

CDD: 511.3

## ELUCIDANDO EL CONCEPTO DE DEMOSTRACIÓN. OBSERVACIONES SOBRE CHATEAUBRIAND

JOSÉ SEOANE

*Instituto de Filosofía – FHCE*  
*Universidad de la República*  
*MONTEVIDEO, URUGUAY*

*seoanej@hotmail.com*

**Resumen:** Es razonable pensar que una parte relevante del trabajo del lógico consiste en *elucidar* ciertos conceptos teóricamente valiosos pero, si se los evalúa desde el punto de vista de la claridad y el rigor, aún insatisfactoriamente caracterizados. Estos procesos elucidatorios pueden modelarse de formas muy variadas; el núcleo de los mismos, no obstante, reside en la construcción de un concepto más riguroso que funge como clarificación o *elucidatum* de un concepto previo. El concepto matemáticamente preciso de “demostración” puede considerarse un posible *elucidatum* del respectivo concepto intuitivo. ¿Es un *elucidatum* adecuado? ¿Bajo qué condiciones lo es? ¿Cómo repercute asumir tal éxito elucidatorio en nuestra concepción filosófica de la demostración? Chateaubriand no plantea, explícitamente, el problema en términos elucidatorios; sin embargo, sugeriremos que enmarcar su reflexión en tal contexto puede proveer una perspectiva novedosa de sus lúcidos análisis.

**Palabras-clave:** Filosofía de las matemáticas. Demostración. Elucidación. Modelos elucidatorios.

## ELUCIDATING THE CONCEPT OF DEMONSTRATION. CONSIDERATIONS ON CHATEAUBRIAND

**Abstract:** A relevant aspect of a logician's work consists in elucidating certain concepts that, however theoretically valuable, are yet to be satisfactorily characterized from the point of view of rigor and clarity. Although these elucidatory processes can be modeled on several ways, its nucleus resides in the

construction of a more rigorous concept that acts as clarification or elucidatum of a previous concept. The mathematically precise concept of “demonstration” can be considered as a possible elucidatum of the respective intuitive concept. Is it an adequate elucidatum? How does assuming such an elucidatory success affect our philosophical conception of the demonstration? Although Chateaubriand does not explicitly pose the question in elucidatory terms, I will suggest that framing his reflection in such a context can provide a new perspective of his lucid analysis.

**Keywords:** Philosophy of mathematics. Demonstration. Elucidation. Elucidatory models.

## 1. INTRODUCCIÓN

Es razonable pensar que una parte relevante del trabajo del lógico consiste en *elucidar* ciertos conceptos teóricamente valiosos pero, si se los evalúa desde el punto de vista de la claridad y el rigor, aún insatisfactoriamente caracterizados. Estos procesos elucidatorios pueden modelarse de formas muy variadas; el núcleo de los mismos, no obstante, reside en la construcción de un concepto más riguroso que funge como clarificación o *elucidatum* de un concepto previo<sup>1</sup>. El concepto matemáticamente preciso de “demostración” puede considerarse un posible *elucidatum* del respectivo concepto intuitivo<sup>2</sup>. ¿Es un elucidatum adecuado? ¿Bajo qué condiciones lo es? ¿Cómo repercute asumir tal éxito elucidatorio en nuestra concepción filosófica de la demostración?

Oswaldo Chateaubriand, en el Cap. 19 de *Logical Forms Vol. II*, desarrolla una contribución notable a la reflexión sobre interrogantes como éstas. Chateaubriand no plantea, explícitamente, el problema en términos elucidatorios; sin embargo, sugeriremos que enmarcar su reflexión en tal contexto puede proveer una perspectiva

---

<sup>1</sup> Un enfoque general del problema puede leerse en Seoane (2006).

<sup>2</sup> Esta terminología es tomada de Simpson (1984).

novedosa de sus lúcidos análisis. Las líneas que siguen constituyen un modesto esfuerzo orientado a desarrollar dicha perspectiva.

## 2. EL PROBLEMA

La noción técnica de demostración figura en cualquier manual de lógica; descrita en forma rápida, ésta identifica las demostraciones en un lenguaje formalizado con ciertas secuencias de fórmulas de dicho lenguaje que satisfacen determinadas exigencias. Un primer aspecto importante en los desarrollos de Chateaubriand, desde la perspectiva antes sugerida, consiste en llamar la atención sobre la adopción acrítica del éxito elucidatorio radical de tal concepto en relación con su contrapartida intuitiva. Este filósofo señala – certeramente– una escasa atención filosófica al problema de la demostración; un descuido tal se explica perfectamente por la vigencia de la asunción tradicional al respecto, a saber, la adecuación elucidatoria plena de la noción técnica de demostración en relación con la noción intuitiva. Debe reconocerse, por otra parte, que éste es un efecto común de las elucidaciones asumidas como exitosas.

Es relevante advertir asimismo cómo esta actitud acrítica tradicional provoca la desatención conceptual hacia el plano pre-formal o intuitivo. Un trabajo filosófico y científico del mayor interés consiste en advertir tal situación cuando existen buenas razones para sospechar de la puntería de la elucidación. O, si se prefiere, de la naturaleza absoluta del éxito elucidatorio. Entonces se hace necesario rescatar la dimensión intuitiva del concepto en cuestión e intentar razonar evitando los prejuicios heredados.

Desde el punto de vista metodológico, la situación revela un grado relativamente sofisticado de complejidad. Por una parte, cabe reconocer el carácter valioso del proceso elucidatorio y del resultado obtenido; por otra, se trata de identificar fallas o deficiencias en dicho proceso y, en particular, señalar las insuficiencias de un

concepto dado como elucidatum en relación con una noción intuitiva –que ostenta un papel muy destacado en esta modalidad elucidatoria. Tal peculiaridad metodológica hace que la descripción y evaluación de la crítica elucidatoria deba desarrollarse con extremo cuidado.

De acuerdo a estas observaciones, un primer paso consiste en deslindar la valoración del elucidatum (cuyo interés y fecundidad pueden reconocerse sin ambages) y, no obstante, vindicar el rechazo a la reducción. Las razones de tal rechazo pueden deberse a la existencia de aspectos en la dimensión intuitiva no recogidos en la contrapartida teórica. O a aspectos presentes en esta última irreconciliables con la noción pre-teórica. O aún a conflictos más difíciles de clasificar entre uno y otro plano. Un ejemplo paradigmático de crítica elucidatoria es el desarrollado por Tarski en su célebre artículo de 1936: allí el lógico polaco intenta mostrar cómo la noción de consecuencia sintáctica no es una buena contrapartida elucidatoria de la noción intuitiva de consecuencia lógica<sup>3</sup>. En cierto sentido, podría sostenerse que Chateaubriand desarrolla asimismo una crítica elucidatoria, a saber, la noción sintáctica de demostración no es una buena contrapartida elucidatoria de la noción intuitiva correspondiente<sup>4</sup>. O, dicho de otro modo, existen ciertos aspectos de la noción intuitiva de demostración que no son adecuadamente capturados por la noción técnica; una noción filosóficamente adecuada debería ser capaz de dar cuenta de ellos. Como puede apreciarse, no se trata de una crítica cuyo blanco sea la noción técnica, sino más bien una suerte de indebida comprensión conceptual de la misma. Esta modalidad de

---

<sup>3</sup> Véase Tarski (1936).

<sup>4</sup> Esta afirmación debiera entenderse en un sentido temperado que esperamos resulte claro a través de las páginas que siguen.

articulación entre crítica elucidatoria y reflexión filosófica se retomará en la sección final de este trabajo.

### 3. FINITISMO Y NOCIÓN INTUITIVA

El carácter finito de las demostraciones –puede decirse– es una exigencia tradicional de la noción de demostración. Para evidenciarlo, Chateaubriand cita un pasaje del conocido texto de Enderton<sup>5</sup>. Pero, si somos intelectualmente sensibles a la distinción entre los planos intuitivo y formal, emerge naturalmente la pregunta acerca de si nos referimos a “demostración” en sentido formal o a “demostración” en sentido intuitivo.

Es interesante advertir que, en el sentido formal, la cuestión de la finitud posee una respuesta trivial: las demostraciones son finitas por definición. En el sentido intuitivo la cuestión dista de ser obvia. Una forma de interpretar la argumentación de Chateaubriand en relación a la cuestión de la finitud de las demostraciones podría quizá entenderse como orientada a evidenciar hasta qué punto la exigencia finitista se compadece con la noción intuitiva. La estrategia de este autor es directa: existen demostraciones, en el sentido intuitivo, que no respetan la exigencia de finitud. Su argumento central se apoya en el siguiente ejemplo.

Se tienen como premisas

- i)  $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
- ii)  $\forall x \neg Rxx$
- iii)  $Ra_1a_2$
- iv)  $Ra_2a_3$
- :
- :

---

<sup>5</sup> Véase Chateaubriand (2005).

De ii) y iii) se concluye que  $a_1$  es distinto de  $a_2$ . De ii) y iv) se concluye que  $a_2$  es distinto de  $a_3$ . De i), iii) y iv) se concluye que  $Ra_{1a_3}$  y así, por ii), se tiene que  $a_1$  es distinto de  $a_3$ . Luego se toma  $a_4$  y, por el mismo mecanismo, se prueba que es diferente de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ . Y así sucesivamente. Luego se concluye que todo los  $a_i$  son diferentes entre sí, es decir, el dominio de R es infinito.

El argumento de arriba es, desde el punto de vista pre-formal, intuitivo, evidentemente una demostración. La estructura de la misma es infinita ya que sus premisas son infinitas pues éstas son la serie de sentencias i), ii), ... y es imprescindible que las usemos a todas. La conclusión es que el dominio de R tiene que ser infinito.

Desde el punto de vista metodológico, parece razonable señalar esta estrategia argumental como destinada a mostrar una insuficiencia elucidatoria a partir de la evaluación del comportamiento extensional del elucidatum en relación con el elucidandum. Podría denominarse a tal insuficiencia: falla de subgeneración del elucidatum. La estrategia argumental consistiría en encontrar una instancia del concepto intuitivo que no es capturada por el concepto formal; este desacuerdo extensional evidenciaría la insuficiencia del concepto formal. En este caso, el argumento de arriba sería, desde el punto de vista intuitivo, una demostración pero, dada su estructura infinita, ésta no podría ser capturada por el concepto formal.

La estrategia de Chateaubriand usada aquí (en la interpretación propuesta) resulta análoga a la empleada por Tarski en relación con la noción de consecuencia lógica; el lógico polaco señala un caso donde, desde el punto de vista intuitivo, estaríamos dispuestos a reconocer la existencia de la relación de consecuencia lógica entre un conjunto de premisas y una cierta sentencia pero, desde el punto de vista formal, tal relación no

podría admitirse. Desde el punto de vista intuitivo, “Todo natural posee la propiedad P” es consecuencia lógica de la serie infinita de sentencias “0 tiene la propiedad P”, “1 tiene la propiedad P”,... La definición sintáctica de consecuencia, al apoyarse en demostraciones finitarias, excluiría tal relación de su extensión. El desacuerdo extensional entre ambos conceptos evidenciaría, desde el punto de vista de Tarski, la insuficiencia del concepto formal: en su caso las limitaciones de la noción sintáctica de consecuencia. El problema es más sofisticado pero el aspecto metodológico que se quiere resaltar aquí queda así suficientemente delineado.

En el caso de Tarski este momento crítico o negativo auspicia la introducción de un nuevo concepto técnico, a saber: la noción teórico-modélico de consecuencia lógica. Un aspecto interesante es entender el papel que, en la reflexión de Chateaubriand, corresponde a esta crítica elucidatoria.

#### 4. TESTABILIDAD ALGORÍTMICA Y NOCIÓN INTUITIVA

Nuevamente, la testabilidad algorítmica –puede decirse– es una exigencia tradicional de la noción de demostración. Pero, si somos intelectualmente sensibles a la distinción entre los planos intuitivo y formal, al igual que en el caso anterior, deberíamos preguntarnos si nos estamos refiriendo a la noción formal de “demostración” o a la noción intuitiva.

También de modo análogo a la discusión anterior, si de lo que se trata es de la noción formal, no existe la menor duda: las demostraciones deben ser algorítmicamente testables por definición. El problema emerge cuando nos preguntamos respecto a la noción intuitiva.

Como nota Chateaubriand, si se aceptan demostraciones cuya estructura es infinita (como el ejemplo anterior) entonces, en el sentido estándar al menos, debe abandonarse la exigencia de

testabilidad algorítmica. Pero el autor elabora además un argumento independiente. Supóngase que se trata de probar la ecuación siguiente

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n^2 + n}{2}$$

Un modo habitual de demostrar tal ecuación consiste en apelar al principio de inducción. Pero considérese la siguiente demostración alternativa:



¿Cuánto sería el cuadrado entero? Obviamente  $n^2$ . Pero si se lo divide a la mitad –es decir  $n^2/2$ – faltan la mitad de los  $n$  elementos de la diagonal –es decir,  $n/2$ – para obtener la suma  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Luego tal suma es igual a  $\frac{n^2 + n}{2}$ .

Concluye Chateaubriand<sup>6</sup>:

This proof ... is entirely convincing, even though the steps are not algorithmically checkable in the standard sense.

---

<sup>6</sup> Véase Chateaubriand (2005).

Desde el punto de vista metodológico, la similitud estructural con el caso anterior resulta obvia. Podríamos decir que se trata de una crítica elucidatoria que revela un déficit extensional del elucidatum, ya que existe una instancia del concepto intuitivo que no puede ser capturada por el concepto formal. El desacuerdo extensional entre ambos conceptos, al igual que en el caso anterior, es entendido como una insuficiencia del concepto formal. También en este caso posee interés interrogarse acerca de cómo se integra este resultado en la economía general de la reflexión de Chateaubriand.

## 5. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y PROBLEMAS FILOSÓFICOS

Se ha procurado presentar la argumentación de Chateaubriand en clave elucidatoria; el interés en así hacerlo reside en promover la reflexión sobre ciertos aspectos no obvios de la cuestión en debate. En lo que resta del trabajo, llamaré la atención sobre algunos de ellos.

Desde el punto de vista de la búsqueda de una mejor comprensión de la interrelación entre los planos pre-formal y formal, las críticas de Chateaubriand alumbran un interesante fenómeno conceptual: el inadvertido traslado o pasaje de propiedades o rasgos propios del concepto formal al concepto pre-formal.

Si se piensa en el plano formal, es explícita la identificación de la demostración con un cierto objeto lingüístico (más específicamente, con un cierto objeto sintáctico); por una especie de “contrabando conceptual”, esta identificación se traslada al plano pre-formal. Advertir esta peculiar operación metodológica auspicia algunas preguntas importantes: ¿qué estamos dispuestos a admitir como objetos lingüísticos?, ¿una demostración como la de Polya arriba descrita puede entenderse como objeto lingüístico? ¿cuán hospitalaria es nuestra noción de lenguaje?

Es posible mantener el punto de vista lingüístico y ampliar la noción de lenguaje; en tal caso, podrían admitirse ciertas argumentaciones, por así decirlo, “visuales” como demostraciones. Pero es asimismo posible abandonar la concepción lingüística y adoptar un punto de vista permisivo en relación con las diferentes formas de codificar la información. Esta última alternativa parece verse favorecida por una concepción de la demostración que no identifique demostración y expresión de la demostración. Aunque tal identificación se produzca en el marco de un sistema formal, si se traslada acríticamente al plano intuitivo, parece respaldar la concepción que algunos autores han bautizado como “logocentrismo”<sup>7</sup>. Esto es, el rechazo a la consideración como demostraciones a argumentaciones en las cuales la codificación visual de la información relevante juega un papel esencial. Así la crítica a la concepción lingüística de la lógica parece devenir en un apoyo importante para una defensa del papel de la codificación visual en las argumentaciones demostrativas en matemática.

El ejemplo antes estudiado de este fenómeno conceptual de traslación ilegítima posee un carácter muy básico; el ejemplo que discutiremos ahora surge en cierto sentido a partir del mismo. En este caso la identificación lingüística de la demostración conduce, nuevamente, a una especie de “contrabando conceptual”: la propiedad “finitud” que, obviamente, corresponde predicar de la comunicación o expresión de la demostración se atribuye –por la identificación asumida erróneamente– a la demostración misma i.e. se entiende como una propiedad obvia de las demostraciones pre-formales. Sin embargo, resulta difícil entender exactamente qué significa, en el contexto informal, tal predicación.

---

<sup>7</sup> Véase, por ejemplo Barwise y Etchemendy (1996).

Veamos con más cuidado el punto. Las demostraciones pre-formales se encuentran orientadas a esclarecer su *tema* o *asunto*; en otras palabras, la preocupación central que las anima se relaciona con la sustancia estudiada, no con los rasgos estructurales del concepto de “demostración”. La explicitación estructural de las mismas no es obvia. En el caso formal sabemos estrictamente a qué se aplica el predicado “finitud”: dado que una demostración, en ese contexto, es una secuencia de fórmulas (i.e. un conjunto), sabemos exáctamente qué se quiere decir al aplicar el predicado “finitud” a la misma. Pero, en el caso de las demostraciones pre-formales, esto no resulta igualmente obvio. ¿Qué quiere decir que una demostración informal es finita? Tal vez podría pensarse que la pregunta misma carece de sentido. Formulada dicha interrogante sin otras precisiones es razonable sostener que no expresa un problema auténtico.

Esta última observación resulta perfectamente compatible con el enfoque de Chateaubriand; este autor no afirma que haya demostraciones informales infinitas sino que su contraejemplo informal posee “estructura” infinita. La diferencia no es trivial. Es necesario explicitar la estructura de la demostración y, en cierto sentido, podríamos pensar tal explicitación como una condición de posibilidad de la predicación. Si se identifica la demostración con su expresión, este rasgo estructural no logra expresarse adecuadamente y, en consecuencia, falla tal identificación o, si se prefiere, la noción tradicional se muestra radicalmente limitada.

Un tercer ejemplo del fenómeno aludido quizá fuera mejor caracterizado no tanto como el pasaje de propiedades sino el traslado de relaciones entre propiedades desde un plano al otro. En el plano formal, la generación de convicción definitiva parece vincularse fuertemente a la testabilidad algorítmica de la demostración. Hay un sentido poderoso en que, dentro de un sistema formal, si una secuencia de fórmulas supera exitosamente el control de calidad

impuesto por la testabilidad algorítmica, ello es equivalente a la aceptación de su carácter de demostración. Esta convicción generada es sobre la demostración y, sólo en forma derivada y condicionada a otras asunciones, sobre la conclusión de la misma. Es decir, si poseo buenas razones para pensar en la capacidad del sistema de reflejar la realidad matemática, entonces no albergaré dudas sobre la verdad de la conclusión. Pero no es el trabajo de la testabilidad algorítmica asegurarme tal capacidad. Por ello surge el problema cuando pasamos al plano pre-formalizado, incluyendo el ejemplo de demostración inductiva en cuestión. Allí la testabilidad algorítmica no me produce la convicción acerca de la verdad de la conclusión porque tal testabilidad está operando, por así decirlo, “fuera de contexto”. Se le está pidiendo que haga un trabajo extra, para el cual la misma no está capacitada. Pues en el plano pre-formalizado, la convicción final que debe suministrar una demostración parece exigir sustancial y directamente la convicción en relación con la verdad de la conclusión. Es por ello que la potencial testabilidad de la inducción no basta para satisfacer las exigencias que hacemos a una demostración informal. La demostración visual puede proveer tal convicción sin por ello ser (al menos en forma directa) algorítmicamente tratable. La relación entre tales propiedades, que posee una acepción razonable en el plano formal, parece debilitarse mucho cuando se intenta trasladarla al plano intuitivo.

Un efecto valioso del análisis de Chateaubriand consiste en llamar la atención sobre el papel de la comprensión en las demostraciones y, particularmente, en la generación de convicción definitiva. Observaciones interesantes respecto al concepto de “comprensión” han sido desarrolladas por Lassalle Casanave<sup>8</sup>. Si se analiza tal concepto (a la luz de la distinción entre los planos formal

---

<sup>8</sup> Véase Lassalle Casanave (1999).

e informal en el trabajo de Chateaubriand), se advierte la riqueza de formularse la interrogación sobre el mismo en uno y otro plano.

Algunas cuestiones surgen naturalmente a partir de proponerse entender los desarrollos de Chateaubriand en clave elucidatoria. En primer término, ¿corresponde entender las observaciones de este filósofo acerca de las limitaciones de una cierta caracterización de demostración como esfuerzos de crítica elucidatoria? En particular, en la perspectiva que hemos asumido, el concepto intuitivo juega un papel esencial, en cierto sentido, de “control de calidad” del elucidatum. Si la respuesta a la interrogante anterior es positiva, ¿juega tal papel en la concepción de Chateaubriand la noción informal? Finalmente, cabe preguntarse cómo se integra la crítica elucidatoria a la reflexión de Chateaubriand sobre el concepto de demostración. Una conjetura que puede aventurarse es que, a diferencia de Tarski en la obra citada, la crítica revela límites en la capacidad elucidatoria de la noción formal pero al hacerlo, en virtud de los fenómenos conceptuales aludidos, su impacto fundamental se orienta a descubrir limitaciones decisivas en la conceptualización filosófica tradicional. Dicho de una forma algo tosca, al mostrarse las limitaciones elucidatorias del concepto formal de demostración no se apunta a la provisión de un nuevo concepto técnico sino a revelar el origen de severas dificultades en la perspectiva filosófica tradicional.

El impacto de una filosofía puede apreciarse en su capacidad de persuasión, en su eficacia al suscitar la reflexión ajena a sus propios supuestos y en su riqueza y vivacidad metodológica. La obra de Chateaubriand sospecho que está destinada a influir en todos estos sentidos.

## REFERENCIAS

- ALLWEIN, G., BARWISE, J. (eds.). *Logical Reasoning with Diagrams*. Oxford: Oxford University Press, 1996.
- BARWISE, J., ETCHEMENDY, J. “Visual Information and Valid Reasoning”. In: G. Allwein and J. Barwise (eds.) (1996), pp. 3-12.
- CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms. Part II: Logic, Language and Knowledge*. Campinas: UNICAMP, 2005. (Coleção CLE, v. 42)
- LASSALLE CASANAVE, A. “La concepción de demostración de Oswaldo Chateaubriand”. *Manuscrito*, v. XXII, n. 2, pp. 95-107, 1999.
- SEOANE, J. “The Concept of Mathematical Elucidation: theory and problems”. *CLE e-prints (Section Logic)*, v. 6, n. 4, pp. 1-21, 2006. Dirección electrónica:  
[http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol\\_6,n\\_4,2006.html](http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_6,n_4,2006.html)
- SIMPSON, T.M. “Análisis y eliminación: una módica defensa de Quine”. *Crítica*, v. VII, n. 21, pp. 69-83, 1975.
- TARSKI, A. [1936] “On the Concept of Logical Consequence”. In: A. Tarski (1956), pp. 409-420.
- . *Logic, Semantic, Metamathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1956.