Dialogue, Language, Rationality. A Festschrift for Marcelo Dascal.
Michael B. Wrigley (ed.).

CDD: 149.946

UN DESAFÍO PARA LAS TEORÍAS COGNITIVAS DE LA COMPETENCIA LÓGICA: LOS FUNDAMENTOS PRAGMÁTICOS DE LA SEMÁNTICA DE LA LÓGICA LINEAR

SHAHID RAHMAN[*]

U.F.R Philosophie
Université de Lille (Sciences Humaines)
B. P. 149
59653 VILLENEUVE D'ASCQ,
FRANCE

rahman@univ-lille3.fr

Resumen: *Marcelo Dascal destaca en diversos artículos en los que analiza las consecuencias de la concepción pragmática del significado, la importancia de estudiar la*

[*] Quisera agradecer a Andreas Blass (Michigan), Dov Gabbay (Londres), Harry Mairson (Boston), Peter Schröder-Heister (Tübingen) y Sonja Smets (Bruselas) por discusiones que llevaron a la primera versión (en alemán) de este trabajo (escrita en conjunto con Helge Rückert). Particularme estoy agradecido a Dov Gabbay por discusiones que condujeron a las ideas principales de la semántica dialógica para la lógica linear. Agradezco también al grupo del Workshop "Konstruktive Logik" (Bad Neuenahr, November 1999) organizado por Carl-Friedrich Gethmann quien motivó la publicación de la primera versión alemana, mencionada anteriormente. Finalmente quisiera agradecer a la CNPq (Brasil) que financió mi estadía como investigador visitante a la UNICAMP (Campinas) durante el primer semestre del año 2000, lo que me permitió discutir algunas de las ideas presentadas en el presente artículo con el competente grupo de investigadores del CLEHC (Unicamp), bajo la dirección de Walter Carnielli.

estructura dialógica (incluyendo la teoría de la semántica de juegos) de la controversia argumentativa tanto epistemológica como lógica para la formulación de un concepto de conocimiento alternativo al concepto representacional y computacional usual en las ciencias cognitivas. Ahora bien, se supone que la lógica linear es el instrumento más apropiado para describir procesos computacionales de deducción. Irónicamente, las semánticas formales usuales, que podrían utilizarse para una fundamentación representacional de la lógica linear han sido hasta ahora más bien infructuosas. Es más, parece que la semántica de la lógica linear es esencialmente pragmática y basada en una estructura dialógica. Objetivo de este trabajo es discutir una nueva semántica para la lógica linear que destaca precisamente los fundamentos pragmáticos de tales aspectos dialógicos entendidos como una controversia argumentativa, a saber, contexto de argumentación, relevancia e intercambio de información.

Palabras-clave: *lógica linear; pragmática; semántica.*

I. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

Marcelo Dascal destaca en diversos artículos en los que analiza las consequencias de la concepción pragmática del significado, la importancia de estudiar la estructura dialógica (incluyendo la teoría de la semántica de juegos) de la controversia argumentativa tanto epistemológica como lógica para la formulación de un concepto de conocimiento alternativo al concepto representacional y computacional usual en las ciencias cognitivas – incluyendo la inteligencia artificial y la informática[2]. No es tanto el conocimiento como representación lo que debiera, según Dascal, estar en el centro de las investigaciones cognitivas, sino más bien la descripción de sistemas de conocimiento capaces de ponderar argumentos, rechazar fundamentaciones, y de poder elegir, de acuerdo a diversas consideraciones pragmáticas, los criterios de relevancia y razonabilidad adequados al contexto de la argumentación en cuestión.[3] El concepto de conocimiento que se desprende de esta propuesta es

[2] Cfr. Dascal (1998), (2000) y Dascal, Hintikka and Lorenz (1996).
[3] Cfr. Dascal (2000), pp. 177-178.

pragmático en un doble sentido: el conocimiento es relativo a un contexto y es además comunicativo. Es comunicativo en el sentido que un sistema cognitivo debe ser capaz de defenderse contra objeciones. Esto a su vez implica un proceso dialógico en el que ese sistema debe poder entender las objeciones del contendiente y debe poder manifestar su propia fundamentación en una forma entendible por el oponente – recurriendo por ejemplo a concesiones hechas por el contendiente en el curso del diálogo.[4] En otras palabra el carácter comunicativo de los sistemas cognitivos presuponen reciprocidad de acciones conjuntas para el intercambio de información necesario para el proceso argumentativo.[5]

Ahora bien, se supone que la lógica linear es el instrumento más apropiado para describir procesos computacionales de deducción en los que ocurre un flujo de intercambio de información. Irónicamente, las semánticas formales usuales, que podrían utilizarse para una fundamentación representacional de la lógica linear han sido hasta ahora más bien infructuosas. Es más, parece que la semántica de la lógica linear es esencialmente pragmática y basada en una estructura dialógica, entendida en el contexto de una semántica de acciones. Objetivo de este trabajo es discutir una nueva semántica para la lógica linear que destaca precisamente los fundamentos pragmáticos de tales aspectos dialógicos entendidos como una controversia argumentativa, a saber, contexto de argumentación, relevancia e intercambio de información. Para ello haremos uso de la lógica dialógica que experimenta actualmente un nuevo renacimiento. Diversos factores parecen responsables de este nuevo impulso que tiene su origen precisamente en al inteligencia artificial y la informática. A continuación se expondrán algunos de esos factores,

[4] Cfr. Dascal (2000), p. 175.
[5] Cfr. Dascal, Hintikka y Lorenz (1996), pp. 1375-77.

algunos de los cuales son de naturaleza técnica, otros en cambio de naturaleza más bien filosófico-semántica.

1. LOS FACTORES TÉCNICOS

La inteligencia artificial, las ciencias de la computación, la linguística, el derecho, la psicología cognitiva y la filosofía han generado una nueva demanda por una variedad de sistemas lógicos para distintos campos de aplicación. Esta demanda desencadenó a su vez una investigación intensiva de una pluralidad de sistemas lógicos antiguos y nuevos. Ahora bien, esta pluralidad conduce a la búsqueda de una estructura general que permita encuadrar a fines de comparación o combinación los diversos sistemas lógicos. Un paso importante en esa dirección fue la formulación de un principio implícito en los sistemas de Gentzen y que se conoce bajo el nombre de *Principio de Došen.* Este principio propone producir distintos sistemas lógicos (con las mismas reglas para las constantes lógicas comunes) por medio de modificaciones en las reglas estructurales (cfr. Došen (1988)).[6]

De hecho, la lógica dialógica está basada en un principio análogo. El conjunto de reglas se divide en: (1) el conjunto de reglas de partículas, que determina para cada constante lógica las acciones argumentativas que definen dicha constante lógica. Es decir, tales reglas determinan cómo atacar y cómo defender cada constante lógica y (2) el conjunto de reglas estructurales, que determina el desarrollo general del juego. Es decir, quién comienza, los turnos de las jugadas, cómo se gana, cómo se pierde,

[6] La expresión 'Principio de Došen' se debe a Heinrich Wansing ((1994), 128). Este principio juega un rol central en la *Lógica Display,* que fue propuesta por Nuel Belnap (1982) y desarrollada entre otros por Wansing (1998), y las lógicas subestructurales de Schröder-Heister (cfr. Schröder-Heister y Došen (1993)).

etc. Una simple reflexión hace ver que se pueden concebir distintos sistemas lógicos modificando las reglas estructurales. Así por ejemplo, en el contexto de una semántica dialógica, la lógica clásica se distingue de la lógica intuicionista por la distinta formulación de una sola regla estructural.

Es claro que se puede generar lógicas por medio de un procedimiento que es el inverso del principio de Došen: a saber, se puede generar lógicas modificando las reglas que definen las constantes lógicas. Un famoso ejemplo reciente de un procedimiento tal, que es a su vez tema del presente trabajo, es la formulación de la lógica linear de Jean-Yves Girard. Llamemos por ende a este procedimiento *Principio de Girard*.

2. LOS FACTORES SEMÁNTICO-FILOSÓFICOS

Desde la publicación del artículo de Andreas Blass *A game semantic for linear logic* (1992) se han desarrollado varios sistemas de lógica linear con ayuda del *Principio de Girard* (cfr. por ejemplo los trabajos de Samson Abramsky y Martin Hyland en Pitts y Dybjer (1997)). Estos desarrollos han sido apoyados por Jean-Yves Girard, quien en sus trabajos más recientes postula que la semántica de las constantes lógicas ha der buscada en una semántica dialógica basada en la idea que el significado de tales partículas esté determinado por las reglas que las definen. En efecto, la lógica dialógica resulta de una concepción pragmática de la semántica que se basa en la idea de aplicar la teoría del significado como uso a la lógica por medio de la formulación de reglas de acciones argumentativas en el contexto de una disputa lógica. Un aspecto importante de este concepto de semántica, recalcado frequentemente por Blass y Girard, es la posibilidad de explotar el intercambio de roles de ataque y defensa propio de la negación dialógica:

> My thesis is that the meaning of logical rules is to be found in the well-hidden geometrical structure of the rules themselves: typically, negation should not be interpreted by NO, but by the exchange between *Player* and *Opponent*. (Girard (1998), p. 1)[7]

El problema es que si bien la semántica dialógica de Blass es muy intuitiva, en realidad describe la lógica afín (en la que vale la simplificación para las partículas multiplicativas[8]). Por otra parte la semántica de juegos de Girard es muy complicada y la conexión con las intuiciones semánticas es difícil de establecer.

El objetivo principal del presente artículo es exponer una nueva semántica dialógica para la lógica linear, desarrollada recientemente por Shahid Rahman y Helge Rückert[9] y que recurre a ciertas ideas introducidos por los autores mencionados en el contexto de una semántica dialógica para la lógica de la relevancia[10]. La idea es que un argumento no es sólo el desarrollo de pasos en una demostración sino que también contiene pasos interactivos en un proceso en el curso del cual existe la posibilidad de intercambiar, aumentar, verificar o corregir informaciones. En este contexto tiene sentido no sólo poder diferenciar en un argumento partes redundantes y no redundantes sino también poder establecer cuántas veces ha sido utilizada una premisa. Entendiendo por ello la utilización de cada ocurrencia de una fórmula – obsérvese que en la lógica dialógica hay un modo muy natural para diferenciar entre

---

[7] Ver más abajo el capítulo sobre la negación linear (II.2.a.2).

[8] Para una definición de partículas (o constantes lógicas) multiplicativas ver más abajo capítulo II.2.a.

[9] Cfr. S. Rahman y H. Rückert (2002).

[10] La conexión entre lógica de la relevancia y lógica linear fue destacada por Avron (1988) y desarrollada para tablas semánticas por Marcello D'Agostino, Dov Gabbay y Krysia Broda (1999).

distintas ocurrencias de una fórmula, que consiste en asociar cada ocurrencia con una jugada.

II. DIALOGOS Y LA SEMÁNTICA DE LAS CONSTANTES LÓGICAS LINEARES[11]

Como es bien sabido, representa la lógica linear una lógica diseñada para operar deductivamente con recursos limitados. Supongamos, por ejemplo, que consideremos ciertas expresiones lógicas como regulando transiciones entre acciones. Es así que el condicional 'si A, entonces B' (en la notación de la lógica linear: $A \multimap B$), se lee entonces de la siguiente manera: Si se realiza una acción de tipo A, también puede realizarse una acción de tipo B. Recurriendo al ejemplo preferido de Girard: Si pago un dólar, recibo un atado de cigarrillos. Ahora bien, con cada aplicación del condicional resulta un nuevo token de la acción descripta por el tipo correspondiente ('pagar un determinado dólar para recibir un atado determinado de cigarrillos – es decir, pagar con uno de los dólares que forman parte de los recursos que posibilitan la acción para recibir uno de los atados de cigarrillos que forman parte de los mismos recursos'). En otras palabras, si después de haber realizado una acción del tipo descripto por el condicional, repito una acción de tipo A, tengo que usar otro de los dólares de mis recursos para obtener otro atado de cigarrillos (si es que aún hay dólares y cigarrillos a disposición).

Efectivamente, es posible pensar a la lógica linear como una combinación de una actitud de conciencia por recursos limitados con un horror por irrelevancias: no malgastar recursos no inagotables, no malgastar recursos con redundancias. La lógica de la relevancia impide la intro-

[11] La breve introducción a la lógica dialógica contenida en el apéndice está pensada para aquellos lectores no acostumbrados a la lógica dialógica (o a la notación de la presente versión de la lógica dialógica).

ducción imprudente de hipótesis redundantes restrinjiendo, por ejemplo, el uso de la simplificación. La lógica linear elimina el resto de redundancia eliminando la contracción: Si hay que usar un fórmula *n*-veces, entonces tiene que estar disponible *n*-veces (i.e., tiene que haber *n*-ocurrencias de esa fórmula). En otras palabras, la expresión $\Gamma \vdash A$, en donde Γ representa una sequencia finita de fórmulas y A una fórmula, se lee en la lógica linear como expresando que A es derivable del conjunto de hipótesis Γ usando cada (ocurrencia de una) hipótesis a lo sumo una vez. Esta lectura que impone una restricción muy determinada al uso de hipótesis es introducida por medio del principio de Girard mencionado anteriormente – es decir, por medio de nuevas constantes lógicas (o para expresarlo de otro modo, por medio de la introducción de cierto tipo especial de reglas que solamente se aplican a determinadas constantes lógicas).

Es común dividir las constantes lógicas de la lógica linear en dos conjuntos disyuntos: las partículas multiplicativas y las partículas aditivas. La idea intuitiva de esta clasificación puede verse comparando la conjunción aditiva con la multiplicativa. En una conjunción multiplicativa hay que usar cada miembro de la conjunción, en la conjunción aditiva basta con usar la conjunción una sola vez (basta por tanto usar sólo uno los miembros de la conjunción).

Ahora bien, en el contexto de la lógica dialógica se entiende una demostración como un proceso de disputa argumentativa (llamada diálogo) en el curso del cual dos contendientes asertan o disputan fórmulas por medio de acciones agresivas (ataques) y defensivas (defensas) – tales acciones se denominan jugadas. De este modo, como ya fue mencionado anteriormente, resulta muy natural pensar cada nueva jugada como una nueva acción argumentativa- aún cuando con ésa nueva jugada se aserte una nueva ocurrencia de una fórmula ya asertada en una jugada anterior – permitiendo un modo muy directo de describir la semántica de las partículas lineares. Pero antes algunas precisiones preliminares.

1. PRELIMINARES

Validez linear y de cómo se agotan las fórmulas

Como ya ha sido mencionado anteriormente la lógica linear resulta de un horror por el uso[12] redundante de recursos y la conciencia de que tales recursos no son inagotables. Esto se traduce en dos condiciones, una positiva y la otra negativa:

(1) Para probar la validez de una tesis hay que poder usar cada fórmula que haya sido asertada en el curso del diálogo – dado que en el curso de un diálogo la aserción de una fórmula se realiza por medio de una determinada jugada de ataque o defensa también se puede hablar del uso de una jugada determinada.

(2) Para probar la validez de una tesis no puede usarse una jugada más de una vez (con la excepción de aquellas jugadas en las que asertan fórmulas con exponenciales – ver II.2.d). Una vez que una jugada ha sido usada se dice que está *agotada*.

A fin de poder controlar en el curso de un diálogo si las condiciones (1) y (2) han sido satisfechas se hará uso de corchetes. Si una fórmula asertada está anotada entre corchetes esa fórmula ha sido usada y la jugada correspondiente no puede volver a usarse – es decir está agotada. Esta técnica permite la siguiente formulación de la definición de validez linear:

[12] Decimos que una *fórmula atómica* asertada por **O** ha sido *usada* sii **P** asertó esa fórmula para atacar o defenderse de una jugada de **O**. Decimos que una *fórmula compleja* ha sido *usada*, sii todos los ataques y defensas permitidos por las reglas de las constantes lógicas correspondientes han sido jugados.

Def. validez linear

Una fórmula posee validez linear de acuerdo a la semántica dialógica presentada más abajo sii **P** posse una estrategia ganadora (formal), que le permite ganar de tal modo que en todas las jugadas las fórmulas asertadas correspondientes se encuentran entre corchetes (a excepción de las fórmulas atómicas asertadas por **P**).

Contextos dialógicos y subdiálogos

La semántica aquí presentada supone distintos contextos. Es decir, distintas jugadas pueden ocurrir bajo diversas condiciones determinadas por el conjunto de fórmulas asertadas. La idea es la siguiente: supongamos que **P** asertó una conjunción, entonces **O** puede no solo elegir qué parte de la conjunción ha de ser defendida por **P**, sino que **O** puede también elgir bajo qué contexto de proposiciones asertadas el ha de defenderse – es obvio que **O** intentará elegir un contexto en dónde él mismo no hay concedido ninguna fórmula que pueda serle útil a **P**. Las reglas precisas para la elección de contextos serán dadas por las reglas de las partículas correspondientes y la siguiente restricción que se desprende de las observaciones anteriores:

Regla para la apertura de contextos dialógicos

Sólo **O** puede abrir nuevos contextos dialógicos. **P** sólo puede realizar jugadas en un contexto dialógica ya dado.

Ahora bien, es preciso en el caso de contextos dialógicos determinar cómo se conecta uno con el otro. Implementamos una tal conexión por medio del concepto de subdiálogo:

Def. Subdiálogo

(1) Si en el curso de un ataque o una defensa **O** abre un nuevo contexto dialógico ?, decimos que ? es un subdiálogo del contexto dialógico μ en el que ocurre la fórmula atacada o defendida que motivó la apertura de ese contexto dialógico.

(2) Todo contexto dialógico es subdiálogo de sí mismo (reflexividad).

(3) Si ξ es un subdiálogo de ν y ν un subdiálogo de μ, entonces ? es también un subdiálogo de μ (transitividad).

La introducción de contextos dialógicos y los correspondientes subdialógos puede implementarse notacionalmente de la siguiente manera:

Sistema de numeración para contexto dialógicos

(1) El primer contexto en el que **P** propone la tesis que motiva el principio del diálogo, lleva el número 1.

(2) El primer subdiálogo de μ lleva el número μ.1, el segundo μ.2, y así sucesivamente.

Los números que identifican el contexto dialógico serán anotados detrás de cada fórmula asertada. Así por ejemplo la expresión '*a* <1.1>' indica que la fórmula atómica *a* fue asertada en el contexto dialógico 1.1, que es el primer sudiálogo del diálogo.

La regla estructural formal y los contextos dialógicos

La regla estructural formal determina para lógicas no lineares que **P** puede asertar una fórmula atómica sii **O** la concedió explícitamente por medio de una jugada en la que se asertó precisamente ésa fórmula (ver apéndice). Para la lógica linear debemos considerar la posibilidad de que **P** pueda usar en el contexto dialógico ? una fórmula atómica asertada por **O** en el contexto dialógico μ. Esta posibilidad está contemplada por la siguiente regla:

La regla formal para la lógica linear

O puede asertar fórmulas atómicas siempre que lo precise – y le sea permitido por las demás reglas estructurales y las reglas de partículas. **P** puede asertar la fórmula atómica *a* en un contexto dialógico ? sii, **O** asertó precisamente ésa fórmula en el contexto dialógico μ, ? es un subdiálogo de μ, y **O** no está aún agotada (i.e., no está anotada entre corchetes).

Gráficamente:

O	**P**
a *(en el contexto dialógico* μ*)*	... *a* *(en un subdíalogo* ν *de* μ *elegido por* **P***)*

Corchetes: Siempre que **P** use *a*, en una jugada de ataque o defensa, la fórmula atómica *a* asertada por **O** se anotará entre corchetes (:[*a*]). La aserción de *a* por parte de **P** en cambio no se anotará entre corchetes.

Se desprende de esta regla que, dado que **P** depende de que **O** conceda fórmulas atómicas en contextos dialógicos útiles para su propia argumentación (i.e. para la argumentación de **P**), que **O**, siempre que pueda, intentará abrir un nuevo contexto diálogico – es decir, **O** intentará evitar permanecer en el mismo contexto dialógico en que concedió la fórmula atómica en cuestión y evitará crear subdiálogos en los que **P** pueda usar esa fórmula atómica. **P** seguirá la estrategia dual. Estas consideraciones estratégicas fueron contempladas en los ejemplos presentados más adelante de modo que no mostraremos las opciones que determinan malas jugadas – es decir, suponemos que **O** es un jugador inteligente.[13]

2. LAS REGLAS PARA LAS CONSTANTES LÓGICAS LINEARES

(a) Las constantes lógicas multiplicativas

(a.1) La conjunción multiplicativa (‘⊗’) y la disyunción multiplicativa (‘←’)

Una de las características principales de las constantes lógicas multiplicativas es que ninguna de sus subfórmulas ha de ser redundante – en contraste con la aditivas en dónde una de las subfórmulas es redundante. Eso hace que la semántica de la conjunción y la disyunción no se diferencian como en los sistemas formales habituales por medio de la cantidad de subfórmulas que hay que demostrar sino por una propiedad eminentemente propia de la semántica dialógica: la elección. Mientras que en la conjunción multiplicativa es el atacante quien elije el contexto dialógico en la disyunción es el defensor quien lo elije.[14]

---

[13] Estas observaciones son fundamentales para la introducción de estrategias dialógicas (ver III.2).

[14] Girard (1998, 5) escribe al respecto:

> Although “&” has obvious disjunctive features, it would be technically wrong to view it as a disjunction [...] (in the same way “←” [...] is technically a disjunction, but has prominent conjunctive features).

La semántica dialógica otorga un sentido claro a esta frase aparentemente sibilina de Girard: la disyunción multiplicativa es una disyunción pues es el defensor el que elije el contexto dialógico; por otra parte, tiene sin embargo

La conjunción multiplicativa (‘$\otimes$’): En la conjunción multiplicativa ‘$\otimes$’, también llamada *tensor*, el atacante tiene que solicitar la demostración de la parte izquierda y derecha de la conjunción y puede elegir para cada parte de la conjunción el contexto dialógico en el que el defensor ha de defenderse:

$\otimes$	**Ataque**	**Defensa**
$A\otimes B$ *(en el contexto dialógico μ)*	¿I *(en un subdiálogo ν de μ a elección del atacante)*	A *(en ν)*
	¿D *(en un subdiálogo ξ de μ a elección del atacante)*	B *(en ξ)*

Corchetes: Una vez que el ataque ‘¿I’ fue contestado con A, la subfórmula A de $A\otimes B$ se anotará entre corchetes: $[A]\otimes B$. Una vez que el ataque ‘¿D’ fue contestado con B, la subfórmula B de $A\otimes B$ se anotará entre corchetes: $A\otimes[B]$. La conjunción completa está agotada una vez que ambas partes de la conjunción llevan corchetes: $[A]\otimes[B]$.

La disyunción multiplicativa (‘$\leftarrow$’): En la disyunción multiplicativa ‘$\otimes$’, conocida como *par*, también tiene el defensor que demostrar la parte izquierda y derecha de la fórmula compleja, mas, a diferencia de la conjunción, es el defensor el que puede elegir el contexto dialógico en el que el ha de defender la fórmula en cuestión.

‘*conjunctive features*’ pues ambas partes han de defenderse. Análogamente se pude decir que la conjunción aditiva tiene ‘*disjunctive features*’.

$\leftarrow$	**Ataque**	**Defensa**
$A \leftarrow B$ *(en el contexto dialógico* μ*)*	¿ *(en* μ*)*	A *(en un subdiálogo* ν *de* μ *a elección del defensor)* B *(en un subdiálogo* ξ *de* μ *a elección del defensor)*

Corchetes: Una vez que se defendió la parte izquierda, la subfórmula *A* de *A*←*B* se anotará entre corchetes: [*A*]←*B*. Una vez que que se defendió la parte derecha, la subfórmula *B* de *A*←*B* se anotará entre corchetes: *A*←[*B*]. La disyunción completa está agotada una vez que ambas partes de la disyunción llevan corchetes: [*A*]←[*B*].

(a.2) La negación linear ('⊥') y el condicional linear ('—∘')

La negación linear ('⊥'): En la breve introducción a la lógica dialógica clásica e intuicionista expuesta en el apéndice se señaló que ante una ataque a una negación no hay defensa. La única respuesta posible es un contraataque. Ahora bien, un contraataque, como ha sido frequentemente mencionado por estudiosos de la semántica de juegos, genera un cambio de roles. La pregunta es qué es lo que realmente cambia. Es importante recalcar en este contexto que en las reglas de las partículas (=constantes lógicas) no es necesariamente siempre así que el defensor es el proponente y el atacante el oponente. Ataques y defensas son distinto tipo de jugadas disponibles tanto por el oponente como por el proponente[15].

El cambio de roles generado por la negación linear es un cambio de tipo de jugadas: El jugador que atacaba tiene ahora que defenderse y viceversa. Más precisamente, cuando el jugador **X** aserta $A^{\perp}$ está afirmando que en el contexto dialógico a la fórmula A puede ser refutada. El desafiante **Y,** en cambio, ataca $A^{\perp}$ aserta A afirmando con esa aserción que A no puede ser refutada en tal contexto dialógico. De este modo el atacante de $A^{\perp}$ se transformal en defensor de A:

$\perp$	**Ataque**	**Defensa**
$A^{\perp}$ *(en el contexto dialógico* μ*)*	A *(en* μ*)*	/ *(no hay defensa posible, solo puede responderse con un contraataque)*

Corchetes: Después que el atacante asertó A la negación se anotará entre corchetes: [$A^{\perp}$].

[15] El proponente, por tanto, es en esta versión de la lógica dialógica, el jugador que propuso la tesis que motivo el origen del diálogo y siempre será el mismo aún cuando en el curso del diálgo tenga que tomar el rol de atacante.

También sería pensable, aunque notacionalmente más complicado, identificar las asignaciones **P** y **O** con el rol de atacante y defensor e introducir, por ejemplo, la denominación 'negro' y 'blanco' para la identificación de los jugadores. Con una tal notación, el jugador identificado con el color negro, por ejemplo, puede en algunas jugadas tener el rol de **P** (=defensor) y en otras el rol de **O** (=atacante). Un uso especial de esa notación fue aplicado por Rahman y Rückert para la formulación de una semántica dialógica para la lógica conexa (ver Rahman y Rückert (2000)).

Es fácil de ver que la negación linear, si se juega con reglas estructurales clásicas, es involutiva, i.e., $A^{\perp\perp}$ y A son equivalentes.

El condicional linear ('$\multimap$'): En la lógica linear es habitual introducir el condicional con ayuda de la negación y la disyunción multiplicativa del modo obvio:

$$A \multimap B \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{\perp} \leftarrow B$$

De lo que resulta que el condicional pertenece al conjunto de la partículas mutliplicativas – en realidad, es pensable un condicional aditivo $A^{\perp} \oplus B$. Sin embargo no parece éste muy interesante, dado que de acuerdo a la semántica de las aditivas se puede prescindir de una de las partes del condicional, se pierda toda conexión entre antecedente y consequente.

A pesar de la equivalencia mencionada es útil de todos modos tener una regla de partícula propia para el condicional – por ejemplo si se quiere combinar una lógica con partículas lineares con una regla estructural intuicionista:

$\multimap$	**Ataque**	**Defensa**
$A \multimap B$ *(en el contexto dialógico* μ*)*	A *(en el subdiálogo* ν *de* μ *a elección del defensor)*	B *(en el subdiálogo* ν *de* μ *a elección del defensor)*

Corchetes: Después que el atacante asertó A, se anotará A entre corchetes: $[A] \multimap B$. Después que se asertó B, se anotará también B entre corchetes: $[A] \multimap [B]$. Se dice entonces que el condicional $A \multimap B$ está agotado.

(a.3) Ejemplos

Ejemplo 1:

O		P	
		$(a\multimap(a\multimap b))]\multimap[(a\multimap b)] <1>$	(0)
(1) $[a]\multimap[(a\multimap b)] <1>$	0	$[a]\multimap b <1>$	(2)
(3) $[a] <1>$	2		
(5) $a\multimap b <1.2>$		1 $a <1.1>$	(4)
O gana			

Es claro que la contracción no es válida. **P** propone en la jugada (0) la tesis que motiva el origen del diálogo bajo el contexto dialógico inicial 1. El oponente ataca en la jugada (1) el condicional concediendo el antecedente en ese mismo contexto. El proponente reacciona al ataque asertando el consequente del condicional. El combate comienza a tornarse más duro. El oponente ataca el condicional asertado por el proponente en la jugada (2) concediendo *a* y el proponente, dado que no puede defenderse con la atómica *b* (que no ha sido asertada aún por el oponente), utiliza *a* para atacar el condicional asertado por el oponente en la jugada (1). Después de la defensa del oponente (en el contexto nuevo 1.2) ante este último ataque, el proponente pierde. La razón es simple, para poder seguir jugando debiera el proponente atacar ahora el condicional asertado en la jugada (5), mas para ello debiera tener que utilizar la fórmula *a* asertada por el proponente en la jugada (3). Desgraciadamente, la fórmula está agotada pues ya fue utilizada una vez por él mismo en la jugada (4).

Ejemplo 2:

	O			**P**	
				$[(a\leftarrow b)^{\perp}]$—∘$[(a^{\perp}\otimes b^{\perp})]$ <1>	(0)
(1)	$[(a\leftarrow b)^{\perp}]$ <1>	0		$[a^{\perp}]\otimes[b^{\perp}]$ <1>	(2)
(3)	¿I <1.1>	2		$[a^{\perp}]$ <1.1>	(4)
(5)	¿D <1.2>	2		$[b^{\perp}]$ <1.2>	(6)
(7)	$[a]$ <1.1>	4		/	
	/		1	$[a]\leftarrow[b]$ <1>	(8)
(9)	¿ <1>	8		a <1.1>	(10)
(11)	$[b]$ <1.2>	6		/	
(9')	¿ <1>	8		b <1.2>	(12)
	P gana				

P gana también si se cambia el orden de los ataques. El lector puede comprobar que las otras leyes de De Morgan son también válidas.

Ejemplo 3:

	O		**P**	
			$[((a\leftarrow b)\otimes a^{\perp})]$—∘$[b]$<1>	(0)
(1)	$[(a\leftarrow b)]\otimes[a^{\perp}]$ <1> 0		b <1.2>	(10)
		1	¿I <1>	(2)
(3)	$[a]\leftarrow[b]$ <1>	3	¿ <1>	(4)
(5)	$[a]$ <1.1>	1	¿D <1.1>	(6)
(7)	$[a^{\perp}]$ <1.1>	7	a <1.1>	(8)
	/	3	¿ <1>	(4')
(9)	$[b]$ <1.2>			
	P gana			

También ésta fórmula es válida. **P** se defendió de todo ataque y todas las fórmulas – salvo las atómicas de **P** – están entre corchetes.

b) Las constantes lógicas aditivas
La conjunción aditiva (‘&’) y la disyunción aditiva (‘⊕’)

Las partículas aditivas se diferencian de las multiplicativas en que una vez que una de las subfórmulas correspondientes ha sido defendida toda la fórmula se considera agotada, lo que impide cualquier nuevo ataque o defensa de la fórmula en cuestión.

La conjunción aditiva (‘&’): Para la conjunción aditiva, ‘&’, también llamada *con* (en inglés: *with*), vale que el atacante sólo puede atacar una sola parte de la conjunción.

&	**Ataque**	**Defensa**
$A\&B$ *(en el contexto dialógico* μ*)*	¿I ¿D *(en un subdiálogo* ν *de* μ *a elección del atacante; el atacante ha de elegir uno y sólo uno de los ataques posibles)*	A B *(en* ν*)*

Corchetes: Una vez que una de los ataques ha sido defendido toda la fórmula se considera agotada y se anota entre corchetes: [$A\&B$].

Es obvio que para la conjunción aditiva valen: ($A\&B$)—∘A, ($A\&B$)—∘B.

La disyunción aditiva ('⊕'): Para la disyunción aditiva, '⊕', llamada *suma* (del inglés *sum),* vale que el defensor sólo puede defender una sola parte de la disyunción:

⊕	**Ataque**	**Defensa**
A⊕*B* *(en el contexto dialógico* μ*)*	¿ *(en* μ*)*	*A* *B* *(en un subdiálogo* ν *de* μ *a elección del defensor; el defensor ha de elegir una y sólo una de las defensas posibles)*

Corchetes: Una vez que una de las defensas ha sido jugada toda la fórmula se considera agotada y se anota entre corchetes: [*A*⊕*B*].

Se desprende de esta tabla que para la disyunción aditiva valen: $A \multimap (A \oplus B)$, $B \multimap (A \oplus B)$.

(3) Ejemplos

Ejemplo 4:

	O			**P**	
				$[(a\&b)^{\perp}] \multimap [(a^{\perp} \oplus b^{\perp})]$ <1>	(0)
(1)	$[(a\&b)^{\perp}]$ <1>0			$[a^{\perp} \oplus b^{\perp}]$ <1>	(2)
(3)	¿ <1>	2		$[a^{\perp}]$ <1>	(6)
	/				
(5)	¿I <1.1>	4		$[a\&b]$ <1>	(4)
(7)	$[a]$ <1>	6	1	a <1.1>	(8)
				/	
	P gana				

La variante en la que **O** ataca en la jugada (5) la parte derecha de la conjunción no cambia el resultado del juego pues entonces **P** se defenderá en la jugada (6) con la parte derecha de la disyunción.

Las leyes de De Morgan valen también para las partículas aditivas.

Ejemplo 5:

O			P	
				$[((a \multimap c)\&(b \multimap c))] \multimap [((a \oplus b) \multimap c)]$ <1> (0)
(1) $[(a \multimap c)\&(b \multimap c)]$ <1>	0		$[(a \oplus b)] \multimap [c]$ <1>	(2)
(3) $[a \oplus b]$ <1>	2		c <1.1.2>	(10)
(5) $[a]$ <1.1>		3	¿ <1>	(4)
(7) $[a] \multimap [c]$ <1.1>		1	¿I <1.1>	(6)
(9) $[c]$ <1.1.2>		7	a <1.1.1>	(8)
P gana				

Como es fácil de comprobar, tampoco aquí conduce a una modificación del resultado final la variante en la que **O** se defiende en la jugada (5) con *b*.

Ejemplo 6:

	O			P	
				$[((a \otimes b)\&(a \otimes c))] \multimap [(a \otimes (b \& c))]$ <1> (0)	
(1)	$[(a \otimes b)\&(a \otimes c)]$ <1>	0		$[a] \otimes [(b \& c)]$ <1>	(2)
(3)	¿I <1.1>	2		a <1.1>	(8)
(5)	$[a] \otimes [b]$ <1>		1	¿I <1>	(4)
(7)	$[a]$ <1>		5	¿I <1>	(6)
(9)	¿D <1.2>	2		$b \& c$ <1.2>	(10)
(11)	¿D <1.2.1>	10			
(13)	b <1>		5	¿D <1>	(12)
	O gana				

El dilema de **P** en este ejemplo es que debe decidirse ya en la jugada (4) por una de los dos ataques posibles a la conjunción aditiva de la jugada (1), justo en el momento en que aún no sabe cual de las partes será útil para las jugadas siguientes.

c) Los exponenciales ('!' y '?')

La semántica presentada más arriba sólo contempla el caso de recursos agotables. Sin embargo sería interesante contemplar la posibilidad de que algunos de los recursos son inagotables. Para este propósito fueron introducidas las partículas '!' y '?', que permiten la repetición de una acción de ataque o defensa.

$!A$ indica que la fórmula A puede ser atacada un número arbitrario de veces y que debe ser atacada al menos una vez.

!	**Ataque**	**Defensa**
$!A$ *(en el contexto dialógico μ)*	¿ *(en un subdiálogo ν de μ a elección del atacante)*	A *(en μ)*

Corchetes: Después de la defensa al primer ataque a la fórmula $!A$ anotamos A entre corchetes de la siguiente manera: $![A]$. El signo de admiración delante de los corchetes indica que A ha sido atacada al menos una vez, y que es posible (mas no necesario) volver a atacarla.

'?' es la partícula dual de '!. $?A$ indica que A debe ser defendida al menos una vez y que es posible (aunque no necesario) volver a defenderse con A un número arbitrario de veces:

?	**Ataque**	**Defensa**
?A	¿	A
(en el contexto dialógico μ*)*	*(en* μ*)*	*(en un subdiálogo* ν *de* μ *a elección del defensor)*

Corchetes: Después de la defensa al primer ataque a la fórmula ?A anotamos A entre corchetes de la siguiente manera: ?[A]. El signo de interrogación delante de los corchetes indica que A ha sido defendida al menos una vez, y que es posible (mas no necesario) volver a defenderse con ella.

La introducción de estas partículas permite formular en el lenguaje de la lógica linear la lógica clásica y la intuicionista. (Cfr. Girard (1998)).

Ejemplo 7:

Este ejemplo muestra una de las conexiones importantes entre las dos partículas exponenciales:

	O			**P**	
				$[!(a^{\perp})]\multimap[(?a)^{\perp}]$ <1>	(0)
(1)	$![(a^{\perp})]$ <1>	0		$[(?a)^{\perp}]$ <1>	(2)
(3)	?[a] <1>	2		/	
(5)	[a] <1.1>		3	¿ <1>	(4)
(7)	[$a^{\perp}$] <1.1>		1	¿ <1.1>	(6)
	/		7	a <1.1>	(8)
	P gana				

Ejemplo 8:

	O			**P**	
				[!(*a*&*b*)]⊸[(!*a*⊗!*b*)] <1>	(0)
(1)	![(*a*&*b*)] <1>	0		[!*a*]⊗[!*b*] <1>	(2)
(3)	¿I <1.1>	2		![*a*] <1.1>	(4)
(5)	¿D <1.2>	2		![*b*] <1.2>	(6)
(7)	¿ <1.1.1>	4		*a* <1.1.1>	(12)
(9)	[*a*&*b*] <1>		1	¿ <1>	(8)
(11)	[*a*] <1>		9	¿I <1>	(10)
(13)	¿ <1.2.1>	6		*b* <1.2.1>	(18)
(15)	[*a*&*b*] <1>		1	¿ <1>	(14)
(17)	[*b*] <1>		15	¿D <1>	(16)
	P gana				

III. VALIDEZ: ESTRATEGIAS GANADORAS Y ÁRBOLES DIALÓGICOS PARA LA LÓGICA LINEAR

Antes de presentar los árboles dialógicos para la lógica linear, serán expuestos los sistemas habituales para la lógica intuicionista y clásica.

(1) ÁRBOLES NO LINEARES

La validez se define en la lógica dialógica, como ya fue mencionado anteriormente, por medio del concepto de estrategia ganadora para **P**, i.e. la tesis A es lógicamente válida sii **P** pude defender A exitosamente contra todos los ataques permitidos de **O**. Decimos en éste caso que **P** tiene una *estrategia ganadora* para A. Una descripción sistemática de las estrategias ganadoras posibles se desprende de las siguientes observaciones:

- Si **P** ha de poder ganar independientemente de cómo juega **O**, entonces hay que considerar primero dos tipos de situaciones: Las situaciones en las que **P** asertó la fórmula en cuestión y las situaciones en las que **O** asertó tal fórmula. Llamemos a esas situaciones respectivamente casos **O** y casos **P**.

En este tipo de situaciones hay que diferenciar todavía los casos en que **P** puede elegir de los casos en que **O** puede elegir:

(1) **P** tiene una estrategia ganadora por medio de la *elección* de un ataque en los casos **O**, o por medio de la *elección* de una defensa en los casos **P** sii puede ganar en al menos uno de los desarrollos dialógicos (=ramas en el árbol de estrategias) elejibles.

(2) Cuando **O** puede *elegir* una defensa en los casos **O** o un ataque en los casos **P**, decimos que **P** tiene una estrategia ganadora sii puede ganar en todo desarrollo dialógico elejible por **O**.

Las reglas de cierre son las habituales para árboles semánicos: Una rama está cerrada sii contiene dos copias de una fórmula atómica, una signada por **P** y la otra por **O**. Un árbol para (**P**)*A,* i.e. un árbol que comienza con (**P**)*A*) está cerrado sii toda rama está cerrada. Una fórmula *A* es válida sii el árbol que comienza con (**P**)*A* está cerrado. Esto muestra que los árboles dialógicos para lógica clásica e intuicionista no son otra cosa que los árboles semánticos conocidos.

Para los árboles dialógicos intuicionistas hay que contemplar la regla estructural R_I2 ('last duty first') descripta en el apéndice. La idea es muy simple: El sistema de árboles dialógicos permite en un primer momento proceder como si se tratara de la lógica clásica, es decir, todas las fórmulas, aún las atómicas, que resulten de la aplicación de una reglas del árbol pueden ser escritas. Sin embargo, en un segundo momento, en cuánto se ataca un condicional de **P** o una negación de **P** toda otra fórmula **P** será tachada (esto determina las así llamadas estrategias simétricas, las asimétricas resultan de imponer esta regla del tachado después de anotar una fórmula **P**). La relación con la regla R_I2 debiera estar ahora clara: si un ataque a una fórmula **P** causa el tachado de todas las otras fórmulas **P**, entonces es obvio que a **P** le resta solamente responder al último de los ataques. Las fórmulas **P** que producen un tachado tal son caracterizadas gráficamente por la expresión "$\Sigma_{[O]}$", que se lee de la siguiente manera: conserve todas las fórmulas **O** del conjunto Σ y tache (=elimine) de ese conjunto todas las fórmulas **P** anteriores.[16]

Árboles dialógicos para la lógica clásica

Casos (**O**)	*Casos* (**P**)
$\Sigma, (\mathbf{O})A\vee B$	$\Sigma, (\mathbf{P})A\vee B$
--------------------------------	--------------------
$\Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿}>(\mathbf{O})A \mid \Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿}>(\mathbf{O})B$	$\Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿}>(\mathbf{P})A$ $\Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿}>(\mathbf{P})B$
$\Sigma, (\mathbf{O})A\wedge B$	$\Sigma, (\mathbf{P})A\wedge B$
---------------------	--------------------------------
$\Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿I}>(\mathbf{O})A$ $\Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿D}>(\mathbf{O})B$	$\Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿I}>(\mathbf{P})A \mid \Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿D}>(\mathbf{P})B$
$\Sigma, (\mathbf{O})A\to B$	$\Sigma, (\mathbf{P})A\to B$
--------------------------------	-------------------
$\Sigma, (\mathbf{P})A \ldots \mid <(\mathbf{P})A>(\mathbf{O})B$	$\Sigma, (\mathbf{O})A; (\mathbf{P})B$
$\Sigma\ (\mathbf{O})\neg A$	$\Sigma, (\mathbf{P})\neg A$
-----------------	---------------
$\Sigma, (\mathbf{P})A;\ /$	$\Sigma, (\mathbf{O})A;\ /$

---

[16] Ver detalles en Rahman (1993), Rahman y Rückert (1998-99) y Felscher (1985).

- Se dice que una fórmula X está dialógicamente signada si tal fórmula tiene la forma (**P**)X o la forma (**O**)X. Si Σ es un conjunto de fórmulas dialógicamente signadas y X es una fórmula dialógicamente signada entonces escribimos Σ, X en lugar de $\Sigma \cup \{X\}$.

Obsérvese que las fórmulas bajo la línea representan pares de jugadas de ataque y defensa – no una sola jugada. Es decir, tales fórmulas representan *rondas*.

Obsérvese también que las expresiones entre los paréntesis “<” y “>”, como por ejemplo $<(\mathbf{P})\text{¿}>$ o $<(\mathbf{O})\text{¿}>$, representan jugadas – más precisamente jugadas de ataque –, mas no son fórmulas asertadas que puedan ser desarrolladas.

Árboles dialógicos para la lógica intuicionista

Casos (**O**)	*Casos* (**P**)
$\Sigma, (\mathbf{O})A\vee B$ -------------------------------- $\Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿}>(\mathbf{O})A \mid \Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿}>(\mathbf{O})B$	$\Sigma, (\mathbf{P})A\vee B$ -------------------- $\Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿}>(\mathbf{P})A$ $\Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿}>(\mathbf{P})B$
$\Sigma, (\mathbf{O})A\wedge B$ --------------------- $\Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿I}>(\mathbf{O})A$ $\Sigma, <(\mathbf{P})\text{¿D}>(\mathbf{O})B$	$\Sigma, (\mathbf{P})A\wedge B$ -------------------------------- $\Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿I}>(\mathbf{P})A \mid \Sigma, <(\mathbf{O})\text{¿D}>(\mathbf{P})B$
$\Sigma, (\mathbf{O})A\rightarrow B$ -------------------------------- $\Sigma, (\mathbf{P})A \ldots \mid <(\mathbf{P})A>(\mathbf{O})B$	$\Sigma, (\mathbf{P})A\rightarrow B$ ------------------- $\Sigma_{[O]}, (\mathbf{O})A; (\mathbf{P})B$
$\Sigma, (\mathbf{O})\neg A$ ------------------ $\Sigma, (\mathbf{P})A; /$	$\Sigma, (\mathbf{P})\neg A$ --------------- $\Sigma_{[O]}, (\mathbf{O})A; /$

He aquí dos ejemplos en la notación de forma de árbol popularizada por Raymond Smullyan (1968):

Ejemplo 9:

(**P**) $((a \to b) \wedge a) \to b$
(**O**) $(a \to b) \wedge a$
(**P**) $\underline{b}$
(**O**) $(a \to b)$
(**O**) $\underline{a}$
(**P**) $\underline{a}$ (**O**) $\underline{b}$

El árbol cierra

En el ejemplo siguiente fue aplicada la regla intuicionista:

Ejemplo 10:

~~(**P**) $\neg\neg a \to a$~~
(**O**)$_{[O]}$ $\neg\neg a$
~~(**P**) a~~
~~(**P**) $\neg a$~~
(**O**)$_{[O]}$ a

El árbol no cierra

b) Árboles dialógicos para la lógica linear

Los árboles dialógicos para la lógica linear deben incluir reglas que contemplen lo siguiente[17]:

---

[17] Las partículas exponenciales no serán consideradas en los árboles para la lógica linear. La inclusión de las partículas exponenciales será motivo de otro trabajo.

- Las partículas multiplicativas
- Las partículas aditivas,
- El agotamiento de jugadas
- El cierre de ramas usando todas las jugadas de fórmulas atómicas.

La estructura de las reglas para los árboles dialógicos que incluyen las partículas multiplicativas no se diferencian en principio de las no lineares (obsérvese que los contextos dialógicos a nivel estratégico se traducen en ramas):

<table>
<tr><th>Casos (O)</th><th>Casos (P)</th></tr>
<tr><td>Σ, (O)<i>A</i>★<i>B</i>

Σ, <(P)¿>(O)<i>A</i> | Σ, <(P)¿>(O)<i>B</i></td><td>Σ, (P)<i>A</i>★<i>B</i>

Σ, <(O)¿>(P)<i>A</i>
Σ, <(O)¿>(P)<i>B</i></td></tr>
<tr><td>Σ, (O)<i>A</i>⊗<i>B</i>

Σ, <(P)¿I>(O)<i>A</i>
Σ, <(P)¿D>(O)<i>B</i></td><td>Σ, (P)<i>A</i>⊗<i>B</i>

Σ, <(O)¿I>(P)<i>A</i> | Σ, <(O)¿D>(P)<i>B</i></td></tr>
<tr><td>Σ, (O)<i>A</i>⊸<i>B</i>

Σ, (P)<i>A</i> ... | <(P)<i>A</i>>(O)<i>B</i></td><td>Σ, (P)<i>A</i>⊸<i>B</i>

Σ, (O)<i>A</i>; (P)<i>B</i></td></tr>
<tr><td>Σ, (O)$^{\perp}$A

Σ, (P)A; /</td><td>Σ, (P)$^{\perp}$A

Σ, (P)A; /</td></tr>
</table>

Para el control de fórmulas agotadas usamos aquí nuevamente el método de los corchetes:

Corchetes: Después de cada aplicación de una regla de los casos **O** o de los casos **P** se anotarán entre corchetes las fórmulas que estén encima de la línea de la regla.

Para asegurarnos que todas las jugadas han sido usadas se introducen la siguiente reglas:

RL1: *Utilización de todos las jugadas complejas*

Se ha de aplicar reglas estratégicas hasta que todas las fórmulas complejas dialógicamente signadas estén anotadas entre corchetes.

RL2: *Utilización de todos las jugadas atómicas:*

Si una rama cierra con ayuda del par (**O**)*a* y (**P**)*a*, entonces anotamos ambas fórmulas entre corchetes.

Estas reglas permiten la definición de cierre de un árbol dialógico para la lógica linear necesario para el concepto de validez linear:

Regla de cierre para árboles dialógicos lineares

Un árbol dialógico linear se dice cerrado cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

- todas las ramas están cerradas de acuerdo a la definición standard de cierre y en tales ramas se aplicó RL1 y RL2
- todas las fórmulas atómicas están anotadas entre corchetes.

Ejemplo 11:

$$
\begin{array}{llllllll}
 & & (\mathbf{P}) & [(a\multimap(a\multimap b))\multimap(a\multimap b)] & & & & \\
 & & (\mathbf{O}) & [a\multimap(a\multimap b)] & & & & \\
 & & (\mathbf{P}) & [a\multimap b] & & & & \\
 & & (\mathbf{O}) & [a] & & & & \\
 & & (\mathbf{P}) & [b] & & & & \\
(\mathbf{P}) & [a] & \mid & & (\mathbf{O}) & [a\multimap b] & & \\
 & & \mid & (\mathbf{P}) & a & \mid & (\mathbf{O}) & [b]
\end{array}
$$

El árbol no cierra

El árbol no cierra pues en la segunda rama (de izquierda a derecha) ocurre una fórmula atómica que no está entre corchetes. Para poder anotar esta fórmula entre corchetes habría que utilizar una vez más (**O**)*a*, pero esa fórmula está agotada.

Ejemplo 12:

$$
\begin{array}{lllll}
 & & (\mathbf{P}) & [((a\leftarrow b)\otimes a^{\perp})\multimap b] & \\
 & & (\mathbf{O}) & [(a\leftarrow b)\otimes a^{\perp}] & \\
 & & (\mathbf{P}) & [b] & \\
 & & (\mathbf{O}) & [a\leftarrow b] & \\
 & & (\mathbf{O}) & [a^{\perp}] & \\
 & & (\mathbf{P}) & [a] & \\
(\mathbf{O}) & [a] & \mid & (\mathbf{O}) & [b]
\end{array}
$$

El árbol cierra

Para la partículas aditivas ha de tomarse en cuenta que las bifurcaciones abren dos árboles distintos. Este hecho será implementado gráficamente por medio de la utilización del signo '||' (en lugar de '|') para bifurcaciones y la siguiente regla:

Bifurcaciones aditivas:

En el caso de una bifurcación aditiva se copiarán todas las fórmulas no agotadas (dado el caso, también aquellas en las que ocurran fórmulas multiplicativas) en cada una de las ramas producidas por la bifurcación (la fórmulas copiadas llevarán corchetes en las posiciones en la que ocurren antes de la bifurcación).

Ahora es preciso reformular la regla de agotamiento de fórmulas:

Regla de agotamiento de fórmulas aditivas:

Fórmulas en las que se aplica una regla de bifurcación aditiva, se dice agotadas en cuanto se anotan las dos fórmulas que resultan de la aplicación de la regla en cuestión. Fórmulas en las que se aplica una regla aditiva sin bifurcaciones, se dice agotada en cuanto se anota una de las dos fórmulas que resultan de la aplicación de la regla en cuestión – es decir, se puede anotar cualquiera de las dos subfórmulas mas no las dos juntas (esto ha sido implementado gráficamente por medio del uso de llaves).

Las reglas de las partículas aditivas para los árboles dialógicos son las siguientes:

Casos (**O**)	***Casos*** (**P**)
Σ, (**O**)$A \oplus B$ ------------------------------- Σ, <(**P**)¿>(**O**)A ‖ Σ, <(**P**)¿>(**O**)B	Σ, (**P**)$A \oplus B$ -------------------- Σ, <(**O**)¿>(**P**)A {Σ, <(**O**)¿>(**P**)B}
Σ, (**O**)$A \& B$ --------------------- Σ, <(**P**)¿I>(**O**)A {Σ, <(**P**)¿D>(**O**)B}	Σ, (**P**)$A \& B$ ------------------------------- Σ, <(**O**)¿I>(**P**)A ‖ Σ, <(**O**)¿D>(**P**)B

He aquí un ejemplo en el que ocurren fórmulas aditivas y multiplicativas:

Ejemplo 13:

(**P**) $[((a \multimap c) \& (b \multimap c)) \multimap ((a \oplus b) \multimap c)]$
(**O**) $[(a \multimap c) \& (b \multimap c)]$
(**P**) $[(a \oplus b) \multimap c]$
(**O**) $[a \oplus b]$
(**P**) $[c]$

(**O**) $[a]$ ‖ (**O**) $[b]$
(**O**) $[(a \multimap c) \& (b \multimap c)]$ ‖ (**O**) $[(a \multimap c) \& (b \multimap c)]$
(**P**) $[c]$ ‖ (**P**) $[c]$
(**O**) $[a \multimap c]$ ‖ (**O**) $[b \multimap c]$
(**P**) $[a]$ | (**O**) $[c]$ ‖ (**P**) $[b]$ | (**O**) $[c]$

El árbol cierra.

IV. OBSERVACIONES FINALES

Objetivo de este trabajo era destacar los rasgos pragmáticos de de la lógica linear por medio de una semántica dialógica. Este camino abre nuevos problemas dignos de una investigación futura. Quisiera en esta palabras finales mencionar algunos de estos problemas:

Cuantificadores lineares: En las formulaciones habituales de la lógica linear se considera a los cuantificadores como partículas aditivas, es decir, los cuantificadores pueden ser defendidos o atacados una sola vez. La formulación de cuantificadores multiplicativos parece más difícil, dado que no es posible pedir que los cuantificadores se defiendan o ataquen un sinnúmero de veces. Un primero paso para una solución podría basarse en las siguientes restricciones al uso de los cuantificadores: Cada vez que **O** ataque un cuantificador universal de **P**, o cuando defienda un cuantificador existencial, ha de llevar a cabo tales jugadas usando todas las constantes que ocurren en el curso del diálogo y una nueva.

Cada vez que **P** ataque un cuantificador universal de **O**, o cuando defienda un cuantificador existencial, ha de llevar a cabo tales jugadas usando todas las constantes que ocurren en el curso del diálogo y al menos una de ellas ha de haber sido introducida por primera vez por **O**. cuando atacó un cuantificador universal o se defendió de un cuantificador existencial. Si esta propuesta tiene éxito, pareciera entonces que puede establecerse cierta conexión entre los cuantificadores multiplicativos y la lógica dialógica libre (cfr. Rahman, Rückert y Fischmann (1997), Rahman (1999) y Rahman (2000)).

Lógica linear y lógica modal: La introducción de contextos dialógicos sugiere una conexión entre la lógica linear y la lógica dialógica modal (cfr.

Rahman y Rückert (1998[a])). Particularmente interesante parece la siguiente conexión entre la lógica linear y una restricción de S4[18]:

Lógica linear	*S4L*
a	${}_1a$
$A^{\perp}$	$\lozenge_1\neg_1A$
$A\otimes B$	${}_1A\wedge_2\ {}_1B$
$A\leftarrow B$	$\lozenge_1A\vee_2\lozenge_1B$
$A\&B$	${}_1A\wedge_1\ {}_1B$
$A\oplus B$	$\lozenge_1A\vee_1\lozenge_1B$
$!A$	${}_{1+}A$
$?A$	$\lozenge_{1+}A$

- Los índices indican cuántas veces ha de atacarse o defenderse una fórmula:
- El índice '1' señala que la fórmula en cuestión puede atacarse o defenderse una sola vez.
- El índice '2' señala que ambos ataques o defensas de la la fórmula en cuestión pueden jugarse una sola vez.
- El índice '1+' señala que la fórmula en cuestión puede atacarse o defenderse un número arbitrario de veces mas al menos una sola vez.

Lógica linear intuicionista: El modo habitual de obtener la lógica intuicionista de la linear es introducir exponenciales en la partículas aditivas obteniendo un sistema de deducción natural:

> Natural deduction is not equipped to deal with classical symmetry: several hypotheses and one (distinguished) conclusion. To cope with symmetrical systems one should be able to accept several conclusions at once... But then one immediately loses the tree-like structure of natural deduc-

[18] Los detalles de esta traducción serán desarrollados en Rückert (2000).

> tions, with its obvious advantage: a well-determined last rule. Hence natural deduction cannot answer the question. However it is still a serious candidate for an intuitionistic version of linear logic. (Girard (1998), p. 23)

Otro modo de producir lógica linear intuicionista, propio de la formulación dalógica, es utilizar la regla estructural intuicionista en lugar de la clásica.

Lógica linear no conmutativa: En estos últimos años han sido desarrollados varios sistemas de lógica linear no conmutativa. La idea de la no conmutatividad es fácil de implementar en el contexto de la lógica dialógica: Basta determinar el orden de ataques y defensas de las fórmulas lineares. Esto tendría la consequencia que $A \otimes B$ no es más equivalente con $B \otimes A$.

V. APÉNDICE: UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA DIALÓGICA CLÁSICA E INTUICIONISTA

La lógica dialógica, concebida por Paul Lorenzen en 1958 y desarrollada por Kuno Lorenz en diversas publicaciones a partir de 1961,[19] fue introducida como una semántica pragmática tanto para la lógica clásica como para la intuicionista. Esta semántica debiera por primera vez dar cuenta de las consequencias para la lógica de la concepción Wittgensteniana del significado como uso.

La propuesta dialógica estudia la lógica con ayuda del concepto de argumentación, que es standarizado en forma de un juego dialógico entre dos contendientes, que representan respectivamente los roles del *proponente* (**P**), quien presenta y defiende la proposición que motiva el origen del diálogo (i.e la asi llamada *tesis* del diálogo), y del *oponente* (**O**), quien desafía la tesis en cuestión. **P** ha de intentar la defensa de su tesis contra todos los ataques de **O** – en el curso de la defensa de la tesis **P** puede recurrir a las proposiciones concedidas o asertadas por **O**. Se dice que la tesis *A* es lógicamente válida sii **P** puede defender con éxito la tesis contra todos los posibles ataques permitidos de **O**. En el lenguaje de la teoría de juegos se dice entonces que **P** tiene una estrategia ganadora. Procedamos ahora a la breve descripción de la semántica dialógica para la lógica clásica e intuicionista.

Sean dados los elementos básicos de una lógica de primer orden, incluyendo letras cursivas para fórmula atómicas (*a*, *b*, *c*, ..), letras mayúsculas cursivas para fórmulas (*A*, *B*, *C*, ...), mayúsculas cursivas y en negrita para predicadores (***P***, ***Q***, ***R***, ...), y letras griegas τ_i para constantes de individuos. Un diálogo es una sucesión de jugadas en las que **P** y **O** asertan alternadamente (i.e., por turno) fórmulas de ese lenguaje. Cada jugada – con excepción de la jugada incial en la que el Proponente aserta

[19] Cfr. Lorenzen y Lorenz (1978) y Rahman (1993).

la tesis – es un acción argumentativa agresiva (ataque) o una acción argumentativa defensiva (defensa). En la lógica dialógica la semántica pragmática (i.e. significado como uso) está dada por dos tipos de reglas: Las reglas de *partículas* que determinan la semántica local y las reglas *estructurales* que determinan la semántica global..

Las reglas de partículas especifican para cada constante lógica un par (o pares) de jugadas argumentativas que consiste en un ataque y (cuando es posible) de una defensa. Cada uno de esos pares de jugadas se llama *Ronda*. Una ronda se *abre* con un ataque y se *cierra* con una defensa.

Reglas de partículas

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \wedge, \vee$	ATAQUE	DEFENSA
$\neg A$	A	/ *(El signo '/' señala que no hay defensa posible. Sólo queda contraatacar)*[20]
$A \wedge B$	¿I ------------------------- ¿D *(El atacante elije)*	A ------------------------- B
$A \vee B$	¿	A ------------------------- B *(El defensor elije))*
$A \rightarrow B$	A	B
$\wedge_x A$	$¿_\tau$ *(El atacante elije)*	$A[\tau/x]$
$\vee_x A$	¿	$A[\tau/x]$ *(El defensor elije)*

---

[20] En otros trabajos se encuentra el signo '⊗' en lugar de '/'. En el presente artículo '⊗' fue usado para una constante lógica.

- En la primera columna están anotadas las fórmulas en cuestíon, en la segunda columna los posibles ataques y en la tercera las defensas posibles (si es que hay defensa posible alguna).
- El signo '/' señala que no hay defensa posible. Sólo queda contra atacar.
- Obsérvese que por ejemplo. '¿I' representa una jugada – más precisamente representa el ataque "muéstrame la parte izquierda de la conjunción" –, pero no es una fórmula.
- Si uno de los jugadores aserta una conjunción en el curso de una diálogo, entonces, de acuerdo a esta tabla, puede el desafiante comenzar un ataque solicitando que el defensor muestra la parte izquierda (¿I) o la derecha (¿D) de la conjunción. En el caso de la disyunción el atacante solicita que el defensor elija para su defensa alguna de las partes de la disyunción.

Las reglas estructurales determinan el desarrollo general del juego. Es decir, quién comienza, los turnos de las jugadas, cómo se gana, cómo se pierde, etc.

Reglas estructurales

R0 (Regla de inicio de juego)

Las jugadas serán realizadas de a turnos por los jugadores **P** y **O**. La tesis o fórmula inicial será propuesta por **P** (=jugada inicial). Cada jugada que sigue a la jugada inicial es un ataque o una defensa de acuerdo a las reglas de las partículas y a las demás reglas estructurales.

R1 (regla formal para fórmulas atómicas)

P sólo puede asertar una fórmula atómica sii **O** ha asertado esa misma fórmula atómica antes. **O** puede asertar fórmulas atómicas siempre que lo necesite. Fórmulas atómicas no pueden ser atacadas.[21]

R_I2 (Regla estructural intuicionista)

Cada jugador puede atacar en cada jugada cualquier fórmula compleja del contendiente o defenderse del *último* de los ataques ('last duty first'). Es decir, cuando es el turno del jugador **X** en la posición del juego n y hay rondas abiertas por ataques en las posiciones m y l y vale $m<l<n$, **X** tiene que defenderse del ataque de l (y no le está permitido defenderse de m).[22]

Estas reglas definen la semántica de la lógica intuicionista. La semántica dialógica para la lógica clásica resulta de la siguiente regla que reemplaza a R_I4:

R_C2 (regla estructural clásica)

Cada jugador puede atacar en cada jugada cualquier fórmula compleja del contendiente o defenderse de cualquiera de los ataques (aún cuando éste ya haya sido defendido una vez).[23]

---

[21] Si uno piensa en definir validez y en construir tablas correspondientes para estrategias ganadoras (que son muy similares a las tablas semánticas) se puede introducir la siguiente reformulación de la regla formal: **P** sólo puede asertar una fórmula cualquiera (atómica o no) si **O** ha asertado esa misma fórmula antes. **O** puede asertar fórmulas siempre que lo necesite mas no puede atacar fórmulas concedidas por él mismo.

[22] Obsérvese que el último ataque no ha de ser necesariamente la última jugada.

[23] En la presentacion de la lógica linear se usará exclusivamente la regla estructural clásica.

Para la formulación precisa de la siguiente regla que establece que sólo puede repetirse una defensa o un ataque si con ello se abren nuevas posiblidades de juego – y que no es relevante para una lógica linear sin exponenciales- han de ser introducidas primero las siguientes definiciones (obsérverse que la indicaciones respecto a contextos dialógicos solo es relevante para la lógica modal y la linear).[24]

Decimos de un ataque que es *una repetición estricta* sii

Si se ataca un jugada determinada, a pesar que la misma jugada (del mismo contexto dialógico) ya había sido atacada antes con el mismo tipo de ataque. (obsérvese que según esta definición ¿L y ¿R representan ataques distintos).

En el caso de jugadas por medio de las cuales se ataca un cuantificador universal con una constante nueva hay que añadir a la lista de repeticiones estrictas el siguiente tipo de jugada:

Si se ataca con una nueva constante τ un jugada determinada en la que se ha asertado un cuantificador universal, a pesar que la misma jugada (del mismo contexto dialógico) ya había sido atacada antes con la constante σ que era nueva para entonces.

Decimos de una defensa que es *una repetición estricta* sii

Una jugada μ de ataque, que ya había sido defendida antes con la jugada de defensa ν, es vuelta a defender con la misma fórmula (obsérvese que

[24] La presente versión de la regla de no retraso incorporó ciertas sugerencias de João Marcos (Unicamp).

según esta definición *a* y *b* representan defensas distintas de la disyunción $a \vee b$)

En el caso de jugadas por medio de las cuales se defiende un quantificador existencial con una constante nueva hay que añadir a la lista de repeticiones estrictas el siguiento tipo de jugada:

Si se ataca con una nueva constante τ una jugada determinada en la que se ha asertado un cuantificador existencial, a pesar que la misma jugada (del mismo contexto dialógico) ya había sido defendida antes con la constante σ que era nueva para entonces.

R3 (Regla de no retraso por repetición redundante)

En el contexto de un juego *con regla estructural clásica* (ver $\mathbf{R_C 2}$) **P** puede hacer uso de la repetición estricta de una defensa asertando *a* (atómica) dos o más veces sii **O** concedió antes *a* dos o más veces. Ninguna otra repetición estricta es lícita.

En el contexto de un juego *con regla estructural clásica o intuicionista* **P** puede hacer uso de la repetición estricta de un ataque sii **O** concedió una nueva fórmula atómica que puede ser ahora utilizada por **O**. Ninguna otra repetición estricta es lícita.

R4 (Regla de ganancia)

El jugador **X** gana sii es el turno del jugador **Y** y éste no tiene más jugadas disponibles, es decir no puede atacar o defenderse sin tener que repetir una jugada que no abre nuevas posibilidades de juego.

Def. Validez

La tesis A es lógicamente válida sii **P** puede defender A exitosamente contra todos los ataques permitidos (por las reglas de partículas y por las reglas estructurales) de **O**. Decimos en éste caso que **P** tiene una *estrategia ganadora* para A.[25]

Procedimientos sistemáticos para controlar si es que realmente hay una estrategia ganadora serán dados en el texto principal (ver capítulo III).

Ejemplo 1 (en este ejemplo no hay diferencia si se usa la regla estructural clásica o la intuicionista):

	O			**P**	
				$((a\rightarrow b)\wedge a)\rightarrow b$	(0)
(1)	$(a\rightarrow b)\wedge a$	0		b	(8)
(3)	$a\rightarrow b$		1	¿I	(2)
(5)	a		1	¿D	(4)
(7) b			3	a	(6)
P gana					

Ejemplo 2 (con regla estructural clásica):

	O		**P**	
			$\wedge_x(\boldsymbol{P}_x\vee\neg\boldsymbol{P}_x)$	(0)
(1)	¿$_\tau$	0	$\boldsymbol{P}_\tau\vee\neg\boldsymbol{P}_\tau$	(2)
(3)	¿	2	$\neg\boldsymbol{P}_\tau$	(4)
(5)	$\boldsymbol{P}_\tau$	4	/	
(3')	¿	2	$\boldsymbol{P}_\tau$	(6)
P gana				

[25] Para pruebas de consistencia y completitud cfr. Barth y Krabbe (1982), Krabbe (1985), y Rahman (1993).

Observaciones a los ejemplos

- Notación:
  - Las jugadas están numeradas en la forma sucesiva temporal en que han sido llevadas a cabo- sin embargo no se encuentran anotadas en es orden sino que han sido anotadas de tal modo que cada defensa se encuentra en la misma línea que el ataque correspondiente.
  - Números entre paréntesis indican el número de la jugada.
  - Números sin paréntesis indican contra qué jugada se dirije el ataque.

- En el ejemplo 2 se muestra el uso de la regla estructural clásica: El proponente puede aquí defenderse de un ataque que no fue el último de los ataques. Esto le permite asertar $\boldsymbol{P}_{\tau}$ en la jugada (6). Por razones notacionales se repitió en el gráfico del diálogo el ataque del oponente, mas en realidad no es una jugada que fue llevada a cabo – por ello la jugada no fue numerada nuevamente sino que se repitió el número de la jugada original con un apóstrofe.

El próximo ejemplo muestra cómo aplicar la regla de no retraso.[26]

[26] João Marcos (Campinas), usó este ejemplo en un seminario ofrecido por mí en el CLEHC (UNICAMP, Campinas, Brasil) para mostrar que versiones anteriores de la regla de no repetición debieran ser reformuladas con mayor precisión.

Ejemplo 3 (con regla estructural clásica):

	O		P	
			$((a\to b)\to a)\to a$	(0)
(1)	$(a\to b)\to a$	0	a/a	(4)/(6)
(3)	a		$a\to b$	(2)
(5)	a	2		

P wins

Aquí el astuto oponente no se da por vencido después de la jugada defensiva 4 del proponente y ataca la jugada 2 asertando *a* una vez más. Pero precisamente esta segunda aserción de *a* le permite al proponente repetir esa defensa.

En los próximos ejemplos mostramos un tipo de diálogo llamado diálogo con hipótesis. En este tipo de diálogos el proponente aserta su tesis bajo condición de ciertas hipótesis. Una hipótesis tal será tratada como una concesión que el oponente hizo al comienzo del diálogo. Dichas hipótesis (concedidas) serán formuladas por medio de letras esquema´ticas y el proponente puede en el curso del diálogo hacer uso de tales hipótesis solicitando primero por una instanciación adecuada (de acuerdo a la elección del proponente) de las letras esquemáticas correspondientes.[27] En el primero de los dos próximos ejemplos se muestra como obtener *tertium non datur* (con regla estructural intuicionista) por medio de una adequada instanciación de la ley de Peirce:

[27] En realidad, para el caso de diálogos con hipótesis hay que extender la regla de no repetición de modo de impedir repeticiones innecesarias de instanciaciones.. Una tal extensión no es difícil si se piensa que uns jugada en la que se solicita una instanciación funciona en form análoga a un ataque a un cuantificador universal: El Proponente puede solicitar instanciaciones hasta que las hipótesis hayan sido instanciadas con todas las variables proposicionales que ocurran en la tesis. Dejo los detalles para el atento lector.

Ejemplo 4 (con regla estructural intuitionista):

O			**P**	
H: $(\mathfrak{R}\to\mathfrak{I})\to\mathfrak{R})\to\mathfrak{R}$			$a\vee\neg a$	(0)
(1)	¿	0		
$((a\vee\neg a)\to\neg(a\vee\neg a))\to(a\vee\neg a)$ $\to (a\vee\neg a)$			H: ¿ $(a\vee\neg a)/\mathfrak{R}$, $\neg(a\vee\neg a)/\mathfrak{I}$	(2)
			3 $((a\vee\neg a)\to\neg(a\vee\neg a))\to(a\vee\neg a)$	(4)
(5)	$(a\vee\neg a)\to\neg(a\vee\neg a)$	4	$a\vee\neg a$	(6)
(7)	¿	6	3 $\neg a$	(8)
(9)	a	8	/	
(11)	$\neg(a\vee\neg a)$		5 $a\vee\neg a$	(10)
	/		11 $a\vee\neg a$	(12)
(13)	¿	12	a	(14)

P wins

En la jugada 3, el proponente solicita que el oponente instancie $\mathfrak{R}$ con $(a\vee\neg a)$ y $\mathfrak{I}$ con $\neg(a\vee\neg a)$.

En el último ejemplo se muestra como, jugando con la regla estructural intuicionista, puede obtenerse tertium non datur por medio de una instanciación adequada de la doble negación:

Ejemplo 5 (con regla estructural intuitionista):

O			P		
H: $\neg\neg\Re\to\Re$				$a\vee\neg a$	(0)
(1)	¿	0			
(3)	$\neg\neg(a\vee\neg a)\to(a\vee\neg a)$		H:	¿ $(a\vee\neg a)/\Re$	(2)
			3	$\neg\neg(a\vee\neg a)$	(4)
(5)	$\neg(a\vee\neg a)$	4		/	
	/		5	$a\vee\neg a$	(6)
(9)	¿	6		$\neg a$	(8)
a		8		/	
	/		5	$a\vee\neg a$	(10)
(13)	¿	10		a	(12)

P wins

Aquí puede el proponente repetir por medio de la jugada 10 un ataque a la jugada 5 pues el oponente introdujo antes una (nueva) fórmula atómica.

BIBLIOGRAFÍA

ABRAMSKY, S. (1997). 'Semantics of Interaction: an Introduction to Game Semantics'. In: A. Pitts y P. Dybjer (eds.), *Semantics and Logics of Computation* (Cambridge, Cambridge University Press), pp. 1-31.

AVRON, A. (1988). 'The semantics and proof theory of linear logic', *Theoretical Computer Science*, **57**, pp. 161-184.

BARTH, E. y KRABBE, E. (1982). *From Axiom to Dialogue: A Philosophical Study of Logics and Argumentation* (Berlin/New York).

BELNAP, N. (1982). 'Display Logic', *Journal of Philosophical Logic*, 11, 1982, pp. 375-417.

BLASS, A. (1992). 'A Game Semantics for Linear Logic', *Annals of Pure and Applied Logic* **56**, pp. 183-220.

DASCAL, M. (1998). 'The study of controversies and the theory and history of science', *Science in Context*, 11, 1998, pp. 147-154.

DASCAL, M. (2000). 'Künstliche Intelligenz und Philosophie. Das Wissen über Repräsentationen und die Fähigkeit des Begründens'. In: K. Buchhoz, S. Rahman, I. Weber (eds.) *Wege zu Vernunft. Philosophieren zwischen Tätikgeit und Reflexion* (Frankfurt/New York, Verlag), 1999, pp. 161-179.

DASCAL, M., HINTIKKA, J. y LORENZ, K. (1996). 'Jeux dans le langage. Games in Language. Spiel in der Sprache'. In: M. Dascal, D. Gerhardus, K. Lorenz, G. Meggle (eds.) *Sprachphilosophie. Philosophy of Language. La philosophie du langage* (Berlin/New York, Walter de Gruyter), 1996, Vol. 2, pp. 1371-1390.

D'AGOSTINO, M., GABBAY, D. und BRODA, K. (1999). 'Tableau Methods for Substructural Logics'. In: M. D'Agostino, D. Gabbay, R. Hänhle, J. Posegga (eds.) *Handbook of Tableau Methods* (Dordrecht/Boston/London, Kluwer), pp. 397-468.

DOŠEN, K. (1988). 'Sequent Systems and Groupoid Models I', *Studia Logica*, 47, 1988, pp. 353-389.

FELSCHER, W. (1985). 'Dialogues as a Foundation for Intuitionistic Logic'. In: Gabbay, D. y Guenthner, F. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Bd. III, Dordrecht, 1983, pp. 341-372.

GABBAY, D. y RAHMAN, S. (2000). 'A New Dialogical Semantics for Linear Logic (first draft)', Typoscript.

GIRARD, J.-Y. (1993). 'Linear Logic: Its Syntax and Semantics'. In: J.-Y. Girard, Y. Lafont and L. Regnier (eds.), *Advances in Linear Logic* (Cambridge, Cambridge University Press), pp. 1-42.

GIRARD, J.-Y. (1998). 'On the Meaning of Logical Rules I: Syntax vs. Semantics', Typoscript.

HYLAND, M. (1997). 'Game Semantics'. In: A. Pitts and P. Dybjer (eds.), *Semantics and Logics of Computation* (Cambridge, Cambridge University Press), pp. 131-182.

KRABBE, E. (1985). 'Formal Systems of Dialogue Rules', *Synthese*, 63(3), 1985, pp. 295-328.

LORENZEN, P. y LORENZ, K. (1978). *Dialogische Logik*, Darmstadt, 1978.

RAHMAN, S. (1993). *Über Dialoge, protologische Kategorien und andere Seltenheiten*, Frankfurt a. M., 1993.

——————. (1999). 'Ways of Understanding Hugh MacColl's Concept of Symbolic Existence', *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, pp. 35-58.

——————. (2000). 'On Frege's Nightmare'. In: H. Wansing (ed.) *Essays on Non-Classical Logic* (London/Singapore, World Scientific). A aparecer en noviembre 2001.

RAHMAN, S. y CARNIELLI, W. (2000). 'The Dialogical Approach to Paraconsistency', *Synthese*, vol. 125, 1-2, 2000, pp. 201-231.

RAHMAN, S. y RÜCKERT, H. (1998a). 'Dialogische Modallogik (für *T*, *B*, *S4* und *S5*)', FR 5.1 Philosophie, Universität des Saarlandes, Memo Nr. 25, 11, 1998 (en prensa en *Logique et Analyse*).

——————. (1998b). 'Dialogische Logik und Relevanz', *FR 5.1 Philosophie, Universität des Saarlandes*, Memo Nr. 27, 12, 1998.

——————. (1998-99). 'Die pragmatischen Sinn- und Geltungskriterien der Dialogischen Logik beim Beweis des Adjunktionssatzes', *Philosophia Scientiae*, (3)3, 1998-99, pp. 145-170.

——————. (2000). 'Dialogical Connexive Logic'. In: Rahman, S. y Rückert, H. (eds.), *New Perspectives in Dialogical Logic*, vol. 127 (1/2), 2001, pp. 105-139.

RAHMAN, S. y RÜCKERT, H. (eds.) (2001). *New Perspectives in Dialogical Logic* volumen especial de *Synthese*, con contribuciones de P. Blackburn (Nancy), D. Gabbay (King's College), J. Woods (Lethbridge), J. Hintikka (Boston), E. Krabbe (Groningen), S. Rahman (Lille), H. Rückert (Saarbrücken), G. Sandu (Helsinki), H. Praaken (Utrecht), y J. P. Van Bendegem (Bruselas), vol. 127 (1/2), 2001 .

——————. (2002), 'Eine neue dialogische Semantik für die lineare logik'. In: Gethmann, C.F. (Ed.), *Neue Perspektiven in der Konstruktiven Logik* (volumen en preparación).

RAHMAN, S., RÜCKERT, H. y FISCHMANN, M. (1997). 'On Dialogues and Ontology. The Dialogical Approach to Free Logic', *Logique et Analyse*, **160**, pp. 357-374.

RÜCKERT, H. (2000), 'Eine Modale Semantik für die Lineare Logik'. En preparación.

SCHRÖDER-HEISTER, P. and DOŠEN, K. (1993), *Substructural Logics* (Oxford, Oxford University Press).

SMULLYAN, R. (1968). *First Order-Logic* (Heidelberg, Springer-Verlag).

WALTON, D. N. (1985). 'New Directions in the Logic of Dialogue', en D. N. Walton (ed.), *The Logic of Dialogue, Synthese* **63**, pp. 259-274.

WANSING, H. (1994). 'Sequent Calculi for Normal Modal Propositional Logics', *Journal of Logic Computation* **4**, pp. 125-142.

——————. (1998). *Displaying Modal Logic* (Dordrecht, Kluwer).