CDD: 193

A LÓGICA DO *TRACTATUS*[*]

JOÃO VERGÍLIO GALLERANI CUTER

Departamento de Filosofia - FFLCH,
Universidade de São Paulo,
Av. Prof. Luciano Gualberto, 315
05508-900 SÃO PAULO, SP

galleranicuter@uol.com.br

Abstract: *A lógica do Tractatus está baseada na negação do conceito fregiano de função e da teoria dos tipos de Russell. A proposição elementar é vista como uma concatenação de nomes e o nome é visto como um símbolo essencialmente insaturado. A teoria dos tipos, por sua vez, é tomada como um contra-senso: ela diz o que não pode ser dito e tenta antecipar dogmaticamente aquilo que apenas a análise lógica da linguagem poderia revelar. Em seu lugar, Wittgenstein insere o conceito de figuração lógica e a distinção entre mostrar e dizer. Sem a hierarquia dos tipos, Wittgenstein não tinha como conservar a análise fregiana das atribuições numéricas. Tudo que se conseguia com o auxílio das chamadas "propriedades hereditárias", no entanto, pode ser conseguido no Tractatus com as "séries de formas".*

Palavras-chave: *Wittgenstein; Tractatus Lógico-Philosophicus; lógica; Frege; Russell; teoria dos tipos; logicismo.*

Uma comparação do *Tractatus Logico-Philosophicus* com qualquer manual de lógica produzido a partir dos anos trinta pode revelar diferenças surpreendentes. Tais diferenças podem ser instrutivas sob pelo menos dois pontos de vista. Ao historiador da filosofia, elas revelam

[*]Este artigo faz parte do desenvolvimento de um projeto de pesquisa financiado pela Fapesp. Agradeço aos professores Michael Wrigley e Bento Prado de Almeida Ferraz Neto, bem como ao meu aluno Leonardo Kiyoshi Toshimitsu pelos comentários e sugestões.

aspectos importantes da filosofia de Wittgenstein que acabaram sendo encobertos por uma projeção indevida, sobre o *Tractatus*, de concepções completamente estranhas, e até mesmo opostas às doutrinas mais fundamentais do livro. O treinamento técnico a que qualquer historiador deve submeter-se e o estilo aforismático adotado por Wittgenstein em seu primeiro livro convergem no sentido de propiciar uma espécie de contrabando conceitual de mão única, indo dos manuais para o *Tractatus*, e obscurecendo a compreensão correta deste último. Creio, no entanto, que a denúncia destas projeções indevidas não tenha interesse apenas para a história da filosofia. O mero estabelecimento de diferenças importantes entre essa espécie de sedimento histórico que foi se depositando nos manuais e certas singularidades de uma concepção particular da lógica, como aquela do *Tractatus*, é um convite à reflexão sobre aquilo que muitas vezes se subtrai ao exame crítico por ter-se tornado excessivamente costumeiro.

I

Se abrirmos um bom manual de lógica, é bem provável que encontremos logo nas primeiras páginas a descrição de um arsenal sintático que inclui, entre outras coisas, 'uma lista denumerável de símbolos chamados *variáveis individuais*', 'uma lista denumerável de símbolos chamados *parâmetros individuais*' e, 'para cada inteiro positivo *n*, uma lista denumerável de símbolos chamados *predicados n-ários*, ou *predicados de grau n*' (cf. Smullyan (1995), p. 43). Isto prepara a definição das *fórmulas atômicas*, de que as *sentenças atômicas* serão um caso particular. É realmente notável, posto que muito pouco notado, o quanto este modelo de análise é tributário da distinção fregiana entre conceito e objeto, que reutiliza, num contexto completamente distinto, o critério aristotélico para a caracterização da substância primeira em relação à substância segunda e a todas as outras categorias: a impossibilidade de se predicar o nome de um objeto de alguma outra coisa (Frege (1967), pp. 168-9]. A predicação se caracteriza, antes de mais nada, pela impossibilidade de inversão dos termos sujeito e predicado. Faz sentido afirmar, a respeito de uma determinada folha de papel, que ela é verde, mas não faz sentido algum afirmar, a respeito da cor verde, que ela é *esta* folha de papel. Nos casos em que a inversão parece permitida, devemos perceber a presença implícita de uma afirmação de identidade. A estrela da manhã não 'é' Vênus no mesmo sentido em que ela 'é' brilhante: ela é *idêntica* a Vênus, e *está subsumida* ao conceito 'ser brilhante'. Por isso mesmo, devemos estabelecer uma distinção categorial entre expressões como 'Vênus' e 'a Estrela da Manhã', que são nomes próprios, ou nomes de objetos, e expressões como 'ser brilhante' e 'ser idêntico a Vênus', que são predicados gramaticais cuja referência (*Bedeutung*) é um conceito (Frege (1967), p. 168n).

De um ponto de vista puramente gramatical, o predicado é um caso especial das expressões funcionais – uma expressão marcada por uma falta, por um lugar vazio, e que só produz uma expressão completa quando é preenchida por um ou mais 'argumentos'. Isto vale tanto para funções numéricas, como '$2x^3+x$', quanto para funções proposicionais, como '$x^2=1$' (Frege (1967), p. 128). É neste mecanismo de composição, no qual as proposições aparecem como o resultado do preenchimento de expressões incompletas, insaturadas, que se apóia a sintaxe lógica adotada por Frege e herdada como um dogma inabalável por toda quase toda a lógica produzida ao longo do século XX. Será mais fácil, com efeito, encontrar opositores do princípio do terceiro excluído do que alternativas a esse modelo de análise que vê a proposição elementar como o resultado do preenchimento, por nomes, de uma função proposicional 'carente de complementação'. O *Tractatus* talvez seja a única exceção.

Com efeito, toda a análise lógica do *Tractatus* está assentada numa negação radical deste modelo de análise que opõe nomes, de um lado, a funções proposicionais, do outro. Todo nome é, no *Tractatus*, uma função proposicional. Não por acaso, a seção em que esta tese é estabelecida vem encabeçada por uma reafirmação, quase em tom de paródia, de um famoso princípio enunciado por Frege. Examinemos com cuidado o aforismo 3.3.

À primeira vista, Wittgenstein estaria mobilizando o princípio contextual de Frege para precisar os termos de uma recusa da distinção fregiana entre sentido e referência: 'Só a proposição tem sentido [*Sinn*]; só no nexo proposicional um nome tem referência [*Bedeutung*].' Somos levados a pensar que Wittgenstein estaria dizendo algo que poderia ser parafraseado mais ou menos nos seguintes termos: 'Frege estava errado ao supor que nomes tenham sentido, como as proposições, e que estas tenham referência, como os nomes. Só proposições podem ter sentido, e só nomes podem ter referência, muito embora a referência dos nomes só possa ser determinada, como dizia Frege, no contexto proposicional.' Tão logo nos perguntamos, no entanto, sobre o sentido que pode ter o princípio contextual, as dificuldades começam a aparecer. De um certo ponto de vista, é como se o princípio ameaçasse subverter a ordem das determinações semânticas, que deveria ir dos significados dos nomes para o sentido da proposição, deixando-nos a um passo de afirmar que o sentido da proposição deve estar dado para que possamos determinar o significado de cada um dos nomes que a compõem. Não se trata disso, é claro, e se quisermos compreender o que Wittgenstein tem em vista quando lança mão do dito fregiano, teremos que retroceder àquilo que, no *Tractatus*, é chamado de 'forma lógica do objeto'.

Todo objeto incorpora, como parte de sua natureza, suas possibilidades de combinação com outros objetos (2.0123). Todos os estados de coisas dos quais um objeto pode participar estão, por assim dizer, prefigurados nele na forma de 'propriedades internas' (2.01231), vale dizer, na forma de propriedades que, na sintaxe, correspondem a regras de construção das proposições elementares (4.124). Se o conjunto das proposições elementares admissíveis reproduz isomorficamente o conjunto dos estados de coisas possíveis, é claro que as concatenações possíveis de objetos devem estar refletidas na linguagem como concatenações sintaticamente admissíveis de nomes. Mesmo não sendo objetos logicamente simples, cores e sons podem fornecer uma analogia interessante. Esta superfície, que de fato é vermelha, poderia ser azul, mas jamais poderia ser 'mais aguda' que um determinado som. Estas possibilidades e impossibilidades combinatórias fariam parte da 'essência' de uma superfície, pois nada *poderia* ser uma superfície se não *pudesse* ser azul, ou vermelho, ou branco, etc., ou se pudesse ser mais agudo que um certo som. Isso quer dizer, naturalmente, que nenhuma cor específica poderia manter um vínculo lógico privilegiado com uma superfície. Nenhuma superfície seria 'essencialmente azul', ou 'essencialmente vermelha'. A superfície deveria ter *alguma* cor, mas não existiria uma cor que ela *devesse* ter. Nas palavras do *Tractatus*, 'os objetos são acromáticos' (2.0232), vale dizer, em si mesmos, têm apenas a possibilidade de possuir uma cor, mas não têm esta ou aquela cor específica como parte de sua natureza.

É esta rede de possibilidades e impossibilidades combinatórias incorporadas à essência do objeto que o *Tractatus* chama de 'forma do objeto' (2.0141). Na linguagem, o objeto é representado por um nome, e a forma do objeto se mostra nas possibilidades combinatórias desse nome. É neste sentido que é possível afirmar que 'só no nexo proposicional um nome tem referência'. É somente na medida em que incorpora, na forma de regras sintáticas, todas aquelas possibilidades combinatórias que lhe permitem espelhar a forma lógica de um objeto que um sinal pode tornar-se símbolo desse objeto, designando-o. Wittgenstein dá a esta afirmação o sentido mais radical possível, transformando o nome num caso particular das funções proposicionais. É a serviço dessa transformação que o conceito de 'expressão' é mobilizado nos aforismos imediatamente posteriores (e subordinados) a 3.3.

Para fins expositivos, imaginaremos, aqui, uma proposição elementar composta pela concatenação imediata de três nomes categorialmente distintos: '*aAα*'. Usarei as letras 'b', 'B' e 'β' como sinais a serem utilizados na simbolização de objetos categorialmente compatíveis com 'a', 'A' e 'α' respectivamente, e as letras 'x', 'X' e 'Φ' como as letras variáveis correspondentes a essas três categorias de objetos. 'Uma expressão', diz o texto, é qualquer parte de uma proposição que 'caracterize o seu sentido' e que 'as proposições possam ter em comum umas com as outras' (3.31). Se considerarmos as proposições '*aAα*' e '*bAα*', será fácil pensar que o fragmento '*Aα*' seja aquilo que essas duas proposições têm em comum, mas, segundo Wittgenstein, isto seria um erro. Isto é tudo aquilo que os dois *sinais*, desvinculados das regras sintáticas que os transformam em símbolos, têm em comum. O lugar vazio deixado pelos sinais 'a' e 'b' e, principalmente, a categoria lógica correspondente ao campo de variação em que esses sinais estão inseridos, são parte integrante dos símbolos proposicionais '*aAα*' e '*bAα*'. É para marcar esse elemento essencial do sentido proposicional (essencial a ponto de ser ele o portador da dimensão propriamente figurativa da proposição) que devemos utilizar letras variáveis correspondentes. O que as proposições '*aAα*' e '*bAα*' têm em comum, portanto, não é um fragmento gráfico desprovido de qualquer significação lógica, como seria o sinal 'Aα', mas sim a variável proposicional '$\underline{x}$Aα', onde 'x' marca o lugar das substituições categorialmente admissíveis de nomes como 'a' e 'b'[1]. A expressão '$\underline{x}$Aα' é a forma geral de um conjunto formalmente determinado de proposições e pode, por isso, ser usada como uma variável cujo escopo é

[1] Sublinho o lugar da variável para dar destaque aos 'lugares vazios' da função proposicional.

exatamente essa totalidade de proposições formada por todos os seus valores (3.313).

Da mesma forma, e pelas mesmas razões, as letras 'a', 'A' e 'α' não devem ser vistos, estritamente falando, como nomes. Na medida em que buscamos, no nome, um constituinte último das proposições elementares que caracterize o seu sentido, os nomes componentes da proposição '*aAα*' são 'a$\underline{\mathrm{X}\Phi}$', '$\underline{\mathrm{x}}A\underline{\Phi}$' e '$\underline{\mathrm{xX}}$α'. O nome é um caso particular de expressão e, nessa medida, um caso particular de variável proposicional, e deve, mais apropriadamente, ser chamado de 'nome variável' (3.314b). É exatamente por isso que o dito contextual de Frege é repetido, numa fraseologia a um só tempo mais ampla e mais rigorosa, na primeira parte do aforismo 3.314: 'É só na proposição que a *expressão* tem significado' (grifo meu). Neste ponto, porém, de fregiano, o princípio já não tem mais coisa alguma. Adquiriu, isto sim, um sentido radicalmente antifregiano, na medida em que está sendo usado para subverter aquela que é, talvez, a oposição mais básica e mais cara à lógica de Frege: a oposição entre expressões 'saturadas' e 'insaturadas' (Frege (1962), pp. 5-6). A oposição não se dá mais entre nomes e proposições, de um lado, e funções em geral, de outro, mas entre funções proposicionais (de que os nomes são apenas um caso especial) e proposições (o caso-limite das expressões, no qual a variável transforma-se em constante). A proposição deve ser vista, portanto, como uma articulação de variáveis. A única coisa análoga a isto que encontramos no sistema fregiano é o preenchimento de funções de segunda ordem por funções de primeira. A analogia, no entanto, é a mais precária possível, já que a idéia de uma hierarquia de funções é completamente estranha ao *Tractatus*.[2]

[2] A recusa de uma 'hierarquia' dada *a priori* será discutida mais à frente, em detalhe. No que diz respeito à concepção de função proposicional que atribuo ao *Tractatus*, devo deixar em suspenso inúmeros problemas que surgiriam a partir deste ponto. Considere-se, por exemplo, a possibilidade de que tanto

II

Quando passamos à teoria da quantificação, a diferença de perspectiva torna-se, a um só tempo, ainda maior, e ainda mais despercebida. Não é difícil encontrar, na literatura secundária, a afirmação de que Wittgenstein, no *Tractatus*, teria definido os quantificadores em termos das funções de verdade. A quantificação universal seria vista como uma 'conjunção infinita', e a existencial, como uma 'disjunção infinita'. Quantificadores seriam, portanto, meros expedientes abreviatórios. Tudo aquilo que é feito por meio deles poderia ser feito sem eles, utilizando-se apenas os conectivos do cálculo proposicional, ou simplesmente o conectivo 'N', de negação simultânea. Tudo isto é em parte verdadeiro, mas, na ausência de qualificações importantes, é também enormemente desencaminhador. Comecemos examinando as razões do adversário.

De fato, em 5.52, Wittgenstein afirma que, 'se os valores de ξ são a totalidade dos valores de uma função fx para todos os valores de x, então $N(\overline{\xi}) = \sim(\exists x).fx$. Como '$N(\overline{\xi})$' representa 'a negação da totalidade dos valores da variável proposicional 'ξ' (5.502), tudo se passa como se Wittgenstein estivesse mesmo definindo a quantificação em termos de um operador verifuncional. '$\sim(\exists x).fx$' seria apenas uma forma abreviada de escrever a conjunção '$\sim fa \,.\, \sim fb \,.\, \sim fc \,.\, \ldots$', e '$\sim(\exists x).\sim fx$', ou seja, '$(x).fx$', seria apenas uma outra maneira de escrever o produto lógico '$fa \,.\, fb \,.\, fc \,.\, \ldots$'. Causa estranheza então (e seria estranho se não causasse) o que vem dito na proposição imediatamente posterior, que tem a

'aAα' quanto 'a $\mathcal{A}$' fossem proposições (onde '$\mathcal{A}$' é um sinal usado para marcar a posição de uma nova categoria de objetos). Como representar, agora, o nome variável: 'a$\underline{X\Phi}$' ou 'a $\underline{\mathcal{X}}$'? A rigor, deveríamos abranger todos os estados de coisas possíveis de que o objeto pudesse fazer parte, e isso inclui ambas as possibilidades. Como fazer, no entanto, com que isso se reflita numa única variável?

função de comentar e esclarecer o sentido da proposição 5.52: 'Eu separo o conceito *todos* das funções de verdade. Frege e Russell introduziram a generalidade em conexão com o produto lógico ou com a soma lógica. Seria difícil, então, entender as proposições '$(\exists x).fx$' e '$(x).fx$', nas quais ambas as idéias estão contidas (*beschlossen liegen*)'. Ao que parece, o próprio Wittgenstein está se encarregando de antecipar um mal-entendido a que sua abordagem da quantificação poderia conduzir. Longe de reduzir a quantificação às funções de verdade, seu objetivo é exatamente separar, distinguir estes dois conceitos; longe de introduzir a quantificação universal como um produto lógico, ele está tentando destacar aquilo que a quantificação tem de essencialmente irredutível às funções de verdade.

Antes de mais nada, vamos estabelecer um acordo a respeito do óbvio. A negação simultânea *é* uma operação de verdade, e 'N $(\overline{\xi})$' *é* uma função de verdade das proposições recobertas pela variável 'ξ'. Como vem dito em 5.502, 'N $(\overline{\xi})$' é apenas um modo abreviado de simbolizar a operação (----V)(ξ,....), que só tem como resultado uma proposição verdadeira no último caso considerado em uma tabela de verdade, vale dizer, aquele em que todas as proposições são falsas (5.5). Claramente, portanto, se os valores de verdade das proposições recobertas pela variável ξ estiverem dados, o valor de verdade da proposição 'N $(\overline{\xi})$' estará automaticamente dado, e é exatamente isso o que se exige para podermos falar em uma 'função de verdade'. Desse ponto de vista, proposições como '$(\exists x).fx$' e '$(x).fx$' são, sem a menor sombra de dúvida, funções de verdade da totalidade dos valores da função proposicional 'fx'. Onde encontrar, porém, aquilo que *separa* a quantificação das funções de verdade? Qual é a característica das proposições quantificadas que nenhuma operação de verdade seria capaz de captar?

A resposta vem dada na proposição 5.501, onde Wittgenstein explica a utilização que faz do sinal '$(\overline{\xi})$'. Faremos um exame mais detalhado do conteúdo desta proposição em seguida, quando estivermos analisando o problema das séries formais e da possibilidade de se falar numa 'lógica de segunda ordem' no contexto do *Tractatus*. Por enquanto, bastará lembrar que, em 5.501, Wittgenstein elenca os três casos em que podemos falar numa totalidade *determinada* de valores de uma função proposicional. A determinação da totalidade está associada, aqui, à possibilidade de *descrever* as proposições que fazem parte dessa totalidade. A rigor, uma proposição não pode ser 'descrita', já que ela envolve um sentido que, por sua vez, deve ser posto na conta daquilo que a linguagem só pode mostrar. Mas o contexto indica claramente que se trata, aqui, de uma descrição de *sinais* proposicionais, encarados como marcas gráficas, seqüências sonoras, etc. Tome-se o primeiro caso – aquele em que a totalidade vem dada por uma lista. Embora seja impossível descrever uma proposição, no sentido estrito do termo, a descrição de um certo número de sinais proposicionais não envolve dificuldades maiores do que a descrição dos objetos que estão sobre uma mesa, ou das pessoas que estão numa sala. A possibilidade de nos referirmos a esta totalidade de sinais faz com que ela seja uma totalidade determinada, possibilitando, desse modo, o uso da variável 'ξ' como expediente abreviatório. Podemos convencionar, por exemplo, que a variável irá recobrir as proposições *p*, *q* e *r*, e que '$(\overline{\xi})$' irá referir-se à totalidade dessas proposições. Feita esta convenção, possibilitada pelo fato de podermos fazer referência a uma totalidade de sinais, podemos construir um novo sinal proposicional – '$N(\overline{\xi})$' – que será usado para expressar a negação simultânea das proposições associadas aos sinais recobertos pela variável.

Este primeiro método de descrição está obviamente associado à finitude da lista. É só neste caso que se torna possível fazer uma referência direta aos sinais envolvidos, descrevendo-os um a um. Suponhamos, no entanto, que a análise da linguagem tenha sido levada a cabo, e que utilizemos o sinal 'aAα' para simbolizar uma determinada proposição elementar. Suponhamos, ainda, que a análise tenha revelado a necessidade de utilizarmos um número infinito de sinais em cada uma das posições categoriais marcadas pelas letras 'a', 'A' e 'α'. Estendendo as convenções que fizemos no início deste artigo, poderíamos estabelecer que os sinais da seqüência a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2,… etc. são os sinais sintaticamente admissíveis na primeira posição, estabelecendo convenções análogas para a segunda e a terceira posições. Neste caso, será perfeitamente possível fazer referência coletiva à totalidade dos sinais proposicionais compostos por uma das letras da seqüência acima seguida da letra 'A' e da letra 'α'. Estará imediatamente determinado que nos referimos aqui à totalidade dos valores da função proposicional '$\underline{x}$Aα'. O mesmo deve valer para qualquer outra função proposicional.

A lição geral a ser extraída deste exemplo é que, uma vez fixada a sintaxe lógica da linguagem, é sempre possível associar a uma função proposicional '*fx*'[3] uma descrição da totalidade dos sinais utilizados para expressar os valores dessa função. A possibilidade dessa descrição faz com que essa totalidade seja 'determinada', no sentido da exigência feita na proposição 5.501, e que possamos, em função disso, fazer com que a variável proposicional 'ξ' recubra essa totalidade. É daí que surge a possibilidade de utilizar quantificadores para indicar a aplicação da operação 'N $(\overline{\xi})$' a totalidades determinadas *desse modo*.

[3] A utilização da notação russelliana para as funções proposicionais era a única alternativa que Wittgenstein tinha, no *Tractatus*, para não recorrer ao expediente que utilizamos, de imaginar que a análise tenha sido feita e que tenhamos chegado a um certo resultado – a proposição 'aAα', por exemplo. Por todas as razões expostas no início deste artigo, devemos evitar que esta estratégia expositiva encubra a natureza insaturada dos nomes, projetando sobre o *Tractatus* teses que o *Tractatus* está querendo combater. Devemos encarar '*fx*' simplesmente como um modo genérico de fazer referência a qualquer função proposicional de um argumento, tendo sempre presente a oposição radical entre a noção fregiana de função proposicional e aquela que é adotada no *Tractatus*.

O que é característico da quantificação, portanto, não é a obtenção de uma nova proposição pela aplicação da negação simultânea a totalidades de proposições previamente dadas, mas sim um determinado *método de determinar essas totalidades*. Este método envolve basicamente um recorte no interior da totalidade das proposições que compartilham uma certa forma lógica, ou, para utilizar o jargão do *Tractatus*, que são os valores de um determinado 'protótipo' (*Urbild*). Se transformarmos todas as constantes da proposição elementar 'aAα' em variáveis, obteremos um protótipo, que está associado a uma totalidade formalmente determinada de proposições elementares, a saber, as proposições que seriam os valores do protótipo '$\underline{\text{xX}\Phi}$'. O protótipo é, por assim dizer, o caso-limite das funções proposicionais – um recorte puramente formal no interior do espaço lógico (3.315). Se preenchemos um dos lugares vazios do protótipo, obtemos um novo recorte no interior do primeiro. Ao final do processo, teremos uma proposição elementar, que pode ser vista como o menor recorte possível no interior do espaço lógico.

A quantificação pressupõe a possibilidade destes recortes sucessivos. Longe de poder ser definida *apenas* em função da operação de negação simultânea, ela envolve necessariamente um processo seletivo específico encarregado de determinar formalmente a totalidade de proposições a serem simultaneamente negadas. É neste *processo seletivo* que reside aquilo que é específico da generalidade lógica. Não se trata de negar que a quantificação envolve uma operação de verdade. Operações de verdade, no *Tractatus*, estão envolvidas em *qualquer* processo de construção de proposições a partir de proposições. Trata-se apenas de notar que a generalidade envolve, além de uma operação formal (que é uma operação de verdade), um mecanismo formal de seleção. Em proposições como '$(\exists x).fx$' e '$(x).fx$' estão presentes estas duas coisas, e é por isso que seria um erro afirmar que a quantificação pode ser *reduzida* a somas ou produtos lógicos.

No confronto com a lógica de Frege e Russell, a teoria da quantificação do *Tractatus* deve se manter coerente com a concepção das proposições elementares examinadas mais acima. Se quisermos resumir numa fórmula aquela que é a característica mais proeminente dessa teoria, podemos falar, aqui, numa categorização sem hierarquia. Tanto em Frege quanto em Russell, as categorias lógicas eram determinadas por uma hierarquia ligada aos valores possíveis de certas funções proposicionais. A teoria dos tipos é a expressão mais acabada desse padrão de análise, que, no entanto, já é constitutivo da mera distinção entre nomes e funções proposicionais. Não é necessário, portanto, sair dos limites estritos do cálculo de primeira ordem para encontrarmos a idéia de uma hierarquia constitutiva da sintaxe lógica da linguagem. No *Tractatus*, como já vimos, este tipo de hierarquização é abolida desde o início dando-se aos nomes o estatuto de funções proposicionais e fazendo com que a proposição elementar seja vista como uma concatenação imediata desses nomes. A idéia de uma categorização do discurso, no entanto, é mantida. Tendo suas possibilidades combinatórias como parte de sua identidade, o nome se insere, desde o início, numa rede de substituições muito bem determinada.

É para incorporar esta dimensão categorial do nome que utilizamos diferentes tipos de letras para montar nossa proposição elementar 'aAα': a cada tipo de letra corresponde, aqui, uma categoria, vale dizer, um campo preciso de substituições possíveis. É exatamente por isso que uma função proposicional como '$\underline{x}$Aα' pode ser tomada como base para uma seleção formal cujo resultado é uma totalidade *determinada* de proposições, no sentido visado em 5.501. É com base nestas totalidades que o mecanismo de quantificação se define e é natural, portanto, que esse mecanismo incorpore as determinações categoriais sobre as quais está assentado. Isto tem uma conseqüência ao mesmo tempo simples e radical: haverá tantas espécies de quantificação quantas forem as categorias constitutivas de uma linguagem completamente analisada. O quantificador tem um comportamento, por assim dizer, 'funcional'. Ele se relaciona com a função como se fosse um argumento. É óbvio que, estritamente falando, ele *não é* um argumento. Ele é apenas um expediente abreviatório destinado a marcar a aplicação de certas operações de verdade sobre totalidades determinadas com o auxílio de funções proposicionais. Não obstante isso, ele está diretamente ligado a uma categoria determinada de objetos – a categoria daqueles objetos cujos nomes fornecem argumentos possíveis a uma certa função proposicional, e isto faz com que suas regras sintáticas estejam inexoravelmente subordinadas às regras que comandam o uso desses argumentos. Ao contrário de um símbolo de operação, como o de negação, que pode aplicar-se indiferentemente a qualquer função proposicional, um quantificador está sempre vinculado a um determinado tipo de função proposicional. Ele é sintaticamente compatível com esta função proposicional, e não com aquela. Se aplicarmos o quantificador '$(\exists\Phi)$' à função proposicional '$\underline{x}A\alpha$', o resultado não é uma proposição, mas um contra-senso. Há preenchimentos permitidos e preenchimentos proibidos de funções proposicionais por quantificadores. Creio que é isso que Wittgenstein está querendo dizer quando afirma que 'o quantificador (*Allgemeinheitsbezeichnung*) apresenta-se (*auftritt*) como argumento' (5.523), ou, numa outra tradução possível, 'comporta-se como argumento'.

É claro que, em alguma medida, temos algo análogo no âmbito da lógica de Frege e, de modo ainda mais nítido, na teoria dos tipos de Russell. Não faz sentido aplicar um quantificador de primeira ordem a uma função de segunda, ou vice-versa. A diferença, como sempre, está na idéia de 'hierarquia', que preside a distinção entre quantificadores (e funções) de primeira e segunda ordem. Do ponto de vista do *Tractatus*, a idéia de que possamos estabelecer *a priori* a ordem categorial do mundo com base numa hierarquia de entidades é uma assunção perfeitamente arbitrária, que se justificaria em parte por meio de distinções emprestadas à sintaxe da linguagem cotidiana[4], e em parte por seus resultados práticos no âmbito do projeto logicista. No que diz respeito a estes últimos, devemos nos lembrar, sobretudo, de dois: a superação, por meio da teoria dos tipos, do paradoxo de Russell e a análise da noção de série formal, conseguida por Frege na *Begriffsschrift* por intermédio da mobilização de propriedades e relações de segunda ordem.

A crítica à teoria dos tipos é levada a efeito num contexto que não apenas utiliza, mas põe em evidência a notação de Russell, que herda da notação fregiana a distinção básica entre objetos e conceitos, entre nomes e funções proposicionais. Tudo que dissemos até agora parece chocar-se com isto. Se é verdade, como tentamos demonstrar, que nomes devem ser tomados, no *Tractatus*, como casos particulares de funções proposicionais, fica difícil compreender por que Wittgenstein teria retomado uma notação que parece apontar num sentido diametralmente oposto. Existem, é verdade, usos mais ou menos inócuos, deste ponto de vista. Nos aforismos 5.531-5.5321, por exemplo, Wittgenstein está introduzindo a famosa convenção que permite eliminar o sinal de igualdade do arsenal básico da linguagem. Diferentes nomes devem designar diferentes objetos, e variáveis diferentes nunca devem assumir simultaneamente o mesmo valor – ao invés de escrevermos '$f(a,a) \,.\, a=b$', escreveremos simplesmente '$f(a,a)$', compreendendo que um sinal como '$f(a,b)$' estaria automaticamente introduzindo dois objetos diferentes correspondentes aos nomes 'a' e 'b'. As variáveis viriam tratadas da mesma forma. Aquilo que, na notação de Frege e de Russell, se expressava na proposição '$(\exists x,y) \,.\, f(x,y)$' deve ser expresso, agora, levando-se em conta os dois casos possíveis: '$(\exists x,y) \,.\, f(x,y)$ .v. $(\exists x) \,.\, f(x,x)$', e, para se expressar a existência de *um único x* que satisfaz a função '$f(x)$', basta escrever '$(\exists x) \,.\, f(x) : \sim(\exists x,y) \,.\, f(x) \,.\, f(y)$'.

[4]Acima de tudo, a distinção entre sujeito e predicado.

Tudo isto é tão bem conhecido que dispensaria maiores comentários, não fosse pela necessidade de justificar a introdução da velha simbologia das funções proposicionais. Como devemos interpretar o sinal '*f*(*a*,*b*)'? Quantos nomes devemos contar nele? Dois ou três? É claro que, nesta notação, '*a*' e '*b*' devem ser vistos como representando nomes da mesma categoria lógica, já que estamos supondo que '*f*(*a*,*a*)' faça tanto sentido quanto '*f*(*a*,*b*)'. Se, no entanto, '*f*' for visto como um outro nome, pertencente a uma outra categoria lógica, devemos excluir *a priori* a possibilidade de poder existir uma proposição elementar da forma '*F*,*G*(*a*,*b*)', onde '*F*' e '*G*' designariam objetos pertencentes à mesma categoria? Parece claro que não é esse o caso. Aliás, seria um despropósito utilizar vírgulas e parênteses caso a intenção fosse mesmo essa, pois a função das vírgulas e dos parênteses em um sinal como '*f*(*x*,*y*)' é exatamente a de mostrar quais são os argumentos e qual é a função.

Será necessário admitir que a categorização hierárquica fez sua entrada triunfal pela porta dos fundos do *Tractatus*? Antes que soluções demasiadamente simples nos venham à cabeça, será conveniente considerar o preço a ser pago por uma tal admissão. Estaria descartada *a priori*, por exemplo, a possibilidade de existir um estado de coisas constituído por quatro objetos pertencentes a exatamente duas categorias, ou seja, algo que pudesse ser adequadamente representado numa proposição elementar da forma '*FGab*', escrita agora sem os parênteses e vírgulas característicos da notação funcional. '*A priori*', aqui, é uma expressão que deve ser entendida no sentido mais forte que o *Tractatus* reserva para ela – aquele sentido em que se insinua, por exemplo, na proposição 5.5541, a impossibilidade de indicarmos *a priori* a necessidade de se usar o sinal para relações de 27 lugares. Os resultados da análise lógica da linguagem, e somente eles, poderão determinar se existem ou não estados de coisas com dois, 27, ou até mesmo infinitos objetos. Esta determinação, uma vez legitimamente feita, continuará sendo '*a priori*', mas num sentido mais fraco. Ela continuará sendo logicamente autônoma com respeito a qualquer ocorrência de estados de coisas, muito embora não seja autônoma em relação ao trabalho efetivo de análise. Ela corresponde àquela porção da lógica que depende, para utilizarmos a terminologia do *Tractatus*, do 'quê' do mundo, mas não de seu 'como'. A necessidade da negação, por outro lado, ou a complexidade essencial do enunciado, ou qualquer uma daquelas determinações lógicas que já estão feitas no *Tractatus*, independem da realização efetiva do trabalho de análise. Bem pelo contrário, estas determinações devem balizar esse trabalho futuro. A necessidade de podermos negar proposições é, se quisermos assim, 'mais *a priori* ainda' do que seria a necessidade de usarmos um sinal com 27 posições, caso essa necessidade existir. Ambas pertencem ao campo daquilo que poderíamos chamar de 'analítico', se com essa palavra quisermos nos referir a toda e qualquer determinação necessária do simbolismo; podemos também dizer que ambas são '*a priori*', se quisermos, com isto, lembrar sua autonomia lógica com respeito à ocorrência de estados de coisas. Será sempre conveniente ter em mente, no entanto, que há uma dependência dos resultados da análise que está vinculada a uma delas, e não à outra, e que isto nos induz a reconhecer um sentido mais fraco da expressão '*a priori*', e outro mais forte. É neste sentido mais forte da expressão que dissemos, no início deste parágrafo, que uma certa interpretação do uso feito, no *Tractatus*, da notação funcional de Frege e de Russell nos levaria a descartar '*a priori*' a existência de um estado de coisas composto por quatro objetos pertencentes a duas categorias lógicas distintas. Parece-me claro que, neste sentido mais forte da expressão, nenhuma exclusão *a priori* seria possível nos quadros do *Tractatus*. Da mesma forma, e pelos mesmos motivos, que é preciso recusar definitivamente a idéia de qualquer indicação 'fortemente *a priori*' de uma forma lógica em particular (5.554), é preciso recusar também a idéia da exclusão 'fortemente *a priori*' de formas lógicas que não se chocam com nenhum pressuposto absolutamente geral do sentido, como a possibilidade da negação, ou a complexidade essencial do enunciado. A análise talvez nos mostre, no futuro, que a forma 'FGab' não tem lugar na linguagem; o *Tractatus* não pretende, nem poderia mostrar uma coisa desse tipo.

Como interpretar, então, o uso de sinais proposicionais como '$f(a,b)$' e '$(\exists x,y) . f(x,y)$' em passagens como 5.531-5.5321? Antes de mais nada, eles se apresentam claramente como um recurso expositivo de que Wittgenstein lança mão para poder contornar carências que só a análise lógica poderá suprir de modo definitivo. Na ausência de qualquer determinação prévia a respeito da ordem categorial comum ao mundo e ao Pensamento, Wittgenstein vale-se da notação funcional de Frege e Russell para ilustrar suas teses. No caso em apreço, era preciso determinar, de antemão, que o sinal de igualdade é logicamente dispensável – 'de antemão' assumindo, aqui, o sentido de 'fortemente *a priori*' a que acabamos de nos referir. Ao invés de 'imaginar uma concatenação possível', como fizemos, ao introduzir o sinal 'aAα', Wittgenstein estaria usando a velha notação para estabelecer suas teses, deixando um enorme '*mutatis mutandis*' subentendido ao longo de toda a passagem.

Esta solução, no entanto, não nos pode satisfazer completamente. Embora dê conta das dificuldades envolvidas em passagens nas quais o uso da notação funcional é, como já dissemos, mais ou menos inócua, não seria possível utilizá-la para fornecer uma interpretação razoável de outras passagens, nas quais aquele mesmo '*mutatis mutandis*' não poderia ser pressuposto sem uma série de qualificações prévias. Refiro-me principalmente aos aforismos que oferecem a distinção entre mostrar e dizer como uma alternativa à teoria dos tipos. A notação funcional, ali, parece não se prestar ao papel de remendo provisório, mas estar, pelo contrário, essencialmente envolvida na impossibilidade de se construir um símbolo proposicional que expresse o paradoxo de Russell.

'Nenhuma proposição pode dizer algo sobre si mesma porque o sinal proposicional não pode estar contido em si mesmo', diz o *Tractatus*, e acrescenta, taxativo – 'isto é toda a 'theory of types" (3.332). Esta observação vem imediatamente em seguida a uma outra, na qual Wittgenstein tenta detectar qual teria sido o 'erro de Russell' ao propor a hierarquia dos tipos como solução para os paradoxos envolvendo totalidades 'auto-referentes' (Russell 1988, 59-64). O erro de Russell, segundo o *Tractatus*, mostra-se no fato de ele ter tido que falar sobre a referência dos sinais ao estabelecer as regras que governam o uso desses sinais. Isto pode ser melhor compreendido se nos lembrarmos que a teoria dos tipos era usada para estabelecer, em cada caso, os 'valores possíveis' de uma função proposicional. Tome-se, por exemplo, a regra que permite inferir a conjunção $\{f(\phi x).\ F(\phi x)\}$ para um valor qualquer[5] de x, sempre que pudermos afirmar $f(\phi x)$ para um valor qualquer de x e $F(\phi y)$ para um valor qualquer de y. A regra não exige que $F(\phi x)$ e $f(\phi y)$ seja funções pertencentes ao mesmo tipo lógico. A letra 'f' pode estar sendo usada, suponhamos, para abreviar uma função complexa, na qual a quantificação mais alta incide sobre a totalidade dos indivíduos, enquanto a letra 'F' poderia estar sendo usada para abreviar uma outra função complexa na qual a quantificação mais alta incidiria, digamos, sobre a totalidade das funções predicativas de indivíduos. O fato de não pertencerem ao mesmo tipo lógico não as impede de tomar argumentos pertencentes ao mesmo tipo lógico. Só funções predicativas de tipo diferente tomam argumentos de diferentes tipos, e nem $F(\phi x)$ nem $f(\phi y)$ são funções predicativas. Se apenas o lugar de x e de y estivesse indicado – nas formas $F(x)$ e $f(y)$ – jamais poderíamos identificar as variáveis, afirmando a função $\{F(x)\ .\ f(x)\}$ *para um valor qualquer de* x, pois seria

[5] Para a distinção entre 'todo' e 'qualquer', cf. Russell (1988), pp. 64-9. A distinção desempenha um papel importante na formulação original da teoria dos tipos.

perfeitamente possível imaginar que os argumentos dessas funções devessem pertencer a tipos diferentes. O que garante, segundo Russell, que as variáveis x e y possam ser identificadas nesse contexto é o fato de elas terem aparecido, no interior das funções complexas $F(\phi x)$ e $f(\phi y)$, como argumentos de uma mesma função componente, introduzida aqui pela letra ϕ. Não se exige que ϕx seja uma função predicativa, pois a teoria dos tipos garante que os argumentos possíveis de uma mesma função pertencerão sempre ao mesmo tipo lógico. É nesta garantia que se baseia, segundo Russell, a possibilidade de afirmarmos um valor *qualquer* da conjunção $\{F(x) . f(x)\}$ – sabemos, graças à teoria dos tipos, que a função *tem* valores (Russell 1988, 86-7).

Em que casos, porém, devemos dizer que dois argumentos pertencem ao mesmo tipo lógico? É a esta pergunta que Russell e Whitehead procuram responder, nos *Principia Mathematica*, por intermédio de uma definição recursiva da expressão 'x e y pertencem ao mesmo tipo'. A base de toda a recursão é dada por aquele caso no qual x e y são indivíduos (Russell e Whitehead 1910, 9.131), de tal modo que, para retornar ao exemplo do artigo de 1908[6], uma regra sintática como 'toda função proposicional deve tomar *argumentos de um mesmo tipo*' envolve, ao menos implicitamente, uma referência à hierarquia enquanto tal, que é, por sua vez, caracterizada por meio de uma referência às 'entidades' que a compõem[7]. Dizer que as funções $F(\phi x)$ e $f(\phi y)$ tomam

---

[6] 'Mathematical Logic as Based on the Theory of Types', incluída na coletânea *Logic and Knowledge* (Russell (1988)).

[7] Esta referência, no artigo de 1908, envolve uma série imensa de problemas que não poderiam ser tratados aqui. As noções básicas, ali, são 'indivíduo' e 'proposição elementar'. A noção de 'função proposicional' é introduzida como um expediente praticamente interessante, mas teoricamente dispensável. É difícil avaliar até que ponto isto é sustentável naquele contexto, e é mais difícil ainda decidir o que Russell entendia, nessa época, por 'proposição'. É bem provável que ele próprio não tivesse clareza sobre isso.

'argumentos do mesmo tipo' significa, para Russell, afirmar uma proposição da forma 'tanto x quanto y são indivíduos, ou tanto x quanto y são funções de indivíduos, ou…'. Na base de tudo, portanto, estão funções proposicionais como 'x é indivíduo', sem o auxílio das quais a teoria dos tipos, tal como Russell a concebia, não poderia ser formulada. É esse, para Wittgenstein, o 'erro de Russell': construir regras simbólicas que se justificam por meio de um discurso a respeito do significado dos símbolos, ou, mais exatamente, por meio de um discurso que procura enunciar a estrutura categorial do mundo por meio de funções como 'x é indivíduo'.

Segundo Wittgenstein, toda vez que a sintaxe lógica for buscar num discurso sobre a 'essência do mundo' a justificação de suas regras, ela estará fadada a desobedecer exatamente aquelas regras que ela está sendo chamada a fundamentar. Uma função como 'x é indivíduo' só pode ser posta a serviço da sintaxe lógica na medida em que estivermos dispostos a violar as regras que essa mesma sintaxe está tentando (correta ou incorretamente) estabelecer. Para justificar as regras estipulando que tais e tais construções são admissíveis, enquanto tais e tais outras devem ser proibidas, a função 'x é indivíduo' deveria ser preenchida com a mesma liberdade que a sintaxe está procurando restringir. Em algum ponto, teríamos que dizer que '$\phi(\phi)$' é um preenchimento inadmissível, pois 'ϕ não é indivíduo', fazendo com que o 'ϕ' ocupasse o lugar da variável 'x', e isto é exatamente o que nossa regra estava tentando evitar. As regras da sintaxe lógica, no entanto, podem ser estabelecidas perfeitamente sem a necessidade deste 'discurso inaugural da linguagem'. Basta, segundo o *Tractatus*, que nós saibamos distinguir o sinal do símbolo.

'Suponhamos, por exemplo, que a função $F(f\text{x})$ pudesse ser seu próprio argumento. Neste caso, deveria haver a proposição '$F(F(f\text{x}))$' e, nesta proposição, a função externa F e a função interna F devem ter significados diferentes, já que a interna tem a forma $\phi(f\text{x})$, e a externa tem a forma $\psi(\phi(fx))$. O que estas funções têm em comum é apenas a letra 'F' que, sozinha, nada designa' (3.333). Como na passagem de Russell citada mais acima, o que está em questão, aqui, é o domínio coberto por uma variável. A variável em questão, neste caso, não é 'x', mas 'fx'. É 'fx' que está marcando o local da substituição que faria com que a função F tomasse a si mesma como argumento. Ao invés, no entanto, de escrever a proposição na forma '$F(F)$', como se faz usualmente na exposição do paradoxo de Russell[8], Wittgenstein opta pela forma '$F(F(fx))$', que põe imediatamente em evidência a impossibilidade de se escrever a fórmula pretendida. A função '$F(fx)$' não pode ser preenchida por si mesma, pois o lugar do argumento tem – e só poderia ter – uma multiplicidade lógica diferente da sua. A função que é tomada como argumento tem a forma $\phi(fx)$, enquanto a função mais externa tem a forma $\psi(\phi(fx))$. Apenas a letra 'F' é comum às duas funções; sozinha, porém, como diz o texto, ela nada designa.

Será necessário tomar afirmações como esta como se estivessem referendando, de algum modo, a hierarquia dos tipos de Russell? Em outras palavras, será possível determinar de antemão, independentemente dos resultados da análise lógica de nossa linguagem, que os objetos organizam-se, de fato, em categorias hierarquizadas, como pretendia Russell? Ou será que, pelo contrário, o que Wittgenstein está fazendo é simplesmente notar que o 'problema' que a teoria dos tipos procura resolver inexiste, a partir do momento em que reconhecemos que as possibilidades combinatórias de um nome – sua 'identidade sintática', digamos assim – são uma parte essencial do próprio nome?

[8] O próprio Russell adotava uma estratégia mais sofisticada, mediante o uso de acentos circunflexos para 'nominalizar' as funções. Dessa forma, '$\phi\hat{x}$' seria o nome de uma função, enquanto 'ϕx' seria um valor indeterminado dessa mesma função. A proposição auto-referente seria escrita por Russell da seguinte forma: '$F(F(\hat{f}\hat{x}))$'. Seria necessário, então, usar a teoria dos tipos para impedir que a variável 'fx' tomasse como argumento o *nome* '$F(\hat{f}\hat{x})$'.

Russell estava errado ao tentar determinar a estrutura categorial do mundo num plano de considerações 'fortemente *a priori*'. Seu acerto dependeria, para adotar uma expressão mais livre, de uma formidável dose de boa sorte. Mas a própria questão que motivara esta tentativa baseava-se num deslize lógico: mais exatamente, na desconsideração daquilo que devemos acrescentar a um sinal gráfico para que ele possa ser alçado a símbolo. O que faz com que 'F' deixe de ser um rabisco para tornar-se parte integrante de uma linguagem é, antes de mais nada, o conjunto de prescrições sintáticas que estão, na linguagem, associadas a esse sinal. Nos termos do *Tractatus*, diríamos – o conjunto das possibilidades e impossibilidades combinatórias do sinal. Mesmo considerando que a sintaxe lógica proposta por Russell era completamente arbitrária e não tinha, por isso, nenhum valor, é preciso reconhecer que, caso Russell tivesse sido fiel à própria sintaxe que ele estava propondo, jamais seria possível derivar o paradoxo que aquela mesma sintaxe estava tentando resolver. Se o mundo é mesmo constituído por indivíduos, propriedades de indivíduos, propriedades de propriedades de indivíduos, e assim por diante, deve ser impossível fazer com que o símbolo de uma propriedade de segunda ordem combine-se com um símbolo de indivíduos para formar uma proposição. Mais ainda, a palavra 'impossível' não deve ser tomada, neste contexto, como uma variante retoricamente reforçada de 'proibido'. Deve ser *logicamente* impossível efetivar aquela combinação, já que, se algo está tomando um símbolo de indivíduos como argumento, então esse algo não será, por isso mesmo, um símbolo funcional de segunda ordem, e se for um símbolo deste tipo, o que está sendo tomado como argumento é tudo, menos o nome de um indivíduo.

Longe, portanto, de referendar a hierarquia dos tipos de Russell, os exemplos de Wittgenstein reforçam o teor de suas críticas. A teoria dos tipos aparece, então, como uma solução arbitrária, embalada numa formulação absurda, que é chamada a resolver um problema que não existe. Ninguém pode determinar de antemão se é necessário ou não admitir proposições que, como 'aAα' e 'FGab', não caibam nos figurinos da teoria dos tipos, ou de nossos manuais de lógica. Além disso, o tipo de discurso sobre o qual a teoria dos tipos se fundamentava (ou mesmo aquele outro que costuma atender, nos manuais de lógica, pelo nome de 'semântica formal') assume para si o encargo absurdo de, saindo da linguagem, falar a respeito dela[9], condenando-se, por isso, a se estabelecer como uma prática auto-destrutiva[10]. Finalmente, como procuramos mostrar nos parágrafos anteriores, os paradoxos que a teoria dos tipos pretendia resolver não exigiam nada além que a distinção entre símbolo e sinal para que não pudessem mais ser formulados. Nem sequer seria preciso esperar pelos resultados da análise para verificar palpavelmente essa impossibilidade. Qualquer sintaxe deve determinar as possibilidades combinatórias que regem o mecanismo de articulação sentencial. Basta reconhecer, a partir daí, que algo só se torna 'nome' no contexto dessas regras de articulação, para reconhecer, também, e exatamente por isso, que 'nenhuma proposição pode dizer algo sobre si mesma' (3.332).

Não existe, então, uma lógica de segunda ordem embutida no *Tractatus*? Certamente não, se associarmos esta expressão a qualquer hierarquia pré-estabelecida de entidades, expressões designadoras, ou proposições. Nisto, o a lógica do *Tractatus* distingue-se radicalmente da *Begriffsschrift* de Frege e, mais ainda, da 'theory of types' de Russell. Mas

---

[9] Neste ponto, ao menos, a lógica contemporânea costuma ser mais modesta, circunscrevendo o campo de suas descrições a uma 'linguagem objeto'. Exatamente por isso, no entanto, essa lógica deve ser vista como um cálculo entre outros, uma espécie de jogo de sinais sem nenhum vínculo de origem com algo que ainda merecesse o nome de 'Pensamento'.

[10] O *Tractatus*, é sempre bom lembrar, só repetia esses erros com a (boa) desculpa de torná-los plenamente visíveis e, nessa medida, inviáveis dali por diante.

existe, sim, e isto é freqüentemente ignorado, um mecanismo destinado a substituir, sem perda de poder expressivo, as quantificação de segunda ordem. Esse mecanismo, fundamental para se entender a definição que o *Tractatus* oferece para os números naturais, está todo ele baseado no tratamento dado às 'séries de formas'.

III

Uma série de formas é qualquer série de sinais lingüísticos que possa ser recursivamente caracterizada. A série dos números naturais fornece um bom exemplo. Números não são nomes, nem muito menos proposições. Numa linguagem completamente analisada, os números compareceriam, no máximo, como expedientes de abreviação. Mesmo assim, os números naturais formam uma série de sinais lingüísticos que pode ser completamente caracterizada por seu primeiro elemento e pela regra que permite passar de um elemento ao seguinte. Wittgenstein utiliza o que ele chama de 'expressão entre colchetes' (*Klammerausdruck*) toda vez que deseja referir-se a um termo qualquer de uma série de formas (5.2522). No caso dos números, a expressão entre colchetes correspondente seria '$[0, \xi, \xi+1]$'. Na primeira posição vem discriminado o elemento inicial da série, ao passo que na segunda e na terceira nos é dado o modo de obter um novo elemento a partir de um elemento anteriormente obtido. É exatamente desse modo que expressões entre colchetes podem ser utilizadas para caracterizar uma série potencialmente infinita de sinais proposicionais que, tomada como um todo, pode ser objeto de operações lógicas. As proposições obtidas ao final deste processo são exatamente aquilo que corresponderia, no *Tractatus*, à quantificação de ordem superior usada por Frege e Russell.

Em Frege, esse tipo de quantificação fora introduzida para dar conta daquilo era chamado, na *Begriffsschrift*, de 'teoria geral das séries' (Frege 1966, §§23 e seguintes). No §24, Frege define o que significa dizer, a respeito de uma propriedade *f* qualquer, que ela é 'hereditária' com respeito à relação *R*[11]. Basicamente, o que estamos afirmando é que se um *x* qualquer, tendo a propriedade *f*, mantiver a relação *R* com *y*, então esse *y*, seja ele o que for, também possuirá a propriedade *f*. Dada uma relação *R* qualquer, propriedades para as quais isto for verdadeiro serão chamadas de 'hereditárias com respeito a R'. É esta noção que será utilizada, no §26, para definir a relação de 'posterior na série *R*', e é este o primeiro contexto que não apenas permite, mas exige, no contexto da *Begriffsschrift*, o uso da quantificação de ordem superior. Diremos que *y* é posterior a *x* na série *R*, caso *y* possua *todas* as propriedades hereditárias possuídas por cada uma das coisas com as quais *x* mantém a relação *R*. Alguns anos mais tarde, Frege iria mostrar como estas definições podem ser utilizadas para elaborar uma definição puramente lógica do conceito de número, mas é importante notar que, além disso, esse expediente dotava a *Begriffsschrift* de capacidades expressivas capazes de justificar seu uso independentemente das vicissitudes que o projeto logicista devesse eventualmente enfrentar. Há pensamentos, enfim, que não pertencem à esfera da matemática pura, mas cuja expressão parece exigir o uso da quantificação de ordem superior.

Um dos exemplos preferidos de Russell, a este respeito, era a proposição 'Bismark possuía todas as características possuídas por qualquer grande general', que pode ser traduzida, na linguagem do cálculo de predicados, por uma sentença da forma

$$(\phi): fx \supset_x \phi x . \supset \phi a.$$

[11] Frege utiliza '*F*' para simbolizar a propriedade e *f* para fimbolizar a relação. Aqui, como em outros pontos, preferi a notação mais usual.

Exemplos deste tipo não são os mais interessantes para os nossos propósitos, pois só constituem evidência da necessidade da quantificação de ordem superior para aqueles que já aceitaram, de antemão, a existência de relações 'hierárquicas' entre (símbolos de) 'propriedades de indivíduos', de um lado, e (símbolos de) 'indivíduos', de outro. Outra coisa muito diferente é o que acontece no contexto da aplicação dos números à descrição do mundo. Se quero dizer que Marte está a exatamente *um* passo de distância da Terra, posso expressar isso na conceitografia de Frege através do uso do sinal de igualdade e dos quantificadores:

$$(\exists x): fx \,.\, fy \supset_y y{=}x.$$

No *Tractatus*, as convenções referentes ao uso de nomes e variáveis permitem expressar o mesmo pensamento sem pressupor o uso da relação de igualdade:

$$(\exists x)\, fx : \sim(\exists x,y): fx \,.\, fy.$$

Se desejo, porém, dizer que Marte está distante da Terra *um certo número* de passos, sou obrigado a lançar mão das 'propriedades hereditárias' de Frege, escrevendo

$$(\phi): H_R(\phi) \,.\!\supset\!.\, \phi(Terra) \supset \phi(Marte),$$

onde '$H_R(\phi)$' significa 'ϕ é uma propriedade hereditária com respeito à relação xRy' e 'xRy' é uma expressão abreviada da relação 'x está um passo adiante de y na direção tal'. A quantificação de segunda ordem, aqui, já não é algo que possa ser reproduzido, sem perdas, no interior do conceito de 'categoria lógica' do *Tractatus*, pois ela está intimamente vinculada à 'hierarquia' que subordina propriedades de indivíduos a propriedades de propriedades de indivíduos (como, por exemplo, 'ser hereditária com respeito a *R*') – aquelas têm que ser 'argumentos possíveis' destas últimas, ou toda a construção lógica de Frege fica inviável.

De um ponto de vista completamente geral, a situação pode ser descrita da seguinte maneira: recusando a hierarquização *a priori* que possibilita a quantificação de ordem superior, o *Tractatus* está aparentemente perdendo a capacidade de expressar qualquer proposição que envolva uma referência genérica aos números (em nosso exemplo, a referência a um *número qualquer* de passos). As convenções referentes ao uso de variáveis e nomes permitem-lhe, sem dúvida, expressar qualquer atribuição numérica nos contextos de contagem sem lançar mão do sinal de identidade. As proposições do tipo

Não existe x tal que fx.
Existe exatamente um x tal que fx.
Existem exatamente dois x tais que fx.
etc

serão reescritas da seguinte maneira:

$$\sim(\exists x).\ fx$$
$$\sim(\exists x,y).\ fx\ .\ fy : (\exists x).\ fx$$
$$\sim(\exists x,y,z).\ fx\ .\ fy\ .\ fz : (\exists x,y).\ fx\ .\ fy$$
etc

Como expressar, no entanto, proposições como 'há mais coisas que são *f* do que coisas que são *g*', ou 'o número de coisas que são *f* é idêntico ao número de coisas que são *g*', ou 'há um número infinito de coisas que são *f*'? Todas estas proposições exigiam, na lógica de Frege e Russell, um uso tão irredutível da 'quantificação de segunda ordem' quanto aquele ligado às propriedades hereditárias, e, com exceção da última, que exige uma discussão à parte, todas elas parecem expressar funções de verdade das proposições elementares. Com efeito, dados os valores de todas estas proposições, deve estar automaticamente determinado se o número de coisas que são *f* é maior, menor ou idêntico ao número de coisas que são *g*. E, se há infinitos objetos categorialmente compatíveis com a variável *x*, nada nos impede de imaginar que infinitas coisas sejam *f*.

A noção de 'série de formas', como se sabe, permitirá a Wittgenstein dar um tratamento adequado a todas estas proposições, sem ter, por isso, que postular uma hierarquia de entidades, ou de símbolos. Wittgenstein limita-se a notar que o mesmo princípio que fundamenta a quantificação permite também um acesso 'direto' (não mediado pela afirmação da existência de 'propriedades hereditárias', ou de 'relações biunívocas') a séries de proposições como a que examinamos há pouco. A quantificação está assentada na identidade formal de certas proposições. Como já vimos, o que *separa* a quantificação das funções de verdade é exatamente a intervenção prévia de um princípio de seleção que opera sem necessidade de enumeração exaustiva. Se a função '*fx*' tem infinitos valores, todos esses valores estão perfeitamente bem determinados, apesar do fato de ser logicamente impossível produzir uma enumeração exaustiva de todos eles. Estes valores podem ser descritos, em seu conjunto, como todos aqueles sinais proposicionais possuidores de tais e tais características *em comum*. Eles se agrupam por identidade formal.

No caso das séries, temos algo perfeitamente análogo. Consideremos a série dos números naturais

$$0,\ 0+1,\ 0+1+1,\ \text{etc.}$$

Ela é composta por uma infinidade de sinais caracterizada pela repetição de uma mesma *diferença* que vai se repondo termo a termo: o sufixo '+1'. É exatamente essa reposição indefinida da *mesma* diferença que nos permite usar uma 'expressão entre colchetes' como '[0, ξ, ξ+1]' para apreender a forma geral de um termo da série. Quando a série de formas é uma série de formas *proposicionais*, a passagem de um termo ao termo seguinte da série é chamada por Wittgenstein de 'operação'. Séries geradas pela aplicação sucessiva de uma certa operação formal a uma proposição de base podem ser sempre postas na forma

$$p, \Omega p, \Omega\Omega p, \text{etc.}$$

e podemos, então, usar uma expressão entre colchetes para nos referirmos a um elemento qualquer da série. Se 'p_0' significar '$\sim(\exists x). fx$' e 'Ω' for utilizado para simbolizar a passagem de um membro a outro na série

$$\sim(\exists x). fx$$
$$\sim(\exists x,y). fx . fy : (\exists x). fx$$
$$\sim(\exists x,y,z). fx . fy . fz : (\exists x,y). fx . fy$$
$$\text{etc.}$$

a expressão entre colchetes '$[p_0, x, \Omega x]$' estará caracterizando uma totalidade perfeitamente bem determinada de proposições, à qual faremos, então, corresponder uma variável proposicional 'ξ': os valores de 'ξ' serão as proposições da série. Como acontecia no caso da quantificação, '$(\overline{\xi})$' estará designando a totalidade das proposições recobertas pela variável, e poderemos, agora, aplicar uma operação de verdade a essa mesma totalidade para obter, assim, uma nova proposição.

As proposições que mencionamos mais acima podem receber, agora, um tratamento adequado. Seja

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

a série $[p_0, x, \Omega x]$ construída mais acima, e

$$q_0, q_1, q_2, \ldots$$

uma outra série exatamente idêntica, exceto pela ocorrência de '*g*' no lugar de '*f*'. As proposições da série $[q_0, x, \Omega x]$ afirmarão, portanto, a existência de exatamente nenhum *g*, exatamente um *g*, exatamente dois *g*'s, e assim por diante. É imediatamente claro que

$$\begin{gathered} p_0 \cdot q_0 \\ p_1 \cdot q_1 \\ p_2 \cdot q_2 \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

é uma série formalmente determinada de proposições. Fazendo agora com que a variável 'ξ' percorra essa série, fica claro que

$$\mathrm{N}\ \mathrm{N}\ (\overline{\xi})$$

está afirmando que o número (finito) de coisas que são *f* é idêntico ao número (finito) de coisas que são *g*. De forma abreviada, $n(f)=n(g)$.

Consideremos, agora, a série de proposições

$$\begin{gathered} (\exists x).\ fx \\ (\exists x,y): fx\ .\ fy \\ (\exists x,y,z): fx\ .\ fy\ .\ fz \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

Façamos com que

$$p'_0, p'_1, p'_2, \ldots \text{etc.}$$

representem as proposições da série. É claro que

$$\sim p'_0 \,.\, q_1$$
$$\sim p'_1 \,.\, q_2$$
$$\sim p'_2 \,.\, q_3$$
etc.

é também uma série formal e que, se fizermos, agora, a variável ξ percorrer a série, poderemos construir a proposição

$$\mathrm{N}\,\mathrm{N}\ (\overline{\xi}),$$

afirmando que o número (finito) de coisas que são *f* é menor que o número (finito) de coisas que são *g*. Abreviaremos esta afirmação da seguinte maneira: $n(f)<n(g)$.

Para afirmar que há infinitas coisas que são *f*, basta negar simultaneamente as proposições da série

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

Abreviadamente, escreveremos *Inf(f)*. A possibilidade da construção desta proposição, porém, está condicionada à existência de infinitos argumentos possíveis para *fx*. Se existem apenas dois objetos na categoria recoberta pela variável *x*, um sinal como '$(\exists x,y,z): fx \,.\, fy \,.\, fz$' não terá significado algum, dadas as convenções para o uso de variáveis. A possibilidade de construir séries de formas proposicionais significativas depende essencialmente da existência de uma infinidade de objetos na categoria sobre a qual se estiver quantificando. Se supusermos, no entanto, a existência dessa infinidade de objetos, a construção de sentenças afirmando a existência de infinitos objetos que são *f* não oferece dificuldade alguma. A construção de outras séries de proposições lançando-se mão de proposições como *Inf(f)* também será perfeitamente possível. Particularmente interessante é a série

$$\sim[Inf(f)\ .\ (\exists x).\sim fx]$$
$$\sim[Inf(f)\ .\ (\exists x,y).\ \sim fx.\sim fy]$$
$$\sim[Inf(f)\ .\ (\exists x,y,z).\ \sim fx.\sim fy.\sim fz]$$
etc.

Negar simultaneamente os termos desta série siginifica afirmar que há infinitas coisas que são *f* e infinitas coisas que não são. Claramente, a sentença não é contraditória e representa uma possibilidade no espaço lógico, caso o número de objetos categorialmente adequados ao preenchimento da função *fx* seja mesmo infinito.

Podemos, se quisermos, ampliar as relações de igualdade e desigualdade definidas acima de maneira a incluir a noção de 'infinito' nessas relações:

$$n(f) << n(g) =_{\mathrm{df}} \sim Inf(f)\ .\ Inf(g)\ \mathbf{:v:}\ n(f) < n(g)$$
$$n(f) \equiv n(g) =_{\mathrm{df}} Inf(f)\ .\ Inf(g)\ \mathbf{:v:}\ n(f) = n(g)$$

É neste ponto que a lógica do *Tractatus* estende-se à noção de número. Procurei mostrar, em outro artigo, por que tal extensão irá revelar-se insustentável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FREGE, G. (1962). *Grundgesetze der Arithmethik* (Hildesheim, Georg Olms).

———. (1966). *Begriffsschrift und andere Aufätze* (Hildesheim, Georg Olms).

———. (1967). *Kleine Schriften* (Hildesheim, Georg Olms).

RUSSELL, B. (1988). *Logic and Knowledge* (Londres, Unwin Hyman).

RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A.N. (1910). *Principia Mathematica,* vol. I. (Cambridge, Cambridge University Press).

SMULLYAN, R. (1995). *First Order Logic* (Nova York, Dover).