

CDD: 510.1

EM TORNO DA INTERPRETAÇÃO OPERACIONALISTA DO PROGRAMA DE HILBERT

ABEL LASSALLE CASANAVE

*Departamento de Filosofia,
Universidade Federal de Santa Maria,
Campus Universitário, Km 9, Camobi,
97150-900 SANTA MARIA, RS
BRASIL*

abel@ccsh.ufsm.br

Na primeira seção deste artigo, apresentamos alguns aspectos do operacionalismo de Bridgman. Na segunda e terceira seção, mostramos as dificuldades de aplicar o termo "operacionalista" ao formalismo de Hilbert. Na quarta seção, esquematicamente apresentamos uma interpretação do Programa de Hilbert, que consideramos mais adequada que a mencionada acima.

A literatura recente sobre o Programa de Hilbert procura encontrar no instrumentalismo o espírito filosófico do programa hilbertiano de fundamentação da matemática. Com efeito, segundo esta interpretação, para Hilbert uma espécie de análogo dos termos teóricos em física permitiria obter, através dos axiomas nos quais ocorrem, uma espécie de análogo matemático das conseqüências observacionais em física; os axiomas de uma teoria matemática seriam, então, meros instrumentos para deduzir afirmações suscetíveis de verificação. Desta perspectiva, a distinção hilbertiana entre afirmações

ideais e reais, ou entre afirmações transfinitas e finitárias, espelhariam a distinção entre teórico e observacional em física.

Assim, por exemplo, M. Detlefsen escreve: “Hilbert parece haver visualizado as teorias científicas empíricas e a matemática ideal instrumentalmente.” (Detlefsen (1990), p. 347) M. Giaquinto se exprime em termos semelhantes: “os únicos fatos são fatos observáveis, as teorias da física que incorporam alusões ao que não pode ser observado são simplesmente instrumentos mais ou menos eficazes para guiar a escolha e desenho de experimentos e deduzir hipóteses testáveis. A visão de Hilbert da sua teoria da demonstração estava inteiramente acorde com essa filosofia e ele estava ciente do paralelismo entre instrumentalismo em física e sua própria visão.” (Giaquinto (1983), p. 126).

Ora, para estas interpretações não se trata apenas de atribuir a Hilbert uma posição instrumentalista, senão de argumentar em favor do instrumentalismo como uma resposta possível, eventualmente a única possível, em relação à filosofia da matemática. A estratégia de apoiar-se na autoridade de Hilbert é natural, dada a influência fundamental que o Programa de Hilbert teve, e ainda tem, na discussão filosófica. A este respeito, a expressão mais clara de uma concepção instrumentalista da matemática a encontramos em C. Smorynski.

Para Smorynski foi H. Weyl o primeiro a sugerir (e corretamente) que Hilbert concebia a matemática instrumentalmente, concepção segundo a qual a matemática ideal teria significado apenas como médio para derivar afirmações reais. Smorynski declara sua coincidência com Weyl da seguinte maneira: “A sugestão de Weyl de conceber a matemática como uma ciência teórica, com seu coração finitário com significado e seu componente teórico transfinito sem significado, fornece a única posição filosófica coerente da matemática mo-

terna, clássica, infinitária que eu conheço” (Smorynski (1988), p. 55).

Ora, dado este contexto, nos parece relevante questionar a legitimidade de atribuir a Hilbert uma posição instrumentalista, atribuição que consideramos errônea. Se for correta nossa crítica, nos parece que contribuímos, ainda que indiretamente, a uma melhor compreensão e avaliação do desenvolvimento pós-hilbertiano da filosofia da matemática. Com efeito, para qualquer concepção filosófica atual acerca da matemática é essencial dar conta da natureza e limites de realização do Programa de Hilbert.

Neste artigo restringir-nos-emos a examinar a viabilidade de uma interpretação que relaciona o Programa de Hilbert com apenas uma variante de instrumentalismo, a saber, o operacionalismo de Bridgman. Em primeiro lugar, enunciaremos algumas características do pensamento de Bridgman; em segundo lugar, alguns aspectos do pensamento de Hilbert que parecem fornecer suporte à interpretação operacionalista. Em terceiro lugar, mostraremos que a perspectiva de Hilbert é diferente da de Bridgman tanto no que diz respeito ao objetivo do recurso à percepção quanto à forma de conceber a percepção. Para finalizar, esquematicamente indicaremos uma linha geral de interpretação que nos parece mais adequada que a seguida pela literatura que mencionamos acima, num sentido que esclarecemos a seguir.

Desde já cabe advertir que não pretendemos atribuir uma filosofia da matemática a Hilbert, que seria sua “verdadeira” filosofia da matemática. Não pretendemos também afirmar que Hilbert tinha preocupações filosóficas de natureza sistemática nem que fosse influenciado de maneira decisiva por uma concepção filosófica particular. O ponto para nós é encontrar os supostos que Hilbert admite explícita ou implícita-

mente para poder então afirmar que a realização de seu programa constitui uma fundamentação definitiva da matemática. Descobrir esses supostos permitiria, se for o caso, formular uma filosofia hilbertiana da matemática, que não necessariamente seria a filosofia da matemática do próprio Hilbert, se é que tal coisa alguma vez existiu, no mínimo, no sentido de uma reflexão orgânica.

1. A concepção do significado de Bridgman, exposta principalmente em *A Natureza da Teoria Física*¹, estabelece que um conceito deve ser caracterizado através das operações levadas a cabo quando o mesmo é utilizado. Na concepção do significado de Bridgman, o chamado significado operacional dos conceitos envolvidos numa afirmação, *inclusive* dos conceitos lógicos, determina o significado operacional da própria afirmação.

Para Bridgman, quando se trata de um conceito físico como tempo ou comprimento, o que devemos fazer é examinar as operações de medir o tempo com relógios ou medir comprimentos com uma régua. Examinado o significado operacional dos conceitos físicos, examina-se *depois* qual o significado operacional dos conceitos lógicos. Considere-se o uso em física do princípio de terceiro excluído. Concebido operacionalmente, tal princípio estabelece que, dado um objeto qualquer e uma propriedade qualquer, certas operações permitem determinar, por um lado, se o objeto tem a propriedade; outras operações, por outro lado, permitem determinar se o objeto não tem a propriedade.

¹ Cf. Bridgman (1948), caps. I-V.

Ora, a afirmação $A \vee \neg A$, segundo Bridgman, só poderia ser válida em geral se existisse uma relação entre as operações utilizadas para verificar A e as operações, eventualmente diferentes, utilizadas para verificar $\neg A$. A relação mais simples que poderia existir entre tais operações seria que a verificação de $\neg A$ consistisse meramente em observar o fracasso da verificação de A . Porém, situações operacionalmente elementares mostram que essas relações simples não ocorrem em geral nas afirmações que envolvem processos físicos. Verificar, por exemplo, se uma maçã é verde ou não é verde seria, por causa da imprecisão dos instrumentos e das falhas do observador, um exemplo elementar. Isto descarta, para Bridgman, o princípio de terceiro excluído como sem significado operacional no âmbito físico.

Bridgman examina então se o princípio vale no âmbito do que pensamos ou falamos, isto é, segundo Bridgman, naquele âmbito em que os “objetos” não apresentam contornos difusos, como, por exemplo, nas matemáticas. Considere-se, diz Bridgman, as afirmações em geral, e examine-se sob que condições o conceito de verdade pode sempre ser aplicado de forma tal que toda afirmação seja verdadeira ou falsa. Se a afirmação é universal, um contra-exemplo permite determiná-la como falsa; se universal e sobre um conjunto finito de objetos, então não achar um contra-exemplo permite determiná-la como verdadeira. Assim, neste contexto, o significado operacional de terceiro excluído é inobjetável.

Porém, tratando-se de um conjunto infinito, o conceito “verdadeiro” perde o significado operacional primitivo acima descrito. Com efeito, se o conjunto é tal que sua definição exclui qualquer objeto que seja um contra-exemplo da afirmação universal, então o princípio de terceiro excluído se aplica. Ora, um conjunto que exclua por definição contra-exemplos pode

ser finito ou infinito. Logo, para conjuntos finitos, tratando-se de afirmações universais, “verdadeiro” tem dois significados operacionais diferentes porém equivalentes – ou exame exaustivo de seus elementos ou contra-exemplos excluídos por definição -, enquanto que para conjuntos infinitos tem apenas um significado operacional – o último dos mencionados. Assim, como nada nos permite assegurar que os conjuntos infinitos tenham a propriedade exigida para a aplicação de terceiro excluído, então tal princípio carece em geral de significado operacional.

Uma afirmação do tipo “Existe no desenvolvimento decimal de π a seqüência 0123456789” apresenta problemas semelhantes. Se alguém apresentasse tal seqüência, determina-se a afirmação como verdadeira. Por outro lado, se alguém apresentasse uma demonstração de que supor a existência da seqüência leva a contradição, então determina-se a afirmação como falsa. Ora, como não se conhecem em geral procedimentos que resultem em uma das duas opções, dizer que a afirmação sobre a existência da mencionada seqüência é verdadeira ou falsa carece, para Bridgman, de significado. Portanto, ambos argumentos permitem concluir que o princípio de terceiro excluído carece de significado operacional.

2. O “operacionalismo” de Hilbert encontrar-se-ia na determinação do chamado “ponto de vista finito”. Em que consiste tal ponto de vista? Na descrição contida em ‘Sobre o Infinito’, a adequação de uma afirmação ao ponto de vista finito exige que, em primeiro lugar, os objetos sejam dados, reconhecíveis como iguais ou diferentes. Em segundo lugar, deve-se poder sempre reconhecer se um objeto dado tem uma propriedade ou se entre vários dá-se uma relação. Se uma afirmação envolve exclusivamente uma referência a tais objetos, pro-

priedades e relações, então ela é aceitável do ponto de vista finito ou finitária. Decorrente disso, uma afirmação finitária não deve envolver a referência a totalidades infinitas. Até que ponto a lógica e a aritmética se adequam ao ponto de vista finito?

Como objetos da aritmética aparecem os sinais 1, 11, 111,.... Que duas seqüências de sinais sejam reconhecíveis como iguais ou diferentes é produto da percepção, satisfazendo então o primeiro dos requisitos destacados por Hilbert. Como propriedades e relações que satisfazem o segundo requisito Hilbert indica “maior que”, “dividir a”, “ser primo”, etc. Uma relação como “maior que” é um bom exemplo de relação reconhecível de maneira imediata. Assim, “ $3 > 2$ ” é uma afirmação finitária verdadeira, pois 11 é parte de 111; no entanto, “ $2 > 3$ ” é falsa, pois 111 não é parte de 11.

A introdução de afirmações que envolvem variáveis é justamente a questão problemática, questão que mostrará os limites da adequação da aritmética ao ponto de vista finito. Com efeito, há afirmações finitárias cuja negação, por exemplo, implica abandonar os limites do ponto de vista finito e, *desta perspectiva*, tais negações são entendidas como carentes de significado. Deste fato conclui-se, então, que o princípio de terceiro excluído carece de significado do ponto de vista finito:

Assim, por exemplo, o enunciado que [afirma que], se a é um sinal numérico, deve valer sempre

$$a + 1 = 1 + a,$$

do ponto de vista finito *não é passível de negação*. Isto fica claro quando consideramos que este enunciado não deve ser interpretado como uma conexão infinita de muitas equações numéricas por meio de “e”, senão como um juízo hipotético que afirma algo caso seja exibido um sinal numérico.

Daí segue-se, em particular, que no espírito do pensamento finito nós não podemos usar a alternativa segundo a qual, para uma equação como aquela acima, na qual aparece um sinal numérico indeterminado, ou bem ela é satisfeita por to-

dos os sinais numéricos, ou bem é contraditada por um contra-exemplo. Pois esta alternativa, certamente, entanto que aplicação de terceiro excluído, descansa essencialmente no pressuposto de que a afirmação da validade geral daquela equação é passível de negação. (Hilbert (1925), p. 278)²

No entanto, Hilbert não adota a postura de tentar estabelecer quais leis lógicas clássicas valem do ponto de vista finito, para então restringir-se apenas a seu uso na matemática. Às afirmações finitárias, também chamadas de reais, com conteúdo ou aceitáveis do ponto de vista finito, acrescentamos afirmações chamadas de ideais: “assim, devemos *somar os enunciados ideais aos enunciados finitários*, para preservar as regras formais simples da lógica aristotélica” (Hilbert (1925), p. 280)³.

Vemos então, em primeiro lugar, que a análise de Bridgman partilha com os intuicionistas e Hilbert o que po-

² “So ist z. B. die Aussage, dass, wenn a ein Zahlzeichen ist, stets

$$a + 1 = 1 + a$$

sein muss, vom finiten Standpunkt *nicht negationsfähig*. Dies können wir uns klar machen, indem wir bedenken, dass diese Aussage von diesem Standpunkte aus nicht als eine Verbindung unendlich vieler Zahlengleichungen durch ‘und’ gedeutet werden darf, sondern nur als ein hypothetisches Urteil, welches etwas behauptet für den Fall, dass ein Zahlzeichen vorliegt.

Hieraus folgt insbesondere, dass wir im Sinne der finiten Einstellung nicht die Alternative anwenden können, wonach eine Gleichung wie die obige, worin ein unbestimmtes Zahlzeichen vorkommt, entweder für jedes Zahlzeichen erfüllt ist oder durch ein Gegenbeispiel widerlegt wird. Denn diese Alternative beruht ja, als Anwendung des Tertium non datur, wesentlich auf der Voraussetzung, dass die Behauptung der allgemeinen Gültigkeit jener Gleichung einer Negation fähig ist.”

³ “So haben wir hier zu *den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren*, um die formal einfachen Regeln der üblichen Aristotelischen Logik zu erhalten.”

demos denominar rejeição do caráter de disciplina subjacente e a-problemática da lógica: as leis lógicas clássicas não admitem em geral uma interpretação operacional. Nisto Hilbert coincidiria com Bridgman, se traduzimos “significado operacional” por “sentido do ponto de vista finito”. Mas, em segundo lugar, para Bridgman a lógica e a matemática são ciências experimentais.

Com efeito, para Bridgman o requerimento de consistência dos matemáticos está intimamente relacionado com a convicção de que as “coisas” são consistentes. Ora, nossa relação com as “coisas” repousa sobre alguma classe de experiência e “tudo o que podemos afirmar é que nenhuma experiência no passado foi auto-contraditória, porém, não temos nenhuma certeza absoluta sobre o futuro.” (Bridgman (1934), p. 107). Assim, devemos reconhecer que a matemática repousa, no mínimo, sobre tal base experimental. Em *Sobre o infinito*, Hilbert declara que é uma necessidade postular que os fatos sejam contraditórios, pois contradições só vigem entre afirmações. Poucas dúvidas há que Hilbert estenderia esta afirmação à experiência da qual fala Bridgman.

Em princípio, então, se pretendemos associar o pensamento de Bridgman com o de Hilbert, não podemos esquecer que o operacionalismo bridgmaniano implica: (a) o abandono simples da lógica clássica, não apenas de princípios intuicionisticamente inaceitáveis, senão também eventualmente do princípio de não-contradição; (b) atribuir à matemática e à lógica o caráter de disciplinas sujeitas às mesmas restrições que qualquer ciência empírica no que diz respeito à verdade e exatidão. Reconhecidamente, duas teses inaceitáveis para Hilbert.

3. Marcus Giaquinto indica, no entanto, outra perspectiva a partir da qual podem estabelecer-se pontos de contato en-

tre Hilbert e Bridgman (Giaquinto (1983)). Para Giaquinto, Hilbert trata de demonstrar a consistência da análise e da teoria de conjuntos, instrumentalmente concebidos, sem o recurso a totalidades infinitas, de forma tal que se reduzem as afirmações fundamentais das mencionadas teorias à seqüências de símbolos sem significado, cuja função é deduzir afirmações finitárias verdadeiras. Assim, Hilbert dividiria as afirmações matemáticas em afirmações com conteúdo (com significado) e afirmações sem conteúdo (sem significado). Aquelas afirmações que são decidíveis num número finito de passos e qualquer esquema universal cujas instâncias são todas finitariamente decidíveis têm conteúdo. As afirmações mencionadas são as reais; as restantes são seqüências de símbolos sem significado ou ideais. Entre as seqüências de símbolos sem significado encontraríamos, entre outras, as leis lógicas clássicas.

Com estes pressupostos, Giaquinto enuncia sua visão do programa de Hilbert como um programa de redução ou de eliminação:

A essência do programa era encontrar um modo de substituir toda prova de uma proposição real por uma prova de tal proposição que fosse puramente finitária (não contendo nenhuma proposição ideal). Dado que não há prova finitária de ' $1 \neq 1$ ', isso assegura que essa proposição não pode ser derivada no sistema e, então, que o sistema é consistente (dado que qualquer fórmula da forma ' $(A \ \& \ \neg A) \rightarrow B$ ' é demonstrável)". (Giaquinto (1983), p. 123)

Num suposto espírito filosófico da época encontra Giaquinto uma justificativa do Programa de Hilbert entendido como um programa instrumentalista de redução. A distinção entre proposições reais como significativas e as ideais como não-significativas a encontra Giaquinto no positivismo lógico: as únicas verdades são aquelas que podem ser verificadas por

observação. Tal espírito da época levou a programas de redução que pretendiam mostrar que as partes puramente teóricas ou não-observacionais de uma ciência particular são, em última instância, elimináveis em favor de afirmações sobre operações e regularidades naquilo que pode ser observado. O operacionalismo de Bridgman é, para Giaquinto, uma das mais claras expressões deste ressurgimento do empirismo.

Ora, em relação à lógica, vimos que para Bridgman a caracterização operacional dos conceitos lógicos envolvia uma recusa do princípio de terceiro excluído, com as conseqüências matemáticas do caso. Um exemplo semelhante o encontramos na análise de Bridgman da teoria dos conjuntos, onde a exigência de caracterização operacional conclui na rejeição do “método diagonal” de Cantor. Lembrando uma afirmação de Hilbert: “Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor abriu para nós” (Hilbert (1925), p. 274) Bridgman escreve: “Eu suspeito que [...] a condição para entrar nesse paraíso é admitir de boa vontade paradoxos.” (Bridgman (1934), p. 110) Em geral, em relação aos conceitos e métodos matemáticos, e com as reservas em relação à experiência que fizemos acima, Bridgman declara:

[...] é imediatamente óbvio que a técnica operacional automaticamente assegura à matemática o *sine qua non* de auto-consistência, pois operações levadas a cabo efetivamente, sejam físicas ou mentais, são uma forma especial de experiência, de modo que qualquer conceito ou argumento matemático analisado em termos de operações efetivas deve possuir a auto-consistência de toda experiência. (Bridgman (1934), p. 108)

Porém, Bridgman rejeitava o que considerava uma demanda excessiva de Heisenberg, isto é, não pensava em relação aos conceitos físicos que fosse possível defini-los a todos em

termos operacionais. Hilbert também não pensava que a todos os conceitos lógicos, matemáticos e físicos possa (e deva) se fornecer uma interpretação “operacional”. Para Hilbert, mesmo na física, apenas algumas conseqüências das hipóteses podem ser diretamente verificadas. Na medida, então, em que não aparece a exigência de que todos os termos de um enunciado tenham interpretação operacional, Giaquinto afirma que Hilbert, de modo igual a Bridgman, resistiu aos excessos do mencionado ressurgimento empirista. Os intuicionistas seriam, no que diz respeito à matemática, aqueles que exagerariam, segundo Giaquinto, ao exigir que toda afirmação de toda teoria matemática deve ter interpretação construtiva.

Exigir, com efeito, que cada afirmação isolada de uma teoria seja interpretável, por exemplo, no sentido construtivista, não é para Hilbert uma exigência racional⁴. Com efeito, numa teoria física somente algumas conseqüências da mesma são suscetíveis de ser testadas por experimento. Da mesma maneira, numa teoria matemática somente algumas das afirmações implicadas pela mesma são suscetíveis de verificação, isto é, as afirmações reais. Mas o fato de uma afirmação não ser interpretável não implica, como pensa Giaquinto, que a afirmação careça de sentido, a menos que postulemos o que está em discussão: a atribuição de uma teoria empirista do significado a Hilbert, mas uma teoria ainda mais radical que aquela dos empiristas lógicos, como a de Bridgman. Assim, as verdades lógicas e matemáticas também seriam examinadas sob o crivo do critério de significação empírica, tese reconhecida não partilhada pelo empirismo lógico. Ora, para nós, a

⁴ Cf. D. Hilbert (1928), p. 305: “Die Forderung, wonach dabei jede einzelne Formel für sich allein deutbar sein soll, allgemein aufzustellen, ist keineswegs vernünftig...”

perspectiva da qual Hilbert vê o problema é diferente da de Bridgman, isto é, a percepção como garantia para a intersubjetividade da pesquisa sobre fundamentos. Isto traduz-se numa restrição *metodológica* do que se deve entender como provido ou desprovido de significado com vistas à prova de consistência.

Chamamos de *formalistas moderadas*⁵ aquelas interpretações que atribuem a Hilbert a tese de que a matemática inclui uma parte entendida como significativa e outra sem significado, a exemplo da interpretação de Giaquinto. Para nós, essas interpretações confundem afirmações feitas da perspectiva da metamatemática com afirmações filosóficas substantivas. É da perspectiva fundacional, que aponta à prova de consistência dos sistemas formais que representam as teorias matemáticas fundamentais, que há para Hilbert, segundo achamos, afirmações com significado ou sem significado, termos estes últimos que devem ser entendidos de maneira relativa e não absoluta. Um formalismo, então, que preferimos qualificar de *metodológico*. Assim, no exame do ponto de vista finito da lógica ou da aritmética trata-se de *mostrar* com fins fundacionais – leia-se: metodológicos – que “fragmento” daquelas é confiável considerando como instância *intersubjetiva* a percepção.

Com efeito, o ponto de partida da fundamentação da matemática de Hilbert é uma crítica ao que ele entende como subjetivismo. Em *Os Fundamentos da Geometria*, escrito em 1899, Hilbert afirma que a regra fundamental que guiou sua investigação é considerar se, dada qualquer questão geométrica, ela pode ser respondida de um modo específico através de meios limitados. Em relação à “pureza” de métodos de prova que requerem alguns matemáticos, escreve:

⁵ A expressão é de Prawitz (1986).

Esse requerimento não é basicamente outra coisa que uma *forma subjetiva* da regra fundamental aqui seguida. (Hilbert, (1980), p. 107; grifos nossos)

Em 'Os Fundamentos da Matemática', de 1928, Hilbert, para defender-se de algumas objeções construtivistas, afirma que o pensamento fundamental de sua teoria da prova ou metamatemática é descrever a atividade do pensamento; é examinar como nosso pensamento procede. Escreve então contra os construtivistas em geral e os intuicionistas em particular:

Se há uma totalidade de observações e fenômenos que merece ser objeto de uma investigação séria e profunda é esta -pois, depois de tudo, é parte da tarefa da ciência libertar-nos da arbitrariedade, do sentimento e preconceitos, e *proteger-nos do subjetivismo* que se sente nos pontos de vista de Kronecker e, segundo me parece, encontra sua culminação no intuicionismo. (Hilbert (1928), p. 306; grifos nossos)⁶

Como vemos, em textos separados por 30 anos – e poderíamos indicar outros – aparece uma crítica a posturas que, aos olhos de Hilbert, são subjetivistas. O recurso hilbertiano à percepção, que entende como essencialmente intersubjetiva, cumpre (parcialmente) a função de substituir o recurso à intuição dos construtivistas, que redundava para Hilbert no subjetivismo. Uma prova de consistência, apoiada na instância inter-

⁶ "Wenn irgendwo eine Gesamtheit von Beobachtungen und Erscheinungen verdient, zum Gegenstand einer ernsten und gründlichen Forschung gemacht zu werden, so ist es diese hier-liegt es doch in der Aufgabe der Wissenschaft, uns von Willkür, Gefühl und Gewöhnung freizumachen und vor dem Subjektivismus zu bewahren, der sich schon in den Anschauungen *Kroneckers* bemerkbar gemacht hat und der, wie mir scheint, in dem Intuitionismus seinen Gipfelpunkt erreicht."

subjetiva da percepção, completa para Hilbert uma fundamentação intersubjetiva da matemática.

Ora, em relação à percepção, há um aspecto das concepções de Bridgman que diferem de Hilbert de maneira muito significativa, aspecto que diz respeito também à questão mais geral da possibilidade de considerar Hilbert como instrumentalista. Vejamos sinteticamente o que diz Bridgman a respeito do pensamento, a linguagem e a experiência. Entre a linguagem e a experiência existe um abismo: a *atividade* é a propriedade fundamental da experiência; a linguagem “congela” a realidade separando pequenos elementos, fato útil, mas essencialmente diferente da experiência (Bridgman (1948), pp. 55-56). O pensamento, independentemente de atingir determinados estágios do desenvolvimento da linguagem, separa também a experiência em pequenos elementos: não pode ter a mesma estrutura da experiência e não devemos esperar poder dar conta desta última a partir do primeiro (*ibid.*, p. 58).

O aspecto instrumental atribuído à linguagem e ao pensamento deriva de uma análise da experiência na qual a “realidade” nos aparece. Para Bridgman a experiência direta abarca apenas o que se acha na minha consciência, a saber, impressões sensoriais de diferentes classes e outras espécies de fenômenos mentais. Nesse material distingo partes do mesmo que descrevo como externas e outras partes que descrevo como internas. A experiência é algo dinâmico e não estático, algo em fluxo contínuo (*ibid.*, pp. 42-44).

Resumindo, podemos dizer que no *contínuo* da experiência *distinguimos* algo externo e interno e, no que diz respeito ao externo, os objetos são uma *elaboração nossa*, separando no contínuo “pequenos elementos”. Ora, parece-nos suficientemente claro que o ponto de partida, isto é, a análise da expe-

riência, é absolutamente diferente em Hilbert e Bridgman. Com efeito, lemos em 'Sobre o Infinito':

Já Kant ensinou – e, por certo, constitui uma parte significativa de sua teoria – que a matemática dispõe de um conteúdo assegurado independentemente de toda lógica e por isso nunca pode ser fundamentada pela lógica só. Por isso também os esforços de Frege e de Dedekind deviam fracassar. Ainda mais, algo dado na representação é algo assim como uma pré-condição para a utilização de raciocínios lógicos e para o funcionamento das operações lógicas: certos objetos concretos extra-lógicos que estão presentes intuitivamente como vivência imediata, previamente a todo pensamento. Para que o raciocínio lógico seja confiável, esses objetos devem deixar-se ver, de um relance só, completamente em todas as suas partes; e suas manifestações, suas diferenças, sua seriação recíproca ou sua concatenação, são dadas imediata e intuitivamente, ao mesmo tempo que os objetos, como algo que não se deixa mais reduzir a alguma outra coisa ou que nem precisa de uma tal redução. (Hilbert (1925), p. 275)⁷

⁷ “Schon Kant hat gelehrt -und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre-, dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, weshalb auch die Bestrebungen von Frege und Dedekind scheitern mussten. Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, ausserlogische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schliessen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen, und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereichtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder einer Reduktion bedarf.”

E acrescenta:

Esta é a concepção filosófica fundamental que eu considero como exigência tanto para a matemática quanto em geral para todo pensamento, compreensão e comunicação científicos. (*Ibid.*)⁸

Na medida, então, em que certas variantes de instrumentalismo, como a de Bridgman, decorrem de “análises da experiência” semelhantes, aparece como injustificado considerar o Programa de Hilbert como expressão de instrumentalismo. Em especial, por uma razão simples: o instrumentalismo seria, para Hilbert, uma forma de subjetivismo.

4. O ponto de partida das reflexões de Hilbert em torno da natureza da matemática é, então, pura e simplesmente que, *qua* ciência intersubjetiva, não pode nela haver lugar para posturas de natureza subjetivista; em particular, numa ciência destinada a fundamentar a própria matemática, a saber, a metamatemática. Com tantas cabeças quanto a Hidra, o subjetivismo para Hilbert adquire formas variadas: em geral, a recusa inaceitável de demonstrações por preferências subjetivas de métodos; em especial, e relacionado obviamente com o anterior, o recurso por parte dos matemáticos constructivistas a uma instância subjetiva como a intuição.

Em 1900 a resposta a esse subjetivismo em relação à introdução de métodos e conceitos matemáticos é a prova de consistência com a tese associada “Consistência implica exis-

⁸ “Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte und ohne die eine geistige Betätigung gar nicht möglich ist.”

tência”. Nos anos 20, a resposta ao subjetivismo deve ser diferente porque, por um lado, o conhecimento científico mostrou, para Hilbert, que na natureza não há nada infinito e, por outro lado, porque para Hilbert pensamento e realidade participam de uma sorte de harmonia preestabelecida. Por último, porque a questão relevante é dar conta da matemática clássica, e não ser conseqüente com teses ontológicas sobre a natureza das entidades matemáticas. Ora, independentemente de teses como “Consistência implica existência”, a demonstração de consistência é sempre para Hilbert o teste último de aceitação de uma teoria matemática.

O leitor não terá deixado de perceber alguns “temas leibnizianos” no parágrafo acima, a saber, a referência à harmonia preestabelecida e à possibilidade que implica existência. Estes são os temas leibnizianos *explícitos* em Hilbert, sendo o abandono, ou, no mínimo, uma reinterpretação do segundo deles, o que parece aproximar Hilbert a Kant. Porém, mais interessante é destacar os temas leibnizianos *implícitos* no Programa de Hilbert. Em primeiro lugar, o ponto que dissemos ser de partida. Com efeito, a crítica de Hilbert à intuição como subjetiva lembra a crítica leibniziana à intuição cartesiana. Em segundo lugar, a substituição de tal instância subjetiva por uma intersubjetiva, a saber, o sistema formal axiomático e a demonstração de consistência em Hilbert lembram o recurso às definições e à demonstração de possibilidade do definido que tinha para Leibniz uma finalidade semelhante.

Além disso, cabe destacar que entre as funções que podem ser atribuídas à *characteristica universalis* leibniziana encontra-se a de permitir demonstrar através dos *characteres* a possibilidade do definido, da mesma maneira que o sistema formal hilbertiano permitiria uma demonstração de consistência através de propriedades perceptíveis de seqüências de sím-

bolos. Porém, para não concluir com Weyl que Hilbert pretende fundamentar a matemática clássica por meio de uma radical reinterpretação da mesma, a saber, concebê-la como um *estoque* de fórmulas total ou parcialmente desprovidas de significado, é necessária uma justificação de por que a demonstração de que certa seqüência de símbolos não é produzida dentro do sistema formal é uma fundamentação da matemática, e não uma “mudança de assunto”.

Aqui aparecem um terceiro e um quarto tema leibniziano. Em primeiro lugar, se para Leibniz os *characteres* nunca são inteiramente arbitrários, para Hilbert o sistema axiomático, inclusive quando concebido como um “jogo de fórmulas”, “expressa a técnica de nosso pensamento”⁹, a saber, proceder a partir de um número finito de premissas por meio de um número também finito de inferências. Em segundo lugar, da mesma maneira que Leibniz encontra nas definições reais a expressão do infinito através do finito, e daí a possibilidade de tratamento do primeiro através do segundo, para Hilbert só podemos alcançar “livre trato e domínio completo”¹⁰ sobre o infinito através também do finito, isto é, através do sistema axiomático.

Se fôr correta à linha de interpretação que esquematicamente sugerimos, nos parece que mostraria, em geral, a profunda inadequação não apenas da interpretação operacionalista, senão também das interpretações que procuram encontrar

⁹ Cf. D. Hilbert (1928), p. 306: “Dieses Formelspiel vollzieht sich nämlich nach gewissen bestimmten Regeln, in denen die Technik unseres Denkens zum Ausdruck kommt.”

¹⁰ D. Hilbert (1923), p. 182: “Auf dem Boden des Finiten soll also die freie Handhabung und volle Beherrschung des Transfiniten erreicht werden!”

no instrumentalismo em geral o substrato filosófico do Programa de Hilbert. Por certo, quando destacamos o que denominamos “temas leibnizianos” no Programa de Hilbert não por isso pretendemos afirmar que Hilbert foi direta ou indiretamente influenciado por Leibniz, questão que nos parece secundária. Preferimos sugerir que nos encontramos face uma *forma mentis* comum para reagir face um inimigo também comum, a saber, a fundamentação de conceitos e métodos matemáticos numa instância considerada como subjetiva.

Abstract: In the first section of this paper, we present some aspects of Bridgman's operationalism. In the second and the third sections, we show certain difficulties in applying the term "operationalist" to Hilbert's formalism. In the fourth section, we sketch an interpretation of Hilbert's program, which we consider more adequate than the former interpretation.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRIDGMAN, P.W. (1927). *The Logic of Modern Physics* (New York, MacMillan).
- . (1934). “A Physicist's Second Reaction to *Mengenlehre*”, *Scripta Mathematica*, II, 101-117, e II, 224-234.
- . (1936). *The Nature of Physical Theories* (Princeton NJ, Princeton University Press).
- . (1948). *La Naturaleza de la Teoría Física* (Buenos Aires, Ibero-Americano).

- DETLEFSEN, M. (1990). "On an alleged refutation of Hilbert's Program using Gödel's First Incompleteness Theorem", *Journal of Philosophical Logic*, 19, 343-377.
- GIAQUINTO, M. (1983). "Hilbert's philosophy of mathematics", *British Journal for the Philosophy of Science*, 34, 119-132.
- HILBERT, D. (1923). "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematischen Annalen* Bd. 88, 151-165, reimpresso em Hilbert (1970), 178-191.
- . (1925). "Über das Unendliche", *Mathematischen Annalen* Bd. 95, Anhang VIII em Hilbert (1930), 262-288. [Utilizamos também a tradução inglesa de Stefan Bauer-Mengelberg, publicada em Van Heijenoort (1967), pp. 369-392, e a tradução inédita ao espanhol de Carlos Gonzalez.]
- . (1928). "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen des mathematischen Seminars zu Hamburg* Bd. 6; Anhang X em Hilbert (1930), 289-312 [Utilizamos também a tradução inglesa de Stefan Bauer-Mengelberg e Dagfinn Føllesdal, em Van Heijenoort (1967), 464-479.]
- . (1930). *Die Grundlagen der Geometrie*, 7ª edição (Leipzig & Berlin, B.G. Teubner).
- . (1970). *Gesammelte Abhandlungen*, zweite Auflage, Vol. III (Berlin, Heidelberg & New York, Springer-Verlag).
- . (1980). *The Foundations of Geometry*, translated by L. Unger (La Salle, Open Court).

PRAWITZ, D. (1986). "Philosophical Aspects of Proof Theory".
in: G. Fløistad (ed.) *Contemporary Philosophy: A New Survey*,
Vol. I (Dodrecht, Boston & Lancaster, Martinus Nijhoff),
pp. 235-277.

SMORYNSKI, C. (1988). "Hilbert's Programme". *CWI (Centrum
voor Wiskunde en Informatica) Quarterly*, 1, 3-59.

VAN HEIJENOORT, J. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A Source
Book in Mathematical Logic* (Cambridge Mass., Harvard
University Press).