfatiza que o espaço, enquanto forma do sentido externo, permite-nos representar objetos como situados fora de nós precisamente por representá-los como espacialmente externos ao sujeito que os percebe, de modo que o espaço em questão contém o ponto de vista a partir do qual os objetos do sentido externo são percebidos, e ao redor do qual estão arranjados. A intuição ou percepção espacial empírica ocorre quando um objeto espacialmente exterior ao ponto de vista do sujeito afeta esse sujeito – ao longo de uma linha espacial de visada, por assim dizer – de modo a produzir uma sensação correspondente; e é nesse sentido, portanto, que a forma pura da intuição sensível (espacial) expressa a maneira pela qual somos afetados por objetos espaciais (externos). [20] Chamemos essa estrutura o espaço *perspectivo*.

[20] Veja-se novamente o início da Estética Transcendental (A19-20/B33-34): "De qualquer maneira e por quaisquer meios que uma cognição possa relacionar-se a objetos, aquilo por meio de que ela se relaciona a eles imediatamente, e para o que todo pensamento, enquanto um meio, se dirige, é a *intuição*. Mas isso só ocorre na medida em que o objeto nos é dado – e isso, por sua vez, pelo menos para nós, seres humanos, só é possível na medida em que a mente seja de certo modo afetada. A capacidade (receptividade) de obter representações por meio da maneira pela qual somos afetados por objetos é a *sensibilidade*. … O efeito de um objeto na faculdade da representação, na medida em que somos afetados por ele, é a *sensação*. A intuição que se relaciona ao objeto mediante a sensação é *empírica*. O objeto indeterminado de uma intuição empírica é um *aparecimento*."

O segundo argumento prossegue afirmando que o espaço é uma representação necessária *a priori*, que funciona como uma condição da possibilidade de toda experiência externa:

> O espaço é uma representação necessária *a priori* que está na base de toda intuição externa. Jamais se pode fazer uma representação [do suposto fato] de que não há espaço, embora se possa muito bem pensar que nenhum objeto nele se encontra. Ele deve, portanto, ser visto como a condição de possibilidade dos aparecimentos, e não como uma determinação dependente deles, e é uma representação *a priori*, que necessariamente está na base dos aparecimentos externos. (A24/B38-9)

O cerne deste argumento é que não se pode representar objetos externos sem o espaço, ao passo que se pode pensar esse mesmo espaço como inteiramente vazio de tais objetos. E, visto que o primeiro membro da conjunção pode parecer tautológico, o ônus do argumento é suportado pelo segundo membro. Que significa exatamente, então, representar o espaço como vazio de objetos externos, e, além disso, qual é o contexto preciso em que temos sucesso ao fazê-lo? Uma sugestão bastante natural é que pensamos o espaço como vazio de objetos (empíricos) externos exatamente quando estamos fazendo geometria pura.[21] Em particular, isso se ajustaria muito bem à conclusão de que o espaço funciona, desse modo, como uma condição necessária *a priori* da possibilidade de aparecimentos externos, pois todos eles estariam, então, submetidos à ciência necessária *a priori* da geometria pura.[22]

---

[21] Parsons, *op. cit.* (nota 19), p. 69 apresenta isto como uma ideia “óbvia”, embora não a aceite incondicionalmente.

[22] Este ponto também nos permite responder uma objeção bem conhecida ao primeiro argumento, levantada primeiramente por J. G. Maaß (um colega de Eberhard), segundo a qual não se segue, do fato de que uma representação pressuponha outra, que esta última representação seja *a priori*: para reconhecer objetos vermelhos, por exemplo, deve-se primeiramente ter o conceito de vermelho (e, de maneira mais geral, o conceito de cor), mas é claro que disso não se segue que vermelho (ou cor) seja um conceito *a priori* ao invés de empírico. Veja-se, por exemplo, a discussão dessa objeção em Allison, H. E. *Kant’s Transcendental Idealism* (New Haven: Yale University Press, 1983), p. 82-86. A diferença crucial, acredito, é que temos uma ciência *a priori* necessária do espaço (a geometria), mas não temos uma ciência *a priori* desse tipo em outros casos (como o das cores). Quanto a este ponto, sou grato a Graciela de Pierris pelas discussões sobre os dois primeiros argumentos da Exposição Metafísica; para suas próprias discussões veja-se De Pierris, G. “Geometry in the Metaphysical Exposition,” *in* Gerhardt, V., Horstmann, R.-P. e Schumacher, R. (orgs.), *Kant und die Berliner Aufklärung*, vol. 2 (Berlim: de Gruyter, 2001), p. 197-204.

Qual é a relação precisa entre a estrutura *a priori* atribuída ao espaço no primeiro argumento (espaço perspectivo) e aquela que lhe é atribuída no segundo (a estrutura da geometria pura)? Em primeiro lugar, é natural ver a primeira estrutura como sendo, ela própria, *a priori*, visto que não depende absolutamente dos objetos externos (empíricos) particulares efetivamente percebidos de qualquer ponto de vista particular. Ao contrário, essa estrutura perspectiva é invariante em relação a todas as mudanças tanto nos objetos percebidos quanto no ponto de vista a partir do qual são percebidos, e, nesse sentido, ela expressa desse modo a forma, e não a matéria ou conteúdo, da intuição externa. Em segundo lugar, além disso, essas próprias mudanças possíveis de perspectiva constituem o que hoje tomamos como uma estrutura matemática: a saber, um *grupo* de movimentos ou transformações (euclidianos), compreendendo todas as translações possíveis de nosso ponto de vista inicial através do espaço, e todas as possíveis rotações da perspectiva associada a esse ponto de vista ao redor do ponto dado.[23] Em particular, qualquer objeto espacial perceptível, localizado em qualquer lugar do espaço, pode, desse modo, tornar-se acessível por uma sequência apropriada de tais translações e rotações a partir de qualquer ponto de vista inicial e sua perspectiva associada.

Mas há uma clara conexão entre esta estrutura moderna da teoria de grupos e a geometria no sentido de Kant; pois, como o próprio Kant explicitamente ressalta em sua controvérsia com Eberhard, as duas construções euclidianas fundamentais de traçar uma linha reta e construir um círculo são precisamente geradas por translações e rotações – como quando geramos um segmento de linha pelo movimento (translação) de um ponto e então giramos esse segmento (em um plano dado) em torno de um de seus extremos.[24]

[23] Em um contexto matemático moderno, o conceito de um grupo de movimentos euclidianos rígidos (translações e rotações) não precisa envolver as noções de perspectiva e ponto de vista. Estas últimas foram introduzidas neste contexto por Hermann von Helmholtz e Henri Poincaré, como parte de um programa para explicar como nossos conceitos (matemáticos) de espaço e de geometria podem fundar-se em nossa experiência perceptual efetiva e dela surgir. Meu objetivo aqui é aplicar essas ideias à interpretação da concepção de espaço e geometria de Kant: veja-se a nota 25 abaixo.

[24] Ver Ak. 20, 410-411 (não traduzido por Allison): "[D]iz-se muito corretamente que 'Euclides assume, sem prová-la, a possibilidade de desenhar uma linha reta e traçar um círculo' – o que significa sem provar essa possibilidade *por meio de inferências*. Pois o *traçado*, que tem lugar *a priori* mediante a imaginação segundo uma regra e é chamado construção, é ele próprio a prova da possibilidade do objeto. … Contudo, que a possibilidade de uma linha reta e de um círculo possa ser provada, não *mediatamente* por meio de inferências, mas apenas imediatamente por meio da construção (que não é de modo algum empírica) desses conceitos, deve-se à circunstância de que, dentre todas as construções (apresentações determinadas na intuição *a priori* segundo uma regra), algumas devem ainda ser *as primeiras* – a saber, o *desenho* ou traçado (em pensamento) de uma linha reta e a *rotação* dessa linha em torno de um ponto fixo – não podendo esta última ser derivável da primeira nem de nenhuma outra construção do conceito de grandeza." (NB: Em conformidade com a passagem citada na nota 16 acima, a construção matemática pode apenas demonstrar a possibilidade real do conceito matemático que lhe corresponde contra o pano de fundo da

Na presente interpretação, portanto, é precisamente essa relação entre o espaço perspectivo e o espaço geométrico que liga a teoria kantiana do espaço como forma da intuição externa, ou da percepção, à sua concepção da geometria matemática pura em termos da execução sucessiva de construções euclidianas na imaginação produtiva pura.[25]

A mesma relação entre o espaço perspectivo e o espaço geométrico parece desempenhar um papel central na versão B da Dedução Transcendental das Categorias.[26] Em um passo central do argumento, intitulado "Sobre a aplicação das categorias a objetos dos sentidos enquanto tais" (§ 24), Kant introduz o que ele chama a "síntese figurativa (*synthesis speciosa*)" ou "síntese transcendental da imaginação." Essa síntese estabelece a primeira conexão entre o entendimento, ou a unidade transcendental da apercepção, e a sensibilidade, e, como explica Kant, é, assim "uma ação do entendimento sobre a sensibilidade, e sua primeira aplicação (que é ao mesmo tempo o fundamento de todas as demais) a objetos da intuição que é possível para nós" (B152). Kant prossegue:

> Enquanto figurativa, ela se distingue da síntese intelectual, realizada meramente pelo entendimento, sem nenhum [uso da] imaginação. Na medida em que a imaginação é espontaneidade, chamo-a algumas vezes a imaginação *produtiva*, distinguindo-a com isso da imaginação *reprodutiva*, cuja síntese submete-se apenas a leis empíricas, a saber, as de associação – e que nada contribui, portanto, para a explicação da possibilidade da cognição *a priori*, pertencendo, por essa razão, não à filosofia transcendental, mas à psicologia. (B152)

Dedução Transcendental – um ponto ao qual retornarei abaixo.) Linhas retas e círculos aparecem, desse modo, como o que chamamos as *órbitas* (restritas a uma plano bidimensional qualquer) do grupo euclidiano dos movimentos rígidos no espaço. (Para a construção de um círculo, *cf.* a passagem de A234/B287 citada na nota 10 acima. Para a construção de uma linha, e, de modo mais geral, *cf.* também A162-163/B203-204: "Não posso representar-me uma linha, não importa quão pequena, sem desenhá-la no pensamento, isto é, sem gerar gradualmente todas as suas partes a partir de um ponto. … Nesta síntese sucessiva da imaginação produtiva na geração de figuras está baseada a matemática da extensão (geometria), juntamente com seus axiomas, que expressam as condições da intuição sensível *a priori*, que são as únicas sob as quais pode surgir o esquema de um conceito puro do aparecimento externo.")

[25] Como explicado em Friedman (2000) (nota 19 acima), uma vantagem desta leitura é que ela nos permite então ligar a teoria kantiana da intuição geométrica pura com as discussões posteriores de Helmholtz e Poincaré (que foram conscientemente influenciados por Kant) – embora esteja, é claro, fora de questão atribuir ao próprio Kant uma compreensão explícita da abordagem da geometria em termos da teoria de grupos.

[26] Dei início ao desenvolvimento dessa conexão em Friedman (2000), e também em meu artigo "Transcendental Philosophy and Mathematical Physics," *Studies in History and Philosophy of Science* 34 (2003): 29-43. Indicarei mais à frente os pontos em que corrijo essas explicações iniciais e avanço além delas.

Assim, a síntese da imaginação produtiva pura não apenas é não empírica e *a priori*, mas é também o que Kant denomina transcendental: a saber, constitutiva da *explicação da possibilidade* da cognição *a priori*.[27]

O que é especialmente notável, porém, é como Kant passa em seguida a ilustrar essa síntese transcendental:

> Também observamos isso constantemente em nós. Não podemos pensar nenhuma linha sem *desenhá-la* no pensamento, e nenhum círculo sem *traçá-lo*. Não podemos de modo algum representar as três dimensões do espaço sem *dispor* três linhas em ângulos retos umas às outras a partir de um mesmo ponto. E não podemos representar o próprio tempo sem atentarmos, ao *desenhar* uma linha reta (que deve ser a representação figurativa exterior do tempo), meramente para a ação de síntese do múltiplo mediante a qual determinamos sucessivamente o sentido interno, e, desse modo, para a sucessão dessa determinação nele próprio. O movimento, como ação do sujeito (não como determinação de um objeto*), e assim, a síntese do múltiplo no espaço – quando abstraímos deste e atentamos meramente para a ação pela qual determinamos o sentido *interno* segundo sua forma – [esse movimento] é o que primeiramente produz o conceito de sucessão. (B154-155)

E na nota de rodapé Kant explicitamente liga o movimento no sentido relevante com a descrição imaginativa do espaço subjacente aos axiomas da geometria (na construção de linhas e círculos):

> * O movimento de um *objeto* no espaço não pertence a uma ciência pura; consequentemente, não pertence à geometria. Pois, que algo seja móvel não pode ser conhecido *a priori*, mas apenas por experiência. Mas o movimento, enquanto o *traçado* de um espaço, é um ato puro de síntese sucessiva do múltiplo na intuição externa em geral por meio da imaginação produtiva, e pertence não apenas à geometria, mas até mesmo à filosofia transcendental.

[27] Veja-se o início da Lógica Transcendental em A56/B80-81: "Faço aqui uma observação cuja influência estende-se a todas as considerações subsequentes, e que se deve ter bem em conta, a saber, que nem toda cognição *a priori* deve ser chamada transcendental, mas apenas aquela pela qual conhecemos que e como certas representações (intuições ou conceitos) são aplicadas, ou são possíveis, inteiramente *a priori* (isto é, a possibilidade ou uso *a priori* das cognições). Assim, nem o espaço nem nenhuma determinação geométrica *a priori* do espaço é uma representação transcendental; apenas a cognição de que essas representações não têm de nenhum modo uma origem empírica, e a possibilidade de que elas podem, não obstante, relacionar-se *a priori* a objetos da experiência, pode chamar-se transcendental."

Assim, o movimento, no sentido relevante – o ato puro de síntese sucessiva no espaço enquanto atividade transcendental do sujeito – subjaz à geometria ou a fundamenta, pelo fato de pertencer também à consideração "metafísica" do espaço característica da filosofia transcendental.[28]

Mas qual é, precisamente, a conexão entre a síntese transcendental da imaginação, enquanto "uma ação do entendimento sobre a sensibilidade", e a consideração "metafísica" do espaço na Estética Transcendental? O argumento conclusivo da Dedução B, intitulado "Dedução transcendental do emprego universalmente possível na experiência dos conceitos puros do entendimento" (§ 26), depende crucialmente dessa conexão:

> Temos *a priori formas* da intuição sensível externa e interna nas representações do espaço e do tempo, e a síntese de apreensão do múltiplo de aparecimentos ["mediante a qual a percepção se torna possível"] deve sempre concordar com elas, pois só segundo essa forma ela pode ter lugar. Mas espaço e tempo são representados *a priori*, não meramente como *formas* da intuição sensível, mas como *intuições* eles próprios (que contêm um múltiplo) e assim [representados *a priori*] juntamente com a determinação da *unidade* desse múltiplo (veja-se a Estética Transcendental*). Portanto, a *unidade da síntese* do múltiplo, fora de nós ou em nós, e, assim, uma *combinação* com a qual tudo que deve ser representado como determinado no espaço e tempo deve concordar, está ela própria já dada simultaneamente a essas intuições (e não nelas). Mas essa unidade sintética não pode ser outra senão a da combinação do múltiplo de uma *intuição em geral* dada em uma consciência original, segundo as categorias, só que aplicada à nossa intuição sensível. (B160-161)

[28] De acordo com a passagem principal do texto em B154-155, a síntese transcendental da imaginação não apenas fundamenta a ciência da geometria (em termos do traçado de uma linha reta e de um círculo), mas também o conceito de *sucessão* e aquilo que Kant denomina a "doutrina geral do movimento" (B48-49). *Cf.* B291-292: "Como pode … ser possível que um estado oposto siga-se a um dado estado de uma mesma coisa não apenas é inconcebível a qualquer razão, sem um exemplo, mas não é sequer compreensível sem uma intuição – e essa intuição é o movimento de um ponto no espaço cuja existência em diferentes lugares (enquanto sucessão de determinações opostas) é unicamente o que, em primeiro lugar, torna essa alteração intuitiva para nós. Pois, para que possamos posteriormente tornar pensáveis mesmo as alterações internas, devemos tornar o tempo, enquanto forma do sentido interno, inteligível figurativamente como uma linha, e a alteração interna pelo traçado dessa linha (movimento), e, desse modo, a existência sucessiva de nós mesmos em diferentes estados por uma intuição externa." Assim, a síntese transcendental da imaginação explica também a possibilidade da física matemática: para discussões adicionais veja-se Friedman (2003) (nota 26 acima).

Kant quer mostrar aqui que todos os objetos possíveis de nossa intuição espaço-temporal estão necessariamente subordinados à unificação transcendental de todas as representações em uma consciência segundo as categorias, e ele o faz apelando à unidade do espaço e do tempo eles próprios, como já estabelecida na Estética. Qual é, então, precisamente a conexão, devemos agora perguntar, entre a unidade do espaço e tempo eles próprios e as atividades de síntese do entendimento (via a síntese transcendental da imaginação)?

Kant explica em uma nota de rodapé a esta passagem, que é extraordinariamente difícil até mesmo para os padrões kantianos:

> *O espaço representado como um *objeto* (como efetivamente se requer em geometria) contém mais que a mera forma da intuição – a saber, [ele contém] o [ato de] *agregar* [*Zusammenfassung*] o múltiplo, dado segundo a forma da sensibilidade, em uma representação *intuitiva*, de tal modo que a *forma da intuição* fornece meramente um múltiplo, mas a *intuição formal* fornece [também] a unidade da representação. Na Estética, tomei essa unidade [como pertencendo] à sensibilidade, apenas a fim de observar que ela precede todos os conceitos, embora de fato pressuponha uma síntese que não pertence aos sentidos, mas através da qual todos os conceitos de espaço e tempo se tornam em primeiro lugar possíveis. Pois, dado que através dela (na medida em que o entendimento determina a sensibilidade) o espaço e tempo são primeiramente *dados*, a unidade dessa intuição *a priori* pertence ao espaço e tempo, e não ao conceito do entendimento (§24).

Dois pontos são especialmente misteriosos aqui. De um lado, é tarefa do terceiro argumento da Exposição Metafísica do Espaço (na segunda edição) mostrar que a unidade característica do espaço não pode ser uma unidade *conceitual*.[29] Pareceria,

[29] Veja-se A24/B39: “O espaço não é um conceito discursivo, ou, como se diz, um conceito universal de relações de coisas em geral, mas uma intuição pura. Pois, em primeiro lugar, só podemos nos representar um espaço singular [*einigen*], e, se falamos de muitos espaços, entendemos com isso apenas as partes de um único e mesmo [*alleinigen*] espaço. Essas partes não podem preceder o espaço único que tudo abrange [*einigen allbefassenden*], como se fossem seus constituintes (a partir dos quais sua composição seria possível); mas só podem ser pensadas *nele*. Ele é essencialmente singular [*einig*]; o múltiplo nele, e o conceito geral de espaços enquanto tal, baseia-se apenas em limitações. Disso se segue que uma intuição *a priori* (que não é empírica) subjaz a todos os conceitos de espaço.” Assim, o espaço não é uma representação conceitual porque, em primeiro lugar, só há necessariamente um único indivíduo particular caindo sob ele, e, em segundo lugar, as partes do espaço – diferentemente das partes (marcas) de um conceito – não são “constituintes (a partir dos quais sua composição seria possível).” Uma assimetria relacionada entre a estrutura todo-parte de conceitos e de intuições subjaz ao quarto argumento que se segue imediatamente: veja-se a nota 13 acima, juntamente com o parágrafo ao qual está anexada.

portanto, que essa unidade deve ser intuitiva, ao invés de intelectual – mas então, como pode essa unidade distintamente intuitiva ilustrar as atividades de síntese do *entendimento*? Por outro lado, se a síntese responsável pela unidade do espaço (e do tempo) pertence ao entendimento, por que ela "precede todos os conceitos"? E por que, em particular, a unidade em questão pertence "ao espaço e tempo, e não ao conceito do entendimento"?

A interpretação acima da distinção entre espaço metafísico (isto é, perspectivo) e espaço geométrico, tal como articulada na controvérsia com Eberhard, ajuda-nos a responder essas questões. O espaço metafísico – o espaço de nossa forma pura da intuição sensível externa – consiste na totalidade de perspectivas possíveis a partir das quais o sujeito pode ser afetado por objetos externos. O que unifica essa totalidade em um espaço "único que tudo abrange", portanto, é a unidade transcendental da apercepção, que implica que qualquer objeto externo possível é em princípio perceptível pelo *mesmo* sujeito – mediante uma sequência apropriada de translações e rotações a partir de uma perspectiva inicial particular qualquer.[30] Esse espaço singular infinito e oniabrangente fundamenta, então, a possibilidade de construções geométricas baseadas, como vimos, em nossa capacidade de desenhar, na intuição pura, uma linha pela translação de um ponto, e de girar essa linha (em um plano) em torno de um de seus extremos.[31] O exercício dessa capacidade, por sua vez, é uma expressão da síntese transcendental da imaginação, que é "uma ação do entendimento sobre a sensibilidade, e sua primeira aplicação (sendo ao mesmo tempo fundamento de todas as demais) a objetos da intuição que é possível para nós" (B152). Assim, a síntese responsável pela unidade e singularidade características do espaço (enquanto forma pura da intuição sensível

[30] É assim que interpreto o terceiro argumento da Exposição Metafísica (nota 28 acima). E é ao explicar a unidade e singularidade características do espaço em termos do que chamo espaço perspectivo, e, portanto (no final das contas), em termos da unidade transcendental da apercepção, que minha posição difere das explicações dessa unidade característica oferecidas por Parsons e Carson (veja-se a nota 19 acima). Em particular, não tomo essa unidade "que tudo abrange" como um fato quase perceptível, mas fundamento-a na condição anterior de que todos os objetos externos possíveis sejam perceptíveis, em princípio, pelo mesmo sujeito que percebe. Para uma discussão adicional, veja-se Friedman (2000).

[31] Ver as notas 23, 24 e 25, juntamente com os parágrafos aos quais estão anexadas. Que as "limitações" mencionadas na penúltima sentença da passagem em A24/B39 citada acima (nota 29) envolvem construções geométricas é sugerido pela sua continuação imediata (*ibid.*): "Assim, também, todos os princípios geométricos, p. ex., que em um triângulo dois lados em conjunto são sempre maiores que o terceiro, nunca se derivam dos conceitos universais de linha e triângulo, mas sim da intuição, e, de fato, [derivam-se dela] *a priori* com certeza apodítica." Como vimos (no parágrafo ao qual está anexada a nota 3 acima), Kant está se referindo aqui à Proposição I.20 de Euclides.

externa) pertence de fato ao entendimento. Não se segue, contudo, que a unidade em questão seja uma unidade *conceitual*.

Pois, em primeiro lugar, essa "ação do entendimento sobre a sensibilidade" precede todas as construções geométricas particulares, e, com isso, todos os espaços particulares (regiões espaciais) – dado que estes são construídos *dentro* do espaço singular, oniabrangente e infinito da intuição pura por uma sequência indefinidamente extensível (mas sempre finita) de atos particulares da imaginação produtiva pura. Em segundo lugar, portanto, a síntese transcendental original da imaginação responsável pela unidade e singularidade características do espaço também precede todos os conceitos geométricos (de triângulo, círculo, etc.), dado que esses conceitos são "gerados" por construções geométricas particulares de acordo com seus esquemas.[32] Em terceiro lugar, por fim, a mesma síntese original precede todas as categorias (esquematizadas) ou conceitos puros do entendimento, e precede, portanto, todos os conceitos esquematizados, quaisquer que sejam, dado que cada um deles tem seu próprio esquema particular na intuição pura (enquanto uma particular "determinação transcendental do tempo") – nenhum dos quais são idênticos à "ação do entendimento sobre a sensibilidade" que primeiramente fornece ao espaço e tempo sua unidade e singularidade características.[33] A síntese original

[32] Sou grato, aqui, a uma iluminadora conversa com Vincenzo de Risi. Que construções geométricas "geram" o conceito construído está explicitamente afirmado em A234/B287 (*cf.* notas 10 e 25 acima). Veja-se também a passagem da controvérsia com Eberhard citada no parágrafo ao qual está anexada a nota 18 acima. Kant afirma ali, em primeiro lugar, que o espaço metafísico (por ser singular) "não pode ser subsumido a nenhum conceito capaz de construção, mas contém, ainda assim, o fundamento da construção de todos os conceitos geométricos possíveis", e, em segundo lugar, que "nessa forma de intuição, enquanto representação singular, a possibilidade de todos os espaços, que procede ao infinito, está *dada*." Assim, Kant explicita, aqui, a relação entre a singularidade do espaço como forma pura (oniabrangente) da intuição externa, a pluralidade de suas partes (regiões espaciais confinadas), e a construção geométrica – relações que estão apenas implícitas no terceiro argumento da Exposição Metafísica (*cf.* nota 30 acima). Ele esclarece, portanto, o sentido em que a unidade característica do espaço metafísico precede todos os conceitos geométricos.

[33] Kant introduz a noção do esquema de um conceito puro do entendimento do seguinte modo (A138-139/B177-178): "O conceito do entendimento contém a unidade sintética pura do múltiplo em geral. O tempo, enquanto condição formal do múltiplo do sentido interno, e, assim, da conexão de todas as representações, contém um múltiplo *a priori* na intuição pura. Ora, uma determinação transcendental do tempo é homogênea à *categoria* (que constitui a unidade dessa determinação) na medida em que é *universal* e baseia-se em uma regra. Mas, por outro lado, ela é homogênea ao *aparecimento*, na medida em que o *tempo* está contido em toda representação empírica do múltiplo. Portanto, uma aplicação da categoria a aparecimentos torna-se possível por meio da determinação transcendental do tempo, que, como esquema do conceito do entendimento, medeia a *subsunção* deste último ao primeiro." Dado que esta passagem caracteriza o tempo como uma condição "formal", e ressalta que, enquanto tal, ele "contém um múltiplo *a priori* na intuição pura", uma comparação com o crucial argumento em B160-161 citado acima (no parágrafo seguinte ao que remete à nota 27) sugere que o tempo em questão não é meramente a forma da intuição (interna), mas é também a própria *intuição* (singular) – *intuição formal* –, representada "com a

responsável por essa unidade não expressa o esquema de nenhuma categoria particular, mas antes o que poderíamos chamar o esquema da própria unidade transcendental da apercepção.[34] Portanto, embora represente uma determinação da sensibilidade pelo entendimento, "a unidade dessa intuição *a priori*" de fato "pertence ao espaço e tempo, e não ao *conceito* do entendimento" (meu itálico). A unidade em questão é efetivamente intelectual, mas é, não obstante, característica de uma representação intuitiva, e não conceitual.[35]

---

determinação da *unidade* desse múltiplo." Essa explicação do esquema de um conceito puro do entendimento parece, portanto, pressupor que já ocorreu a unificação determinada do tempo pela síntese transcendental da imaginação. (Note-se, contudo, que o que algumas vezes se chama as categorias "puras" ou "não esquematizadas" – diferentemente de conceitos *sensíveis* puros – ainda têm um significado independentemente de sua esquematização, embora esse significado não tenha nenhum uso na cognição dos fenômenos: só as categorias esquematizadas têm o que Kant chama, em A238-249/B297-299, um "uso empírico.")

[34] *Cf*. a discussão de Kant do esquema da categoria (ou categorias) de quantidade ou grandeza em A142-143/B182: "A pura imagem de todas as grandezas (*quantorum*) para o sentido externo é o espaço; a de todos os objetos dos sentidos em geral, contudo, é o tempo. Mas o puro *esquema* de *grandeza* (*quantitatis*), enquanto um conceito do entendimento, é o *número*, que é uma representação que abrange a sucessiva adição um a um ([dos elementos] do homogêneo). Portanto, o número nada mais é que a unidade da síntese do múltiplo de uma intuição homogênea em geral, na medida em que eu gero o próprio tempo na apreensão da intuição." A partir dessa passagem, vemos que o esquema (regra para a determinação do tempo) associado à categoria (ou categorias) de quantidade ou grandeza não é a representação de um espaço ou tempo singulares, mas a representação de *número*. Vemos também que as representações de espaço e tempo singulares são *imagens* (em oposição a esquemas) que correspondem à categoria (ou categorias) em questão. Como Kant também diz que "o esquema de um conceito puro do entendimento é algo que não se pode reduzir a nenhuma imagem" (A142/B181), essas imagens não podem ser o produto do esquema de nenhuma categoria, mas são, antes, os produtos da síntese transcendental original da imaginação – que resulta no espaço dado ou apresentado como aquilo que denominei espaço perspectivo, e no tempo dado ou apresentado "sob a imagem de uma linha, na medida em que a traçamos, um modo de apresentação sem o qual não poderíamos de modo algum conhecer a unidade de sua medida ou dimensão [*Einheit ihrer Abmessung*]" (B156). Para uma discussão perspicaz e iluminadora da difícil passagem em A142-143/B182 (a qual, entretanto, não estou seguindo inteiramente aqui), veja-se Sutherland, D. "The Role of Magnitude in Kant's Critical Philosophy," *Canadian Journal of Philosophy* 34 (2004): 411-442, § III.

[35] Em particular, as assimetrias que Kant ressalta entre representação intuitiva e representação conceitual no terceiro e quarto argumentos da Exposição Metafísica do Espaço (veja-se novamente a nota 28 acima) estão todas mantidas. E, com base nisso, posso agora indicar onde a presente explicação ultrapassa e corrige minhas discussões anteriores em Friedman (2000) e Friedman (2003) (veja-se nota 26 acima). Com respeito ao primeiro texto (*op. cit.*, p. 198-199), é crucial distinguir (como vimos) entre a afirmação de que a unidade (singular) característica do espaço e tempo é, ou envolve, uma unidade *intelectual* (na medida em que resulta de "uma ação do entendimento sobre a sensibilidade") e a afirmação de que ela é ou envolve uma unidade *conceitual* (que depende da unidade ou generalidade característica de um conceito). Que a unidade intuitiva em questão "depende diretamente da unidade de consciência" *não* implica que ela seja "uma unidade conceitual" (contrariamente ao que digo na p. 198). Com respeito ao segundo texto (*op. cit.*, p. 39-41), é simplesmente um erro afirmar (contrariamente ao que está na p. 40) que a referência à Estética Transcendental em B160-161 é às exposições transcendentais *e não às* exposições metafísicas do espaço e tempo. Ao contrário, a referência é de fato, principalmente, às exposições metafísicas (especialmente ao terceiro argumento, no caso do espaço); e o conhecimento sintético *a priori* cuja possibilidade é explicada nas exposições transcendentais (a geometria e a "doutrina geral do movimento", respectivamente) funda-se

Seja como for, é precisamente o argumento da Dedução Transcendental (tal como apresentado no § 26 da edição B) que permite agora a Kant afirmar que a geometria matemática pura é necessariamente aplicável a todos os possíveis objetos da percepção empírica – de modo que "[a] síntese de espaços e tempos, enquanto forma essencial de toda intuição, é o que, ao mesmo tempo, torna possível a apreensão do aparecimento, e, com isso, toda experiência externa, [e], portanto, toda cognição de seus objetos; e o que a matemática em seu emprego puro demonstra em relação à primeira vale necessariamente também para esta última" (A165-166/B206). E é precisamente esse argumento que subjaz à explicação que Kant oferece mais à frente para essa mesma afirmação (A224/B272): "[Q]ue o o espaço seja uma condição formal *a priori* de experiências externas; que precisamente a mesma síntese formadora de imagens [*bildende*] pela qual construímos um triângulo na imaginação seja completamente idêntica àquela que exercemos na apreensão de um aparecimento para fazermo-nos um conceito empírico deste – é apenas isto que conecta esse conceito [de um triângulo] com a possibilidade [real] de tal coisa."[36]

A necessidade urgente de estabelecer esse resultado situa Kant em um ambiente intelectual completamente diferente do das antigas escolas gregas de Platão e Aristóteles, que formavam o contexto em que foram formulados os *Elementos* de Euclides. Pois é característico da nova concepção da matemática que surge no século XVII que a geometria matemática pura passa a ser tomada como o fundamento de todo conhecimento da realidade física. Começando com Descartes, a geometria matemática pura é entendida como descrevendo, em princípio, as propriedades e interações mais fundamentais da matéria; e, nesse sentido, o espaço físico e o espaço geométrico (isto é, o espaço euclidiano) passam a ser considerados idênticos. A própria compreensão de Kant dessa ideia, como sugeri, está moldada pela controvérsia entre Newton e Leibniz – na qual ambos tomaram a geometrização da natureza como um fato consumado, embora reagissem a isso de maneiras radicalmente diferentes. Newton entendia a situação de maneira completamente literal: o espaço e o tempo "matemáticos" – espaço e tempo "verdadeiros" ou "absolutos" – constituem a estrutura ontológica fundamental de toda a realidade. Até mesmo Deus, ele próprio, é necessariamente espacial e temporal (existindo

---

ou se explica precisamente pelas estruturas prévias (singulares e unitárias) do espaço e tempo articuladas nas exposições metafísicas. Isto aproxima minha posição ainda mais da defendida em Carson (1997), embora ainda seja essencialmente diferente dela (ver nota 29 acima).

[36] Veja-se a nota 16 acima, juntamente com o parágrafo à qual está anexada.

sempre e em toda parte), e todos os objetos físicos ou materiais são então criados e "movidos", nas palavras de Newton, no interior do "sensório uniforme e infinito" de Deus.[37]

Para Leibniz, ao contrário, o inteiro mundo físico descrito pela nova ciência matemática (incluindo-se o espaço no qual os corpos se movem) é um aparecimento secundário ou um fenômeno de uma realidade metafísica subjacente constituída de substâncias simples ou mônadas – substâncias que, nesse nível, não são de modo algum espaciais, mas têm apenas propriedades puramente internas e nenhuma relação externa. E este ponto, por sua vez, conecta-se estreitamente ao fato de que Leibniz adere conscientemente à ideia de que o conhecimento puramente intelectual é essencialmente lógico. Pois, embora Leibniz pareça ter vislumbrado algum tipo de extensão da lógica aristotélica capaz de englobar os novos métodos algébricos de seu cálculo, não há dúvida de que a tradicional estrutura de sujeito-predicado dessa lógica permeia sua metafísica monádica: é precisamente porque a realidade metafísica última é essencialmente intelectual no sentido lógico que o inteiro mundo sensível, incluindo-se o espaço, é uma realidade meramente secundária, ou fenômeno.[38] Assim, embora Leibniz, como todos os demais à época, sustente que há leis matemáticas governando o mundo sensível e material (o mundo fenomênico), ele reintroduz um novo tipo de lacuna necessária – um

[37] A famosa discussão de Newton sobre o espaço e tempo "absolutos", "verdadeiros" e "matemáticos" ocorre no Escólio às Definições dos *Principia*. Este, juntamente com outros textos relevantes, pode ser encontrado em Janiak, A. (org.), *Isaac Newton: Philosophical Writings* (Cambridge: Cambridge University Press, 2004). Em particular, Newton desenvolve sua concepção metafísica de espaço e a relação deste com Deus de maneira mais completa no manuscrito *De Gravitatione*, onde, sob influência do platonismo cambridgeano de Henry More, diz que o espaço não é nem uma substância nem um acidente, mas antes "um efeito emanativo de Deus e uma afecção de todo tipo de existência" (Janiak, *op. cit.*, p. 21). No Escólio Geral aos *Principia*, Newton escreve (p. 91): "[Deus] persiste sempre e está presente em toda parte, e por existir sempre e em toda parte ele constitui a duração e o espaço." E, na Questão 31 da *Óptica*, Newton argumenta (p. 138): "[Estes fenômenos naturais] não podem ser o efeito de nada senão da Sabedoria e Habilidade de uma Agente poderoso e eternamente vivo, que, estando em todos os Lugares, é mais capaz de mover os Corpos pela sua Vontade no interior de seu Sensório infinito e uniforme, e com isso formar e reformar as Partes do Universo, do que somos capazes, pela nossa Vontade, de mover as Partes de nossos próprios Corpos." Para uma discussão adicional da metafísica newtoniana do espaço, em relação a Descartes, Leibniz e Kant, veja-se meu "Newton and Kant on Absolute Space: From Theology to Transcendental Philosophy," *in* Bitbol, M., Kerszberg, P. e Petitot, J. (orgs.), *Constituting Objectivity: Transcendental Perspectives on Modern Physics* (Berlim: Springer, 2009), p. 35-50.

[38] Uma substância simples individual, para Leibniz, caracteriza-se por um conceito completo que consiste de uma conjunção infinita de todas as marcas ou conceitos parciais que são (alguma vez) verdadeiros dela, e a metafísica leibniziana de substâncias simples últimas está assim intimamente ligada a seu compromisso com a lógica tradicional dos conceitos. Precisamente porque rejeita a possibilidade de um tal conceito completo (para seres humanos pensantes finitos), Kant, como vimos, argumenta que a representação do espaço não pode ser um conceito (*cf.* nota 13 acima, juntamente com o parágrafo ao qual está anexada).

novo tipo de lacuna *platônica* – entre a realidade tal como conhecida pelo intelecto (realidade numenal) e este mundo sensível.

A filosofia do idealismo transcendental de Kant também se baseia em uma dicotomia fundamental entre a realidade enquanto pensada apenas pelo entendimento puro (realidade numenal) e o mundo fenomênico no espaço e no tempo dado a nossos sentidos. Mas Kant difere categoricamente de Leibniz em dois aspectos cruciais. Em primeiro lugar, o conhecimento matemático, para Kant, é sensível, ao invés de puramente intelectual: de fato, a matemática é o próprio paradigma do conhecimento sensível racional e objetivo, resultante do esquematismo de conceitos especificamente matemáticos no interior de nossas formas puras da intuição sensível. Em segundo lugar, e como consequência, só podemos ter conhecimento teórico, para Kant, precisamente desse mundo sensível (fenomênico): a realidade numenal pensada apenas pelo entendimento puro permanece para sempre incognoscível de um ponto de vista teórico, e só podemos ter um conhecimento puramente prático de seus habitantes (Deus e a alma) através da experiência moral.[39] De fato, é precisamente essa necessária limitação de todo conhecimento teórico ao mundo sensível ou fenomênico que resulta em última instância da doutrina kantiana do esquematismo dos conceitos puros do entendimento – limitação que, do ponto de vista de Kant, passou inteiramente despercebida a Leibniz.[40]

A filosofia da geometria de Kant – vista no contexto mais geral de seu idealismo transcendental – combina importantes *insights* tanto de Leibniz como de Newton. Pois, em primeiro lugar, o grande peso que Kant atribui aos aspectos perceptivos e intuitivos

[39] Para uma discussão complementar desse aspecto da perspectiva kantiana, veja-se novamente Friedman (2009) (nota 37 acima), bem como meu “Kant on Science and Experience,” *in* Mercer C. e O’Neill, E. (orgs.) *Early Modern Philosophy: Mind, Matter, and Metaphysics* (Oxford: Oxford University Press, 2005), p. 262-275.

[40] *Cf.* A145-147/B185-187: “Assim, os *esquemas* dos conceitos puros do entendimento são as únicas e verdadeiras condições que conferem a estes últimos uma relação com objetos e, desse modo, um *significado*; e as categorias, portanto, no final das contas, não servem senão para um uso empírico possível, na medida em que servem meramente … para submeter os aparecimentos a regras universais de síntese e torná-los, com isso, apropriados a uma conexão universal em uma experiência. … Categorias sem os esquemas, portanto, representam apenas funções do entendimento para conceitos, mas não representam nenhum objeto. Esse significado lhes advém apenas da sensibilidade, que realiza o entendimento ao mesmo tempo em que o restringe.” Kant está aqui discutindo os esquemas dos conceitos puros do entendimento, não os dos conceitos matemáticos (conceitos puros *sensíveis*). Não obstante, a análise acima apresentada do argumento central da Dedução Transcendental B implica que os esquemas dos conceitos matemáticos também estão envolvidos no esquematismo das categorias, dado que a síntese transcendental original da imaginação responsável pela unidade e singularidade características do espaço e do tempo funda com isso a possibilidade tanto da ciência da geometria como da “doutrina geral do movimento” (ver notas 28 e 35 acima).

da geometria (e, de maneira mais geral, da matemática) corresponde à abordagem de Newton, em oposição à abordagem lógico-algébrica de Leibniz. E, em segundo lugar, a nítida distinção kantiana entre as faculdades do intelecto e da sensibilidade, juntamente com sua distinção paralela igualmente nítida entre o raciocínio lógico ou discursivo e o raciocínio matemático ou intuitivo, surgem precisamente no contexto da concepção leibniziana do intelecto puro, e têm como alvo, mais especificamente, a doutrina de Leibniz de que a matemática pura (incluindo a geometria) é, no sentido kantiano, analítica –, isto é, dependente apenas de relações de inclusão conceitual no quadro da tradicional lógica de conceitos. Não obstante, Kant aceita a caracterização leibniziana do intelecto puro em termos dessa mesma lógica tradicional, e seu conflito com Leibniz acerca da matemática pura é simplesmente que o intelecto puro, caracterizado dessa maneira, não se mostra, no fim das contas, à altura da tarefa.[41] É precisamente por essa razão, na perspectiva de Kant, que o entendimento puro deve ser aplicado a – ou esquematizado em termos de – uma segunda faculdade racional que tome como modelo o espaço absoluto newtoniano – não mais concebido em termos do sensório divino de Newton, mas, antes, enquanto uma forma pura de nossa faculdade humana da sensibilidade.[42]

Assim, a maneira característica pela qual Kant concebe a geometria e a intuição espacial responde às preocupações intelectuais fundamentais de Leibniz e de Newton, ao mesmo tempo em que rejeita as ambições metafísicas e teológicas de ambos os autores. Kant rejeita a perspectiva teológica de Leibniz ao recusar sua concepção de um conceito completo (infinitário) como inacessível à nossa cognição humana (necessariamente finita); e é precisamente por essa razão, na perspectiva de Kant, que o espaço deve ser

[41] O argumento de Kant para isto, como vimos, depende de sua rejeição da possibilidade de conceitos leibnizianos completos (para seres pensantes humanos finitos), e, portanto, depende em última análise do fato de que Kant entende a tradicional lógica de conceitos de um modo muito mais limitado do que o próprio Leibniz (*cf*. nota 38 acima).

[42] Para Newton, Deus, por sua onipresença imediata através de todo o espaço, faz com que toda matéria obedeça às leis do movimento por um ato criativo de sua vontade. Para Kant, é nosso entendimento humano (não o entendimento divino) que se autoinjeta em nossas formas puras da sensibilidade (não nas de Deus), e, ao mesmo tempo, faz com que (precisamente pelo esquematismo das categorias) as substâncias materiais ou fenomênicas obedeçam necessariamente às leis newtonianas do movimento. Para uma discussão adicional, veja-se novamente Friedman (2009). Isto ocorre porque o esquematismo das categorias, como dissemos, está intimamente ligado tanto à ciência matemática da geometria quanto à nova física matemática (newtoniana) (veja-se novamente as notas 28 e 40 acima). E este ponto, por sua vez, liga-se ao fato de que os esquemas das categorias são determinações do *tempo* (nota 33 acima), e que o tempo, enquanto uma "imagem pura", é intuitivamente apresentado pelo *movimento* de um ponto no espaço no traçado de uma linha reta (notas 28 e 34 acima).

uma forma pura da intuição sensível e não algum tipo de representação conceitual (*cf.* nota 38 acima). Somente assim, pensa Kant, *nosso* conhecimento *a priori* da estrutura geométrica do espaço pode tornar-se inteligível. Do mesmo modo, Kant rejeita a perspectiva teológica de Newton ao insistir que a estrutura matemática da natureza deve-se em última análise à ação de *nosso* intelecto puro (e não do intelecto divino) sobre nossas formas puras da intuição sensível. A concepção newtoniana de espaço como sensório divino, para Kant, é completamente impossível.[43]

Portanto, em uma passagem famosa da Estética Transcendental, Kant descreve sua concepção do espaço e do tempo enquanto formas puras de nossa intuição sensível como combinando as vantagens das concepções de Leibniz e Newton, ao mesmo tempo em que evita suas respectivas desvantagens:

> Os [newtonianos] ganham ao abrir para as asserções matemáticas o campo dos aparecimentos. Por outro lado, precisamente essas condições trazem-lhes muita confusão quando o entendimento pretende estender-se para além desse campo. Os [leibnizianos] ganham muito nesse último aspecto, a saber, as representações de espaço e tempo não se intrometem quando eles querem fazer juízos sobre objetos, não enquanto aparecimentos, mas meramente em relação ao entendimento; contudo, eles não podem fornecer nem uma explicação da possibilidade de cognições matemáticas *a priori* (na medida em que não dispõem de uma intuição *a priori* verdadeira e objetivamente válida) nem colocar as proposições empíricas em um acordo necessário com essas asserções [matemáticas]. Em nossa teoria da verdadeira constituição dessas duas formas originais da sensibilidade, ambas as dificuldades são remediadas. (A40-41/B57-58)

[43] Kant está particularmente interessado, na Estética Transcendental da segunda edição, em dar destaque ao fato de que sua concepção do espaço e tempo como formas puras da sensibilidade é a única alternativa real à (teologicamente impossível) perspectiva newtoniana (B71-72): "Na teologia natural, onde se pensa um objeto que não apenas não é nenhum objeto da intuição sensível para nós, mas não pode sequer ser um objeto da intuição sensível para si próprio, toma-se o cuidado de remover as condições do espaço e tempo de toda sua intuição (pois toda sua cognição deve ser intuição e não *pensamento*, que é sempre uma manifestação de limitações). Mas com que direito pode-se fazer isso se se tiver previamente tomado ambos como formas das coisas em si mesmas – e, de fato, formas que, enquanto condições *a priori* da existência das coisas, permanecem mesmo quando as próprias coisas são aniquiladas? (Pois, enquanto condições de toda existência em geral, eles devem ser também condições da existência de Deus.) Não há, pois, alternativa, caso não se pretenda fazer deles formas objetivas de todas as coisas, exceto tomá-los como formas subjetivas de nosso modo externo e interno de intuição. [Esse tipo de intuição] é chamada sensível, porque *não é original* – isto é, não é tal que a própria existência dos objetos da intuição seja dada por meio dela (o que, tanto quanto podemos compreender, só pode pertencer ao ser primordial), mas depende da existência dos objetos e só é possível, portanto, na medida em que a faculdade representativa do sujeito é por eles afetada."

Kant evita com isso os absurdos gêmeos de, por um lado, tomar o espaço e o tempo como sendo "duas não-entidades [*Undinge*] eternas e infinitas subsistindo em si mesmas, que existem (sem que sejam algo real) apenas para conter em si toda a realidade", ou, de outro lado, "relações de aparecimentos (um ao lado do outro, ou um após o outro) abstraídas da experiência, embora confusamente representadas nessa abstração" (A39/B56). A passagem citada acima representa, assim, a culminação do argumento principal da Estética Transcendental.[44]

Estamos agora em condições de entender mais plenamente por que as interpretações diagramáticas dos *Elementos* de Euclides oferecidas por Manders e Shabel não são adequadas como interpretações da concepção kantiana da geometria e da intuição espacial. Como vimos, embora um diagrama físico real empiricamente desenhado (ainda que mal desenhado) *possa* funcionar como uma intuição pura kantiana no contexto de uma prova geométrica efetivamente realizada, isso só pode ocorrer, para Kant, se o diagrama empírico em questão for desenhado *de acordo com* uma construção prévia na intuição pura pela imaginação produtiva pura (*cf*. nota 16 acima). A razão mais fundamental para isso, como vemos agora, é que Kant tem uma agenda filosófica muito mais ambiciosa do que simplesmente prover uma explicação satisfatória do procedimento euclidiano de prova. Em particular, as atividades construtivas características da imaginação produtiva pura são invocadas não apenas para explicar o que Kant considera como o paradigma da geometria matemática pura (a saber, os *Elementos*), mas também para explicar como – mediante a síntese transcendental original da imaginação que fundamenta a realidade objetiva das categorias – tanto o próprio espaço como a natureza física no espaço necessariamente adquirem sua estrutura matemática objetiva.

As interpretações diagramáticas dos *Elementos* de Euclides derivadas de Manders, ao contrário, têm objetivos explanatórios mais modestos. Elas pretendem explicar como o raciocínio por meio de diagramas físicos individuais, efetivamente traçados no quadro-

[44] A Estética começa (na discussão do espaço) indicando três alternativas (A23/B37-38): "Ora, o que são o espaço e o tempo? São eles seres reais? São apenas determinações ou mesmo relações de coisas, mas de modo tal que pertenceriam a estas mesmo tomadas em si mesmas, mesmo se não fossem intuídas? Ou são tais que se ligam unicamente à forma da intuição, e, assim, à constituição subjetiva de nossa mente, sem o que esses predicados não podem ser atribuídos a coisa alguma?" Estas três alternativas – newtoniana, leibniziana e kantiana – formam o quadro de referência para o argumento principal que se segue, culminando na passagem citada acima. Após essa passagem, Kant acrescenta um conjunto de "Observações Gerais à Estética Transcendental" que resumem e comentam o argumento principal. Há, na segunda edição, quatro comentários desse tipo, dos quais o primeiro é comum a ambas as edições e os três últimos foram acrescentados apenas na segunda. O comentário sobre a teologia natural, citado na nota 42 acima, é a última dessas observações.

negro ou no papel, podem assegurar a generalidade e necessidade da geometria de Euclides – apesar do óbvio fato de que esses diagramas são, não apenas particulares, como também imprecisos. A explicação procede em termos da distinção fundamental introduzida por Manders entre aspectos "exatos" e "co-exatos" de diagramas efetivamente desenhados (*grosso modo*, entre seus aspectos métricos e topológicos), e não há absolutamente nenhuma necessidade de afirmar que os "planos" sobre os quais esses diagramas são realizados sejam planos euclidianos precisos – e menos ainda que o espaço físico tridimensional em que nós vivemos, movemo-nos e temos nossa existência seja, ele próprio, precisamente euclidiano.[45] Assim, a descoberta de que, segundo a teoria da relatividade geral, o espaço físico à nossa volta é apenas aproximadamente euclidiano, não representa nenhuma ameaça ao programa de Manders. Contudo, como vimos, a teoria de Kant da construção na intuição pura visa explicar como sabemos – e sabemos *a priori* – que o espaço físico é precisamente euclidiano; e visa explicar isso, como também vimos, exatamente pela mesma atividade de construção na intuição pura que assegura a generalidade e necessidade dos *Elementos* de Euclides. Esse é o sentido, como afirmei no início, em que as interpretações diagramáticas dos *Elementos* no estilo de Manders podem, na melhor das hipóteses, capturar apenas uma *parte* do que está envolvido na concepção de Kant da geometria.[46]

---

[45] Como Manders explica em "Diagram-Based Geometric Practice," *op. cit.*, p. 70-71, há hoje duas abordagens para reconstruir o raciocínio diagramático euclidiano baseadas na distinção entre aspectos *exatos* e *co-exatos* dos diagramas: a abordagem original de Manders, que toma os diagramas em questão como objetos físicos efetivamente desenhados (e usa o que Manders chama "teoria de controle de diagramas" apelando a nossas capacidades e práticas humanas para explicar como é possível a consideração idealizada desses diagramas), e uma segunda abordagem, exemplificada no recente trabalho de Nathaniel Miller e John Mumma, que envolve a construção de rigorosos sistemas formais de raciocínio diagramático nos quais os diagramas aparecem como elementos formais abstratos no interior do sistema (configurações topológicas ou combinatórias) ao lado do texto discursivo (fórmulas linguísticas). Embora Kant não admita objetos matemáticos abstratos em sua concepção (na qual os únicos "objetos", estritamente falando, são objetos ou "aparecimentos" espaçotemporais"), acredito que esta segunda abordagem do raciocínio diagramático está mais próxima em espírito de Kant (para quem, como vimos, "intuições puras" já idealizadas precedem toda percepção de aparecimentos). Espero ter a oportunidade de tratar mais deste assunto em um trabalho futuro.

[46] Como indiquei na nota 15 acima, embora não haja dúvida de que Shabel, em sua dissertação, desenvolva uma interpretação da construção kantiana na intuição pura que está bem próxima do espírito da explicação original de Manders do raciocínio diagramático, ela também visa, em seus trabalhos mais recentes, incorporar essa explicação em uma discussão mais abrangente da teoria kantiana do espaço como forma pura da intuição na Estética Transcendental. Mais uma vez, convido o leitor interessado a comparar (e contrastar) a interpretação que Shabel desenvolve em seus trabalhos mais recentes com a interpretação que desenvolvi aqui – e também convido Shabel a explicar o lugar que ela poderia agora encontrar para o raciocínio diagramático no estilo de Manders em relação a essa mesma interpretação.