

DIAGRAMAS E VISUALIZAÇÃO*

SÉRGIO RICARDO SCHULTZ

*Department of Philosophy
Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea
22453-900 RIO DE JANEIRO, RJ
BRASIL*

sergioschultz@yahoo.com.br

Received: 24.04.2009; Revised: 30.09.2009; Accepted: 23.03.2010

Resumo: No presente trabalho discutiremos a tese segundo a qual provas com diagramas são heterogêneas, i. e., envolvem casos de raciocínio visual. Em uma primeira seção, examinaremos o uso informal de diagramas de *Venn* em provas conjuntistas, procurando determinar em que sentido provas com diagramas seriam heterogêneas. Tais provas supostamente envolveriam raciocínio visual no sentido em que a validade das inferências dependeria de características visualizáveis dos diagramas e não de regras de derivação. Em uma segunda seção, investigaremos quais seriam os aspectos relevantes para a validade das inferências diagramáticas. A seguir, na terceira seção, argumentaremos que a concepção de provas diagramáticas como envolvendo essencialmente um elemento visual apresenta sérios problemas.

Palavras chave: Visualização. Diagramas de *Venn*. Inferência visual. Restrição operacional. Prova.

DIAGRAMS AND VISUALIZATION

Abstract: In the present paper, we will question the thesis according to which proofs with diagrams are heterogeneous, i.e. involve cases of visual reasoning. In the first section, we

* Gostaria de agradecer aos professores Frank Thomas Sautter (UFSM), José Seoane (Udelar - Uruguay), Marco Ruffino (UFRJ), Luiz Carlos Pereira (PUC-Rio), Oswaldo Chateaubriand (PUC-Rio) e, especialmente, Abel Lassalle Casanave (UFSM), por comentários, críticas e sugestões a versões preliminares do presente trabalho. Este texto foi escrito como parte do projeto financiado pelo CNPq de número 455534/2008-5, intitulado *Visualização*, e é uma versão ampliada de Schultz (2009).

will examine the informal use of *Venn's* diagrams in set-theoretical proofs attempting to determine in which sense proofs with diagrams could be heterogeneous. According to our explanation, such proofs would supposedly involve visual reasoning in the sense that the validity of inferences would depend on visual characteristics of the diagrams and not on derivation rules. In a second section, we will investigate which aspects would be relevant for the validity of diagrammatic inferences. In the third section, we will argue that the conception of diagrammatic proofs involving essentially a visual element implies serious problems.

Keywords: Visualization. *Venn's* diagrams. Visual reasoning. Operational constraint. Proof.

Nas últimas décadas as provas com diagramas, tradicionalmente vistas com suspeição, passaram a ter sua legitimidade reavaliada e defendida. Embora os diagramas sejam concebidos por seus defensores como signos, provas com diagramas seriam casos de inferências heterogêneas. Em outras palavras, tais provas envolveriam não só manipulação de signos como também raciocínios baseados na visualização dos diagramas e, deste modo, distinguir-se-iam de provas sentenciais e procedimentos de cálculo como, por exemplo, as tabelas de verdade.¹ Neste trabalho discutiremos esta tese, recusando o papel atribuído à visualização em provas com diagramas.

Em uma primeira seção analisaremos um exemplo de prova diagramática informal procurando esclarecer em que sentido provas deste tipo seriam heterogêneas. Como veremos, provas diagramáticas seriam heterogêneas por envolverem a associação entre a validade das inferências e características visualizáveis dos diagramas. Em uma segunda seção examinaremos quais aspectos supostamente visualizáveis garantiriam a validade das inferências. Tais aspectos seriam as restrições obedecidas pelos diagramas na medida em que estes são objetos visualizáveis. A seguir, na terceira seção, argumentaremos que esta concepção apresenta

¹ Nos referimos aqui, principalmente, a Barwise e Etchemendy (1991) e (1996), Barwise e Hammer (1996), Barwise e Shimojima (1995), Hammer (2002), Lemon e Shin (2003), Shin (1996), Shimojima (1996).

uma série de problemas. Por fim, concluiremos que provas com diagramas não envolvem e nem podem envolver a visualização dos signos de um modo substancial.

Restringir-nos-emos, aqui, a provas diagramáticas informais e as abordaremos enquanto argumentos com os quais provamos coisas para nós mesmos e para os outros. Ou seja, não entrarão em questão as provas enquanto estruturas matemáticas, assim consideradas em teoria da prova.² A razão para isto está em que a formalização de uma prova e sua concepção em termos de uma estrutura matemática envolvem a formulação de regras que dêem conta de todos os passos da prova. Em outras palavras, em uma prova formal, seja ela diagramática ou não, todos os passos são justificados por regras e, portanto, trivialmente, não envolvem visualização em um sentido substancial do termo.³ Além disso, nos restringiremos a consideração de exemplos de provas com diagramas de *Venn*. Embora as provas geométricas euclidianas sejam, junto com diagramas de *Venn* exemplos paradigmáticos de provas diagramáticas, tais provas envolvem uma série de complicações que tornam seu tratamento adequado inviável no espaço deste artigo⁴.

1. Diagramas são usualmente concebidos como signos que representam noções ou estruturas por meio de relações de homomorfismo. Deste modo, que um círculo A com um ' x ' marcado em seu interior represente a pertinência de x a um conjunto A é algo tão visualizável quanto o fato que a expressão " $x \in A$ " represente aquela relação. Em

² Sobre a distinção entre provas idealizadas (concebidas como estruturas matemáticas) e provas como aquilo que usamos para provar coisas (*proofs*), cf. Chateaubriand (2005, cap. 20).

³ O ponto é que uma visualização sujeita a regras não seria visualização. Para exemplos de sistemas formais diagramáticos, cf. Hammer (2002) e os artigos contidos na parte B de Allwein e Barwise (1996).

⁴ Para um tratamento detalhado de provas euclidianas, remetemos o leitor a Manders (1995) e (2008).

ambos os casos temos um objeto visualizável – uma inscrição – que, *sob certa interpretação*, possui tal significado, representa tal conceito ou está por algo. Dada outra interpretação, aquele mesmo diagrama pode representar, por exemplo, que A é o conjunto unitário de x .

Diagramas, como os diagramas de *Venn*, não são instâncias visualizáveis de conceitos, como, por exemplo, poderíamos pensar dos diagramas geométricos. Ainda assim, na literatura sobre o tema antes referida, defende-se que provas diagramáticas de enunciados lógicos e matemáticos envolvem essencialmente a visualização dos diagramas. De que modo, porém, a visualização estaria envolvida nas provas? A fim de responder esta questão, consideremos o seguinte exemplo⁵: queremos provar “ $(C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset) \rightarrow C \cap A = \emptyset$ ”. Para tanto, representamos o antecedente desenhando três círculos parcialmente sobrepostos A , B e C , sombreando o complemento de C com relação a B e sombreando a intersecção dos círculos A e B . Obtemos, assim, o seguinte diagrama:

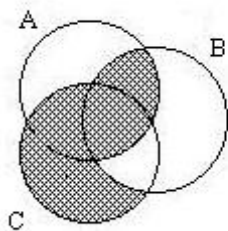


Fig. 1.1

A partir da observação de que a intersecção dos círculos C e A está sombreada, então, extraímos do diagrama a verdade do conseqüente – “ $C \cap A = \emptyset$ ” –, concluindo assim a demonstração.

⁵ O exemplo, assim como a descrição do diagrama como resultando da aplicação de um conjunto de operações, é adaptado de Shimojima (1996, pp. 29-30). No exemplo original, trata-se de um silogismo.

A construção do diagrama acima pode ser pensada como resultando da aplicação das seguintes regras ou operações de desenho:

- (ω_1) Desenhe três círculos parcialmente sobrepostos A , B e C de modo que exista uma única área comum a A e B , B e C , a A e C e a A , B e C e que cada círculo possua uma região que não é comum a nenhum outro;
- (ω_2) Sombreie o complemento de C com relação a B ; e
- (ω_3) Sombreie a intersecção de B e A .

Ao desenhar o diagrama segundo aquelas regras – que nos fornecem o diagrama correspondente a “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ” – desenhamos um diagrama que apresenta a seguinte característica:

- (σ_1) a intersecção (a área comum) de C e A está sombreada, o que pode ser lido como “ $C \cap A = \emptyset$ ”.

Assim, temos uma inferência do conseqüente a partir do antecedente, o que prova o condicional.

Uma diferença fundamental entre provas diagramáticas como a realizada acima e as correspondentes provas sentenciais está, como afirma Seoane, no fato dos termos lógicos desempenharem, de um ponto de vista inferencial, um papel fundamental nas primeiras e bastante reduzido, senão nulo, nas últimas⁶. Desse modo, na prova diagramática acima bastou desenhar o diagrama correspondente a “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ” e então obter ‘de graça’ o conseqüente. Por outro lado, em uma prova sentencial do mesmo resultado, teríamos que fazer uso de uma série de regras de inferência lógica ou nos apoiar em nossa compreensão do significado dos termos lógicos para realizar as inferências.

Além disso, afirma Shimojima (1996), as regras (ω_1) – (ω_3) não parecem ter por conseqüência lógica que a intersecção de A e C deva ser sombreada. Que não possamos desenhar diagramas pelas regras (ω_1) –

⁶ Cf. Seoane (2006). O exemplo usado acima foi adaptado para o caso conjuntistas para salientar o contraste entre provas diagramáticas e sentenciais em termos do papel desempenhado pelas regras de inferência lógica e do significado dos termos lógicos.

(ω_3) que não apresentam a propriedade (σ_7) seria uma restrição sobre os diagramas devida fundamentalmente ao fato deles serem objetos visualizáveis⁷. Como tal, estas características ou restrições seriam também visualizáveis e substituiriam, em provas diagramáticas, as regras de inferência lógica usadas nas provas sentenciais. Assim, se certa relação entre os diagramas *deve* ser desenhada, então a relação correspondente pode ser inferida como logicamente válida⁸.

Segundo esta concepção, a dedução diagramática de “ $C \cap A = \emptyset$ ” a partir de “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ” poderia ser descrita do seguinte modo. Em primeiro lugar, desenhamos, segundo as regras, o diagrama correspondente a “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ”. A seguir, *visualizamos* o diagrama e percebemos que a intersecção entre A e C está (e *deve* estar) sombreada – i.e., que dele podemos ler “ $C \cap A = \emptyset$ ”. Por fim, associamos a visualização deste fato com a validade da inferência de “ $C \cap A = \emptyset$ ” a partir de “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ” com base na qual concluímos pela verdade do condicional correspondente⁹.

Provas com diagramas, assim, se distinguiriam também de procedimentos de cálculo como as tabelas de verdade e os procedimentos

⁷ Cf. Shimojima (1996, pp. 43-44). Devemos ressaltar que Shimojima considera apenas exemplos de provas com diagramas de *Venn* e diagramas de Euler. No entanto, neste artigo pretende-se fornecer, a partir destas concepções, uma definição *geral* de *free rides*, i. e., de casos nos quais obtemos informações ‘de graça’ a partir de um diagrama. Sobre isto veja também Barwise e Shimojima (1995).

⁸ Cf. Shin e Lemon (2003, seção 3)

⁹ Segundo Barwise e Etchemendy (1991, pp. 9-10), o que faz com que esta suposta prova seja, de fato, uma prova é a existência de um homomorfismo entre as operações de desenho dos diagramas e as operações conjuntistas. Como consequência deste homomorfismo, que o diagrama construído pelas regras (ω_1) – (ω_3) possua a característica (σ_7) significa que a sentença representada por um diagrama desenhado segundo aquelas regras implica a sentença que podemos ler de um diagrama com a característica em questão (cf. Barwise e Etchemendy 1991, p.23).

comuns de soma, subtração, multiplicação e divisão. Nestes procedimentos, apenas manipulamos signos de acordo com regras e então lemos o resultado. A visualização está envolvida somente no sentido trivial no qual para ler os signos precisamos visualizá-los. Por outro lado, uma prova diagramática seria análoga, por exemplo, à inferência na qual partimos da informação de que Anna é a mulher que está na sala conversando com um homem com barba e da visualização de que os dois únicos homens com barba na sala estão conversando com a mesma mulher e concluímos, então, que aquela mulher é Anna. Comentando esta inferência, Barwise e Etchemendy afirmam:

[...] a característica crucial deste exemplo é que a conclusão associa um nome com uma pessoa de um modo que transcende cada domínio individualmente, tanto o lingüístico quanto o visual. Devido a isto, o raciocínio não pode ser modelado de forma precisa por deduções em uma linguagem formal padrão. O análogo sentencial mais próximo a esta conclusão poderia associar um nome com alguma descrição (“Anna é a mulher que...”) antes que com a própria Anna. Alternativamente, poderíamos empregar algum elemento dêitico, demonstrativo ou indexical (“aquela mulher é Anna”), mas de fato não é uma sentença isolada que constitui a conclusão de nosso raciocínio. Somente quando interpretamos o demonstrativo como se referindo a Anna que capturamos o verdadeiro conteúdo de nossa conclusão. (Barwise e Etchemendy 1991, p. 6)

De acordo com esta citação, o que torna a inferência heterogênea é o fato de a conclusão consistir não em uma sentença, mas sim na associação de um objeto visualizado com o signo “Anna”. De modo similar, o que tornaria a prova diagramática heterogênea seria o fato de ela envolver essencialmente a associação de um aspecto visualizado do diagrama com a validade da inferência.

2. Embora provas com diagramas, segundo a concepção acima, sejam análogas a argumentos como aquele acerca de Anna, existem dois aspectos nos quais elas diferem. O primeiro diz respeito a que, na inferência sobre Anna, a situação ou aspecto visualizado é a própria Anna. No caso da prova diagramática é a visualização dos diagramas que repre-

sentam conjuntos que estaria em jogo e não a visualização dos próprios conjuntos. Além disso, e mais importante, o caráter visual do exemplo de Anna diria respeito ao conteúdo da conclusão consistir na associação entre um objeto visualizado e um signo; enquanto que em uma prova de resultados lógicos ou conjuntistas usando diagramas de *Venn*, por sua vez, a visualização de um determinado aspecto do diagrama seria associada com a própria validade da inferência.

Em outras palavras, se quiséssemos alterar a inferência sobre Anna de modo a eliminar a necessidade de visualização, poderíamos alterar a conclusão de tal maneira que ela consistisse na sentença “aquela mulher é Anna”, como sugerido na citação acima. Para eliminar a suposta necessidade de visualização na prova com diagramas, por outro lado, seria necessário introduzir uma regra de inferência que nos permitisse passar do diagrama que corresponde a um enunciado para o diagrama que corresponde ao outro¹⁰. Assim, somente eliminaríamos a suposta visualização em provas diagramáticas na medida em que a substituíssemos por regras que garantissem a validade das inferências. Desse modo, podemos concluir que teríamos raciocínio visual em provas diagramáticas uma vez que a validade da inferência dependeria de aspectos visualizáveis dos diagramas.

Ora, podemos nos perguntar sobre quais aspectos supostamente visuais são estes que se associam com a validade/invalidade das inferências diagramáticas. Na literatura¹¹ tais aspectos são identificados como sendo as restrições que governam os diagramas. Assim, lemos:

¹⁰ Com a introdução de tal regra, a prova resultante consistiria, de modo similar a uma prova sentencial formal, na aplicação de regras de construção e transformação de signos e a visualização estaria envolvida apenas pelo fato dos diagramas, por serem signos escritos, terem que ser visualizados para serem lidos.

¹¹ Por exemplo, em Barwise e Etchemendy (1991), Barwise e Shimojima (1996) e em Shimojima (1996).

Diagramas são situações físicas. E eles devem ser assim, na medida em que possamos enxergá-los. Como tais, eles obedecem a seu próprio conjunto de restrições. [...] Ao escolher um sistema representacional apropriadamente, de modo que as restrições sobre os diagramas tenham um bom encaixe com as restrições sobre a situação descrita, o diagrama pode gerar uma grande quantidade de informação que o usuário nunca precisará inferir. Antes, ele pode simplesmente extrair [read off] fatos do diagrama na medida em que for necessário. (Barwise e Etchemendy 1991, p. 23).

No mesmo texto encontramos também a seguinte passagem relacionando inferências visuais, como as que realizaríamos com diagramas, e restrições:

[...] o sistema perceptual é um sistema extremamente poderoso e realiza uma boa parte do que chamaríamos de inferência e que, de fato, tem sido chamada de inferência perceptual. Isto não é surpreendente, dado o fato de situações visuais satisfazerem sua própria família de restrições. [...] E assim não é surpreendente que usamos os instrumentos providos por este sistema no raciocínio. (Barwise e Etchemendy 1991, p. 25).

A noção de restrição sobre diagramas usada por Barwise e Etchemendy é desenvolvida por Shimojima (1996) em termos de restrições operacionais, i. e., restrições para o efeito de que as operações pelas quais desenhamos o diagrama são tais que ele não pode deixar de ter certas características. Consideremos novamente o exemplo de prova diagramática dada na seção 1. Nela, como já vimos na primeira seção, desenhamos três círculos parcialmente sobrepostos A , B e C , sombreamos o complemento de C com relação a B e a área comum a A e B , de acordo com as regras $(\omega_1) - (\omega_3)$. Como resultado da realização destas operações, obtemos um diagrama que apresenta a característica (σ_1) , a saber, um diagrama no qual a intersecção de A e C também está sombreada. (σ_1) não é uma característica acidental do diagrama, em outras palavras, ele é governado por uma restrição operacional pela qual, na medida em que é desenhado segundo aquelas regras, *deve* apresentar a característica. No entanto, Shimojima (1996) argumenta que (σ_1) não é consequência lógica de $(\omega_1) - (\omega_3)$ pois:

Existem algumas circunstâncias excepcionais na quais ela não vale. Pense nos diagramas desenhados com uma caneta de brinquedo cuja tinta “mágica” desaparece poucos segundos após ser posta no papel ou imagine desenhar os diagramas em um computador que automaticamente distorce, move e, algumas vezes, apaga o que fora desenhado. Nestas circunstâncias, mesmo que todas as operações descritas acima sejam executadas, não há garantia de que a intersecção do círculo com o nome “*A*” e o círculo com o nome “*C*” fique sombreada. Todavia, a restrição operacional de $\omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3$ para $out(\sigma_1)$ é plenamente confiável – confiável o suficiente para o método de operação *Vem* depender dela no cenário 1 [a prova do diagrama 1 acima]. (Shimojima 1996, pp. 44-45. Os acréscimos são meus).

Restrições operacionais não diriam respeito, desse modo, às conseqüências lógicas das operações ou regras de desenho, mas sim aos diagramas enquanto objetos visualizáveis. Assim, Shimojima segue afirmando:

Mesmo se impedíssemos que as circunstâncias problemáticas acima ocorressem e assumíssemos que tudo é preservado até o fim da derivação, a restrição de $\omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_3$ para $out(\sigma_1)$ ainda não é uma necessidade lógica. A restrição vale devido à seguinte restrição geométrica (ou topológica) sobre os diagramas: se tanto o complemento do círculo *B* com respeito à *C* quanto a intersecção dos círculos *B* e *A* então sombreadas em um diagrama normal, a intersecção dos círculos *C* e *A* neste diagrama também está sombreada. Este é um caso no qual uma restrição local [não lógica] sobre diagramas é refletida em uma restrição local [não lógica] sobre operações [...]. (Shimojima 1996, p. 45. Os acréscimos são meus)

De acordo com a concepção acima, restrições operacionais seriam as contrapartes, nas regras de desenho, de restrições geométricas ou topológicas dos diagramas¹². Shimojima propõe que entendamos as noções lógica e extra-lógica (ou local) de restrição em termos de conseqüência lógica e conseqüência extra-lógica¹³ e as define, em termos de semântica das situações.

¹² Tais restrições, por serem restrições não lógicas, admitiriam contra-exemplos. Sobre isto, cf. Barwise e Shimojima (1995, pp. 11-12).

¹³ Cf. Shimojima (1996, p. 42).

A idéia básica da semântica de situações, aplicada ao caso de representações diagramáticas, é que um diagrama é uma situação física visualizável que expressa ou codifica um *infor* que vale ou não na situação representada pelo diagrama. Situações são partes da realidade, *infos* ou estados de coisas são entendidos, grosso modo, como fatos possíveis¹⁴ que classificam situações entre aquelas nas quais ele vale e aquelas nas quais ele não vale. Se um estado de coisas vale em uma situação, dizemos que esta situação suporta ou verifica o estado de coisas e , portanto, que este classifica a situação. Por exemplo, um diagrama de *Venn* composto por um círculo \mathcal{A} com um x inscrito em seu interior expressa o *infor* ou estado de coisas composto pelo elemento x , o conjunto \mathcal{A} e pela relação de pertinência a um conjunto, e este estado de coisas classifica as situações entre aquelas que o suportam – i. e., nas quais $x \in \mathcal{A}$ – e aquelas que não o suportam – $x \notin \mathcal{A}$.¹⁵

Dado isto, Shimojima propõe a seguinte definição de restrição em termos das relações entre estados de coisas e situações. Seja $Sit(T)$ um conjunto de situações que exaure todas as situações logicamente possíveis, T_e um subconjunto de $Sit(T)$, $Soa(T)$ um conjunto de estados de coisas que podem possivelmente classificar as situações em $Sit(T)$. Define-se uma relação de restrição extra-lógica \models_{T_e} da seguinte maneira: para todo Θ, Θ' subconjuntos de $Soa(T)$, $\Theta \models_{T_e} \Theta'$, se e somente se, para *cada* situação t em T_e , se t suporta *cada* estado de coisas em Θ , então t suporta *ao menos um* estado de coisas em Θ' .¹⁶

No caso no qual $T_e = Sit(T)$ – i. e., T_e é o conjunto de situações logicamente possíveis – temos a noção de restrição lógica, se T_e é o subconjunto próprio de $Sit(T)$, temos uma noção de restrição extra-lógica. A identificação entre a noção de restrição e consequência somente é possível se o subconjunto Θ' é entendido em termos da disjunção de seus

¹⁴ Cf. Barwise (1989, p. xv).

¹⁵ Para uma exposição da semântica de situações, cf. Barwise (1989).

¹⁶ Cf. Shimojima (1996, pp. 42-44) e Barwise e Shimojima (1995, pp. 10-12).

elementos. Portanto, uma restrição sobre a aparência dos diagramas é algo que determina, por exemplo, que se um diagrama consiste de duas linhas retas então, necessariamente, *ou* ele possui a aparência de duas retas paralelas *ou* de duas retas perpendiculares *ou* de duas retas que se cruzam em um ponto mas que não são perpendiculares.

Restrições geométricas *determinariam*, ainda que não univocamente, a aparência dos diagramas e, neste sentido, *restringiriam* sua aparência. Assim, elas teriam a forma “se p então, necessariamente, q_1 ou ... ou q_n ” e, por isto, poderiam ser entendidas em termos da relação de consequência. Que um diagrama (ou situação diagramática) seja governado por uma restrição, então, pode ser entendido como significando que o diagrama suporta p e, conseqüentemente, sua aparência é restrita de tal modo que ou ele suporta q_1 ou ele suporta q_2 ou ... ou ele suporta q_n . Da mesma maneira, as situações *representadas* pelos diagramas também obedecem a seu conjunto de restrições, em particular, obedecem a restrições lógicas.

Quando uma convenção semântica e um método de operação – no nosso caso, as regras de desenho de diagramas – são formuladas de modo a capturar a relação de consequência lógica entre os enunciados representados pelos diagramas, a noção de consequência ou restrição extra-lógica que governa os diagramas e a de restrição lógica que governa as situações representadas coincidem. Em outras palavras, temos então um homomorfismo entre consequência extra-lógica – no caso de diagramas de *Venn*, consequência geométrica – e consequência lógica. Deste modo, podemos realizar inferências envolvendo os enunciados representados com base nas restrições extra-lógicas que governam os diagramas. De acordo com Shimojima, é isto que ocorre com os diagramas de *Venn* e que torna as provas por meio daqueles diagramas legítimas¹⁷.

3. Embora a elucidação de provas com diagramas em termos de restrições sobre sua aparência nos pareça correta, a tese de que provas

¹⁷ Cf. Shimojima (1996, p. 42).

com diagramas envolvem substancialmente a visualização dos mesmos apresenta, acreditamos, uma série de problemas. Em primeiro lugar, o argumento que pretende mostrar que a restrição operacional envolvida na prova de “ $(C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset) \rightarrow C \cap A = \emptyset$ ” não pode ser entendida em termos de consequência lógica é – acreditamos – falacioso. Os supostos contra-exemplos a que restrições digam respeito à relação de consequência envolvem ações que ocorrem ao longo do tempo: a caneta cuja tinta ‘mágica’ se apaga *após alguns segundos* e o computador que *move, distorce* ou *apaga* aquilo que desenhamos. Eles são de fato contra-exemplos somente se assumimos, de antemão, que a restrição operacional diz respeito a uma relação temporal entre as regras e o fato do diagrama apresentar certas propriedades. Temos, neste caso, uma petição de princípio, pois pressupomos justamente que a restrição não diz respeito às consequências lógicas das regras de desenho.

Além disto, obviamente, nós não podemos concluir pela validade de uma restrição (ou lei) geométrica com base na aparência de objetos físicos. Na medida em que restrições determinam (ou restringem) a aparência dos diagramas, é a aparência dos diagramas que é avaliada com base nas restrições, e não o inverso. Assim, nós podemos saber, por visualização, que um diagrama apresenta as características (σ_2) , (σ_3) e (σ_1) abaixo:

- (σ_2) os círculos A , B e C estão sobrepostos de tal modo que exista uma única área comum somente a A e B , B e C , a A e C e uma única área comum aos três círculos A , B e C e que cada um possua uma única região que não é comum a nenhum outro;
- (σ_3) o complemento de C com relação a B e a intersecção de B e A estão sombreadas; e
- (σ_1) a intersecção de C e A está sombreada.

Porém, nós não podemos, com base nisto, concluir que se o diagrama instancia (σ_2) e (σ_3) então, necessariamente, ele instancia (σ_1) . A noção de necessidade envolvida em leis e restrições geométricas é necessidade *de*

dicto e não necessidade *de re*, e o mesmo vale para as instâncias de leis geométricas. Por exemplo, enquanto que é verdade que, contingentemente, 1.1 instancia as propriedades (σ_2) e (σ_3) , é falso que ele, necessariamente, instancia (σ_1) . Antes, *se é verdade que*, contingentemente, 1.1 instancia as propriedades (σ_2) e (σ_3) , *então necessariamente é verdade que* ele, contingentemente, instancia (σ_1) .

Em que sentido, então, poderíamos afirmar que provas com diagramas são visuais na medida em que recorrem a restrições (leis) geométricas que, como vimos na seção anterior, possuem a forma “se p então, necessariamente, q ”? Talvez a razão por trás desta afirmação esteja no fato de que sabemos, *por visualização*, que o objeto físico 3.1 abaixo apresenta as características (σ_2) e (σ_3) :

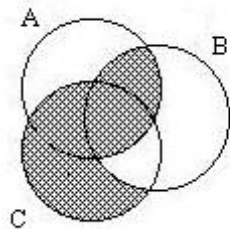


Fig. 3.1

Uma vez que sabemos disto, dada a lei geométrica pela qual se (σ_2) e (σ_3) então, necessariamente, (σ_1) , concluímos que não é possível que aquele objeto não instancie (σ_1) . Nós não visualizamos a restrição, mas, na medida em que visualizamos que 3.1 instancia (σ_2) e (σ_3) , nós *visualizamos* que ele *obedece* à restrição e associaríamos este fato visualizado à validade da inferência.

Parece estar envolvida aqui uma confusão entre o uso de uma premissa que junto com outras informações ou fatos visualizáveis nos permite extrair certas conclusões e o uso de uma regra que pressupõe que

identifiquemos os casos nos quais podemos aplicá-la. Do fato do diagrama não obedecer àquela restrição, por não apresentar as características (σ_2) e (σ_3) , se segue que fizemos um mau uso daquela lei geométrica. E da suposição da falsidade de “ (σ_2) e (σ_3) então, necessariamente, (σ_1) ” não se segue que o argumento que utilizamos para provar “ $(C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset) \rightarrow C \cap A = \emptyset$ ” é incorreto, mas sim que ele é inválido.

Se as leis geométricas desempenhassem o papel de premissas na prova, da suposição de sua falsidade decorreria apenas que o argumento é incorreto, e não que ele é inválido. Porém, no primeiro caso acima, temos uma situação na qual utilizamos incorretamente a restrição geométrica. Cometeríamos um erro similar ao supor “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ”, derivar da suposição o enunciado “ $C \cap A = \emptyset$ ” e então aplicar da regra de introdução do condicional para obter “ $(B \subseteq C \wedge B \cap A = \emptyset) \rightarrow C \cap A = \emptyset$ ”. No primeiro caso, aquele no qual supomos a falsidade da lei geométrica, temos uma *falácia* de apelo ao acidente: seria acidental que o diagrama que instancia (σ_2) e (σ_3) também instancie (σ_1) . Em ambos os casos não teríamos argumentos incorretos – com uma (ou mais) premissas falsas – mas sim argumentos falaciosos.

O segundo caso pode ser ilustrado pelo seguinte exemplo. Suponhamos que um aluno represente “ $x \in A \cup B$ ” desenhando o diagrama 3.2 abaixo e então conclua “ $x \in A \cup B \rightarrow x \in A$ ”:

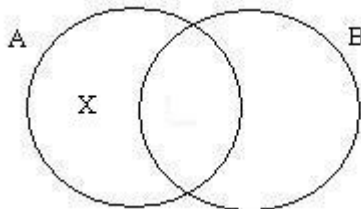


Fig. 3.2

O erro aqui pode ser descrito, de acordo com a análise em termos de restrições visualizáveis, como consistindo em tomar o diagrama como

sendo governado por uma restrição de acordo com a qual se x está inscrito na área ou de A ou de B então x esta inscrito na área de A . O aluno, ao cometer este erro, não demonstra desconhecer geometria, mas sim demonstra não dominar ainda o procedimento de prova com diagramas de *Venn*. A situação é comparável àquela na qual infere-se “ p ” a partir de “ $(p \rightarrow q) \wedge q$ ”.

As leis geométricas desempenhariam nas provas diagramáticas um papel similar ao desempenhado pelas leis lógicas em provas sentenciais, a saber, o de regras de inferência¹⁸. Dado isto, o fato visualizável de que o diagrama instancia (σ_2) e (σ_3) não seria uma premissa da prova, mas sim apenas serviria para julgar se o uso da lei (restrição) geométrica foi correto ou não. Em outras palavras, a visualização apenas nos diria se aquele é um caso no qual é legítimo ou não aplicar a regra de inferência diagramática expressa por “ (σ_2) e (σ_3) então, necessariamente, (σ_1) ”.

É necessário, agora, distinguir dois sentidos nos quais podemos afirmar que uma prova envolve visualização. Em um sentido substancial, aquele no qual podemos falar que a inferência acerca de Anna envolve visualização, temos um objeto ou uma situação visualizável ocorrendo como premissa ou conclusão do argumento ou, ainda, como parte de alguma premissa ou da conclusão. Em um sentido trivial, a visualização nos permite checar se as regras de derivação foram usadas corretamente ou, ainda, se os signos foram grafados de maneira correta¹⁹. Este é um sentido no qual podemos falar, por exemplo, que argumentos sentenciais e procedimentos de cálculo envolvem visualização. Mas, como argumentamos acima, este também é o sentido no qual as provas diagramáticas

¹⁸ Não pretendemos, aqui, defender que leis geométricas *são* regras, como propõe o segundo Wittgenstein, mas sim apenas que, no contexto de provas com diagramas de *Venn*, tais leis *desempenham o papel de regras*. Sobre a concepção wittgensteiniana de proposições matemáticas como regras, veja, por exemplo, Wittgenstein (1974, pp. 319-320).

¹⁹ Esta distinção entre um sentido substancial e outro sentido trivial de visualização se encontra em Lassalle Casanave (2006).

envolvem o fato visualizável dos diagramas obedecerem (ou não) certas restrições, na medida em que estas atuam como regras de inferência. Conseqüentemente, a diferença entre provas diagramáticas e provas sentenciais não está no papel desempenhado pela visualização. Ambas envolvem a visualização somente no sentido trivial e, neste sentido, estes tipos de prova se distinguiriam fortemente de uma inferência heterogênea como aquela acerca de Anna.

Além disto, mesmo que o fato visualizável fosse uma premissa da inferência, nós associaríamos este fato à obediência da restrição por meio das regras que determinam quando uma restrição é obedecida ou não por um diagrama. Se restrições não são fatos observáveis, então a obediência às restrições também não é um fato visualizável, embora a obediência a uma restrição possa ser verificada por visualização. Não teríamos, portanto, a associação de um fato visualizável à obediência de uma restrição, mas sim a *verificação*, por visualização, da obediência a uma restrição, o que nos permitiria afirmar apenas que tais provas envolvem visualização em um sentido trivial. Neste mesmo sentido, todo argumento puramente sentencial que envolva premissas verificáveis por visualização é, *trivialmente*, visual. O problema diz respeito não apenas a que provas com diagramas não envolvem substancialmente a visualização dos mesmos; mas também ao fato de que, não importa como analisamos provas diagramáticas, supondo-as legítimas, sua validade ou correção não pode depender da visualização dos diagramas.

Devemos notar também que, se provas com diagramas envolvessem a associação de fatos visualizáveis acerca de objetos físicos particulares com a validade de inferências, então do fato de usarmos inscrições – objetos físicos – diferentes se seguiria que temos provas diferentes. Deste modo, a prova de “ $(C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset) \rightarrow C \cap A = \emptyset$ ” que apresentamos na primeira seção associaria a validade da inferência de “ $C \cap A = \emptyset$ ” a partir de “ $C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset$ ” ao fato empírico visualizável de que o objeto físico 1.1 obedece à restrição. Em uma prova deste mesmo resultado utilizando o diagrama 3.1 acima nós associaríamos a validade da

inferência ao fato empírico de que o objeto físico 3.1 obedece àquela mesma restrição. Em cada caso, associaríamos um fato empírico diferente à validade da mesma inferência e, portanto, teríamos argumentos diferentes que, por envolverem a visualização dos diagramas, poderiam apenas fornecer evidências empíricas sobre a validade da inferência e a conseqüente verdade do teorema, o que é absurdo.

Embora não estejam claras quais são as condições de identidade de provas, podemos afirmar que do fato de duas seqüências de inscrições (objetos físicos) serem numericamente diferentes não se segue que elas se constituem em duas provas diferentes. Por exemplo, do fato de existirem várias cópias impressas da prova de incompletude de Gödel não se segue que existem várias provas de incompletude de Gödel. E o mesmo vale para, por exemplo, provas com diagramas de *Venn* ou para as provas fornecidas por Euclides: duas cópias de uma prova euclidiana não se constituem em duas provas daquela proposição.

* * *

Os problemas que apontamos na seção anterior parecem se originar de uma confusão entre um objeto visualizável que, por ventura, apresenta tais e tais propriedades e uma inscrição (ou signo *token*) que *deve* apresentar estas propriedades para que tenha sido escrita (desenhada) corretamente. Os diagramas que desenhamos no papel, porém, são signos que representam conceitos ou enunciados, e não meros objetos visualizáveis e, além disto, são relevantes para a prova apenas na medida em que são signos. Como tal, os diagramas possuem sua aparência restringida por regras de grafia e as únicas propriedades visualizáveis relevantes destes signos são aquelas determinadas pelas regras de grafia ou desenho dos diagramas. Em outras palavras, as únicas propriedades das inscrições que podemos usar nas provas de, por exemplo, “ $(C \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset) \rightarrow C \cap A = \emptyset$ ” são aquelas que, *ex institutione*, são possuídas por *todas* as inscrições que são diagramas de *Venn* que representam aquele enunciado.

Esta posição guarda muitas semelhanças com as idéias de Wittgenstein, que defende que o papel de um diagrama na prova geométrica – por exemplo, o diagrama de um cubo – é aquele de um signo e a seguir afirma:

E é um signo (*que tem a identidade própria de um signo*) que consideramos ser o cubo no qual as leis geométricas já estão contidas. (Elas não estão mais contidas ali do que a disposição de ser usada de certa maneira está contida na peça de xadrez que é o rei.) (Wittgenstein 1974, p. 57)

Uma vez que desfazemos as confusões mencionadas acima, percebemos que provas diagramáticas não são e nem podem ser visuais. Ou melhor, elas somente poderiam envolver a visualização dos diagramas no sentido trivial no qual provas sentenciiais envolvem a visualização de fórmulas escritas. Isto, porém, não significa afirmar que provas diagramáticas são análogas a provas sentenciiais, mas sim que a diferença entre estes tipos de prova não está no papel desempenhado pela visualização. Enquanto que a compreensão de uma prova sentencial envolveria a compreensão de regras de inferência lógica ou do significado dos termos lógicos, provas diagramáticas pareceriam envolver muito mais a compreensão das regras de grafia dos diagramas e aquilo que poderíamos chamar de geometria ou topologia dos mesmos. Na medida em que as regras de grafia dos diagramas e sua ‘topologia’ são essenciais para a prova diagramática, esta não pode, de fato, prescindir dos diagramas, no mesmo sentido no qual, por exemplo, o procedimento comum de soma não pode prescindir da notação posicional de base 10.

BIBLIOGRAFIA

- ALLWEIN, G., BARWISE, J. (eds). *Logical Reasoning with Diagrams*. Oxford: Oxford University Press, 1996.
- BARWISE, J. *The Situation in Logic*. Stanford, CA: CSLI Publications, 1989.

- BARWISE, J., ETCHEMENDY, J. “Visual Information and Valid Reasoning”. *MAA Notes*, n. 19, Mathematical Association of America, 1991. Repr. in G. Allwein e J. Barwise (eds) (1996), pp. 3-26.
- _____. “Heterogeneous Logic” In: G. Allwein e J. Barwise (eds.) (1996), pp. 179-200.
- BARWISE, J., HAMMER, E. “Diagrams and the Concept of Logical System”. In: G. Allwein e J. Barwise (eds.) (1996), pp. 49-80.
- BARWISE, J., SHIMOJIMA, A. “Surrogate Reasoning”. *Cognitive Studies: Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society*, v. 2, n. 4, pp.7-26, 1995.
- CARNIELLI, W., CONIGLIO, M. E., D’OTTAVIANO, I. M. L. *The many Sides of Logic*. Londres: College Publications (Studies in Logic, n. 12), 2009.
- CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms. Part II: Logic, Language, and Knowledge*. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência / UNICAMP 2005. (Coleção CLE, 42).
- DOFFI, M. (org.). *Lógica, epistemología y filosofía del lenguaje*. 1 ed. Buenos Aires: EUDEBA, 2006,
- GABBAY, D. M., GUENTHNER, F. (eds.). *Handbook of Philosophical Logic, Vol. 4, 2nd Edition*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- HAMMER, E. “Diagrammatic Logic”. In: D. M. Gabbay e F. Guentner (eds.) (2002), pp. 395-422.
- JOURDAN, C. *Impredicatividade, Generalidade e o Desenvolvimento do pensamento de Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Tese (Doutorado em Filosofia), PUC-Rio, 2009.
- LASSALLE CASANAVE, A. “Conhecimento Simbólico na Investigação de 1764”. *Analytica*, 11 (1), pp. 53-71, 2007.

- _____. “Conocimiento por construcción simbólica”. In: M. Doffi (org.) (2006), pp. 211-219.
- LEMON, O., SHIN, S.J. "Diagrams". **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Winter 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), In: <<http://plato.stanford.edu/archives/win2003/entries/diagrams/>>. Acesso em dezembro de 2008.
- MANCOSU, P. (ed). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Clarendon Press, 2008.
- MANDERS, K. “The Euclidean Diagram (1995)”. In: P. Mancosu (ed.) (2008), pp. 80-133.
- _____. “Diagram-Based Geometric Practice”. In: P. Mancosu (ed.) (2008), pp. 65-79.
- SCHULTZ, S. R. “Diagrams, Visualization and Operational Constraints”. In: W. Carnielli, M. E. Coniglio e I. M. L. D’Ottaviano (eds) (2009), pp. 307-319.
- SEOANE, J. “Representar y demostrar. Observaciones preliminares sobre diagramas”. *Representaciones*, 2 (2), pp. 105-126, 2006.
- SHABEL, L. A. *Mathematics in Kant’s Critical Philosophy*. New York & London: Routledge, 2003.
- SHIMOJIMA, A. “Operational Constraints in Diagrammatic Reasoning”. In: G. Allwein e J. Barwise (eds.) (1996), pp. 27-48.
- SHIN, S-J. “Situation-Theoretic Account of Valid Reasoning with Diagrams” In: G. Allwein e J. Barwise (eds.) (1996), pp. 81-108.
- WITTGENSTEIN, L.: *Philosophical Grammar*. Org.: R. Rhees. Oxford: Blackwell, 1974.