

LA CONCEPCIÓN DE DEMOSTRACIÓN DE OSWALDO CHATEAUBRIAND

ABEL LASSALLE CASANAVE

*Departamento de Filosofia,
Universidade Federal de Santa Maria,
Campus Universitário, Km 9, Camobi,
97150-900 SANTA MARIA, RS
BRASIL*

abel@ccsh.ufsm.br

O. Chateaubriand ha objetado recientemente la concepción padrón de demostración como secuencia efectiva de fórmulas. En este artículo, pretendemos examinar sus argumentos, los cuales giran en torno de una noción amplia de comprensión. Aunque concordemos en general con los mismos, no estamos de acuerdo con la manera en que el Prof. Chateaubriand plantea el problema de la relación entre comprensión y formalismo.

En un artículo brillante, *Proof and Logical Deduction*¹, Oswaldo Chateaubriand denunció un crimen: la reducción de la noción de demostración a la de secuencia de fórmulas sin significado; es decir, a una noción sintáctica de demostración. Denuncia también, aunque de manera un tanto vaga, a sus ejecutores. En ambos casos no podemos menos que coincidir: hubo un crimen y hubo ejecutores. No obstante, divergimos cuando sindica como autor intelectual del mismo a David Hilbert, aunque no podamos negar que el acusado no haya dado lugar a tal sospecha con alguna declaración desafortunada. Una breve defensa del punto de vista de Hilbert nos permitirá introducir la perspectiva desde la cual exa-

¹ Chateaubriand (1999).

minaremos las tesis del Prof. Chateaubriand acerca de la noción de demostración².

La posición de Hilbert, así como el espíritu de su Programa, se dirige contra quienes pretenden que hay una instancia privilegiada que permite decidir sobre la legitimidad de conceptos y métodos matemáticos: una suerte de epifanía de la comprensión. Como suele ocurrir con cualquier epifanía, la epifanía constructivista se tradujo en restricciones: el rechazo de conceptos y métodos no-constructivos. Por cierto, no es infrecuente que esta posición venga también acompañada por una minimización de la relevancia del simbolismo en la constitución del conocimiento matemático, cuando no por la directa eliminación del papel del mismo.

Como nosotros lo entendemos, el formalismo de Hilbert es una respuesta a la pretendida epifanía de la comprensión y sus restricciones, junto con el reconocimiento de la importancia, en planos diferentes, de la manipulación simbólica. Ahora bien, la crítica de Chateaubriand a la identificación de demostración matemática con una concepción sintáctica de la misma supone una noción de comprensión que no es explicitada, aunque evidentemente no implique, como luego veremos, las consecuencias restrictivas a las que hicimos referencia. Si peca, es por exceso y no por defecto. Pero, independientemente de cualquier juicio acerca del punto anterior, el énfasis sobre la comprensión que Chateaubriand nos propone sí podría implicar una evaluación no del todo adecuada del papel de la mencionada manipulación.

La concepción de demostración de Chateaubriand, aunque esquemáticamente expuesta, es de una riqueza tal que nosotros no podemos pretender examinarla en todos sus detalles. Nos hemos restringido al análisis de dos ejemplos que utiliza como contrapunto de la concepción padrón de demostración. Tal concepción padrón incluiría entre sus notas principales el carácter

² Damos por descontado que la generosidad del Prof. Chateaubriand ignorará que hayamos transformado una observación marginal suya sobre Hilbert en tema central de este trabajo.

finito de las demostraciones y su testabilidad algorítmica. En la primera sección, analizamos un ejemplo de demostración en la cual entra en juego una cierta noción de comprensión, que no nos parece incompatible con la concepción hilbertiana de demostración matemática. En la segunda sección, el concepto de comprensión de Chateaubriand le permite admitir demostraciones de “estructura infinita”, lo cual resulta más difícil de digerir para un hilbertiano.

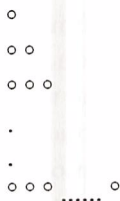
I

Tal vez la caracterización más general de demostración con la cual Chateaubriand concuerda es la que le atribuye a Hardy³: “Un objetivo fundamental de una demostración es comprender y explicar por referencia a lo que es previamente comprendido.” (Chateaubriand (1999), p. 87) El eco aristotélico de esta declaración, confirmable por una ulterior referencia a los *Segundos Analíticos*, no debería llevar a pensar que lo previamente comprendido se manifieste para Chateaubriand solamente bajo la especie de la axiomática. Por el contrario, nos parece que un aspecto de no menor importancia de su concepción, aunque no suficientemente resaltado, es que no se identifica demostración con demostración axiomática.

El primer ejemplo de Chateaubriand que consideraremos – una demostración de la afirmación $1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$ – es sumamente instructivo⁴. Representemos los primeros n números por las unidades

³ Las ideas contenidas en Hardy (1929) son las que han influenciado más profundamente la concepción de Chateaubriand.

⁴ Por razones de exposición hemos alterado el orden en que los ejemplos son dados en Chateaubriand (1999).



¿Cuántas unidades hay? Si completamos el cuadrado hay n^2 ; si cortamos el cuadrado por la diagonal hay $\frac{n^2}{2}$. Todavía no tenemos todas las unidades de la figura, pues faltan las mitades cortadas por la diagonal. ¿Cuántas mitades faltan? Evidentemente, $\frac{n}{2}$. Luego, sumando $\frac{n^2}{2}$ a $\frac{n}{2}$, tenemos, operando algebraicamente, $\frac{n^2+n}{2}$, que es lo que queríamos demostrar.

Chateaubriand contrapone, en el ámbito de la enseñanza elemental, esta demostración a la demostración usual utilizando el principio de inducción. El estudiante puede efectuar todos y cada uno de los pasos de la demostración por inducción, puede verificar la corrección de cada uno de ellos, pero puede también no quedar convencido de la verdad de la afirmación. En efecto, el estudiante no comprende por qué la afirmación es verdadera. La otra demostración, en cambio, produce el tipo de comprensión que trae aparejada convicción. Ahora bien, causar convicción es una característica que Chateaubriand también admite como nota propia de una demostración. Lo que no admite es que ésta se traduzca en testabilidad algorítmica: la convicción es (o debería ser) resultado de la comprensión y esta última no puede ser reemplazada por verificación.⁵

Examinemos cómo la comprensión es alcanzada a través de la demostración que Chateaubriand contrapone a la demostra-

⁵ Cfr. Chateaubriand (1999), p. 87.

ción inductiva y cuál es el límite que el procedimiento demostrativo utilizado impone. La demostración descansa sobre una “representación” de los números naturales, pero no se nos dice qué es tal representación. Una opción es concebirla a la manera de las figuras en la geometría euclidiana; otra manera es pensar que tal representación es una *notación* para los números naturales. Si se trata de esto último, se podría pensar que la demostración descansa entonces sobre la composición y descomposición de numerales. En tal caso, la demostración tiene un aire de demostración finitaria-contentual *à la* Hilbert.

En efecto, considerar demostraciones por composición y descomposición de numerales fue una de las opciones conjeturadas por Hilbert para diferenciar los procedimientos finitarios del principio de inducción de la teoría formal de números. Así, propiedades como asociatividad o conmutatividad son finitariamente demostradas por procedimientos de esa naturaleza. Para Hilbert estas demostraciones no son de naturaleza axiomática ni es necesario que lo sean. Y esto simplemente ocurre porque la legitimidad de los conceptos y métodos utilizados, por el lado constructivista, no están sujetos a ninguna objeción, y, desde la perspectiva de Hilbert, porque la consistencia de los mismos es inmediata.

El mismo recurso notacional también permite para Hilbert verificar ecuaciones numéricas elementales del tipo “ $2 + 2 = 4$ ”. Y, como bien afirma Chateaubriand, una demostración de tal afirmación en la teoría formal de números nada dice en relación a la verdad de la misma. Por el contrario, habla más bien en favor de la formalización de la teoría; pues si no se pudiésemos alguna manera representar dentro del formalismo los procedimientos “informales” que verifican tales ecuaciones entonces no se trataría de un sistema formal de la teoría de números⁶. En particular, vale el mismo argumento en relación a la afirmación “ $1 + 2 + \dots +$

⁶ Esta observación se encuentra en Bernays (1941) y la recordamos aquí para destacar que el formalismo no se justifica por criterios meramente sintácticos. Volveremos sobre este punto más adelante.

$n = \frac{n^2 + n}{2}$ ”: que podamos demostrar dentro del sistema formal esta proposición, *aunque con una demostración de estructura lógica diferente*, habla en favor del principio de inducción, y no de la verdad de la proposición en cuestión.

Pero, sea que se trate de una demostración por composición y descomposición de numerales, o de una variante de la *ecthesis* geométrica, la limitación de este método es obvia: para demostrar propiedades más complejas se torna inmanejable. El principio de inducción se muestra como un “instrumento” de demostración más adecuado en el sentido de ser más potente. Por cierto, Chateaubriand no sugiere que no haya comprensión cuando se utiliza el principio de inducción; nos parece que sugiere –y no es trivial– que la comprensión depende del usuario. Ahora bien, se puede preguntar cuál es el alcance que la comprensión debe o puede tener. En otras palabras: ¿no es un elemento fundamental del quehacer matemático manipular símbolos sin estar envuelta la comprensión de por medio?

Señalamos que para Hilbert los numerales permitían establecer la verdad de las ecuaciones numéricas elementales. Pero si los números envueltos fuesen suficientemente grandes, evidentemente esta notación haría imposible calcular una suma. Así, recurrimos a la notación posicional y al algoritmo de suma correspondiente que nos permite efectuar tales cálculos. ¿En qué sentido cabe aquí hablar de comprensión? Parece, por el contrario, que lo esencial es precisamente eliminar la comprensión para poder efectuar el cálculo. Podría decirse que por comprensión se entiende comprender los principios que rigen la notación posicional, pero no estoy muy seguro de que estemos hablando de una y la misma comprensión. La notación posicional nos permite, en efecto, conocer propiedades acerca de los números naturales que la comprensión en principio *no nos permitiría conocer*. (Y, dígase también, que una notación menos feliz como la romana tampoco nos haría conocer.)

Consideremos otro caso. En cualquier demostración mínimamente compleja se utilizan pasos típicamente algebraicos como la suma de $\frac{n^2}{2}$ y $\frac{n}{2}$ vía factor común. Creemos que vale un argumento semejante al anterior: este tipo de manipulación algebraica se realiza sin estar envuelta comprensión alguna y, sin ella, cualquier demostración sería imposible. Podría, también aquí, argumentarse que la comprensión sería alcanzada, si fuera necesario. De nuevo no estoy muy seguro de que cuando el número de factores fuese suficientemente grande pudiera todavía hablarse de comprensión y que, aunque así fuera, esto no haría menos esencial manipular ciegamente para conocer propiedades numéricas.

Finalmente, consideraciones del mismo tenor se pueden tener alrededor del principio de inducción como método de demostración en teoría de números. El matemático experimentado de quien podemos presumir la comprensión del mencionado principio: ¿lo utilizará siempre bajo la especie de la comprensión o deberá también utilizarlo en algún sentido ciegamente cuando realice sus demostraciones? La respuesta es aquí también la misma. Como en los casos anteriores, obtendrá conocimiento sobre los números naturales porque utiliza el principio sin envolver la comprensión. Y si hubiere tal cabal comprensión, ésta sería recuperada después de haber manipulación simbólica ciega.

Creemos que ésta es por lo menos parcialmente la manera en que debe ser entendida la declaración hilbertiana de que es una exigencia irracional de los constructivistas pedir que la intuición “caiga” en el medio de los pasos de una demostración⁷. Inténtese demostrar, diría Hilbert, sin un aparato formal, sin manipulación simbólica. (Por cierto, del reconocimiento del papel de la manipulación simbólica en la constitución del conocimiento matemático no se sigue sin más que la matemática sea mera manipulación ciega de símbolos.)

⁷ Cfr. Hilbert (1927), p. 305.

Así, de nuestras observaciones pretendemos solamente concluir que la exigencia de comprensión debe ser complementada teniendo en cuenta este aspecto del conocimiento matemático que no es una característica accidental. Hay otro punto, relacionado con el anterior y sobre el cual volveremos más adelante, que debe, según nos parece, ser también tenido en cuenta: nos preguntamos si en relación a ciertos conceptos y métodos matemáticos, sobre los cuales ni el más optimista afirmaría tener una comprensión cabal de los mismos, el recurso al formalismo no es una instancia que sustituye una comprensión inalcanzable. Es verdad que Chateaubriand no exige nada parecido a una “comprensión cabal”, pero para nosotros que no haya una tal comprensión quiere decir, en última instancia, conocimiento por medio de signos.

II

El segundo ejemplo de Chateaubriand es más alarmante. En el ejemplo anterior, aunque pueda estar implícito que una demostración no sea siempre simplemente una secuencia de fórmulas, la demostración es de “estructura finita”: supuesto un numeral a arbitrario, una secuencia finita de pasos nos lleva a la conclusión deseada. En este sentido, tanto en esa demostración, como en la demostración por inducción, cabría pensar en la testabilidad algorítmica de la demostración. Pero ahora se nos pide que consideremos el siguiente conjunto de hipótesis **A**:

$$(i) (x) (y) (z) ((Rxy \wedge Ryz) \supset Rxz)$$

$$(ii) (x) \neg Rxx$$

$$(iii) Ra_1 a_2$$

$$(iv) Ra_2 a_3$$

$$(v) Ra_3 a_4$$

.

.

.

Se concluye de tales premisas que el dominio de \mathbf{R} es infinito como sigue: de (ii) y (iii) se deduce que a_2 es diferente de a_1 . Similarmen- te, de (ii) y (iv) se sigue que a_3 es diferente de a_2 . Pero de (i), (iii) y (iv) se sigue $\mathbf{R}a_1a_3$, luego también de (ii) se sigue que a_3 es diferente de a_1 . Por el mismo argumento se sigue que a_4 es diferente de a_1, a_2 y a_3 . Y así sucesivamente. Entonces, todos los a_n son diferentes y \mathbf{R} por lo tanto tiene un dominio infinito.

En relación a esta demostración, Chateaubriand destaca que nuestra comunicación de la misma es, como no podría ser de otra manera, finita; pero que su estructura es infinita: usa todas las hipótesis de \mathbf{A} . Esto implica, naturalmente, que la demostración no es algorítmicamente testable, aunque, por otro lado, comprendemos la demostración y quedamos convencidos de que es consecuencia lógica del conjunto de hipótesis \mathbf{A} que \mathbf{R} tiene un dominio infinito.

Ahora bien, desde el punto de vista de la concepción pa- drón, esta demostración no sería aceptable, aunque sí lo sería *en principio* una demostración “semejante” de la proposición siguien- te: que es consecuencia lógica de las primeras $10^{10^{10}} + 2$ hipótesis que el dominio de \mathbf{R} tiene por lo menos $10^{10^{10}}$ individuos. La úni- ca diferencia efectiva que existiría es que en la segunda demostra- ción no se diría “Y así sucesivamente” sino “Y así sucesivamente hasta a $10^{10^{10}}$ ”. Pero es absurdo, además de empíricamente inadmisibles, decir que para estar convencidos de la proposición anterior tendríamos que testar los pasos en cuestión. Resume Chateaubriand:

Aunque la representación matemática de las dos demostra- ciones sea diferente, porque una de ellas tiene una estructura infinita y la otra una estructura finita, yo no veo cualquier di- ferencia fundamental entre ambas en términos de efectividad, en un sentido intuitivo, o en términos de convicción definiti- va. (Chateaubriand (1999), p. 84)

Al apuntar hacia la cuestión del tamaño que las demostra- ciones deberían tener para adecuarse a los criterios de la concep-

ción padrón, Chateaubriand denuncia una ficción y simultáneamente nos propone una distinción sugestiva: si una demostración es lo que la concepción padrón dice que es, entonces los matemáticos no hacen demostraciones, sino que describen o comunican demostraciones. Tal comunicación es ciertamente finita, pero la estructura de la demostración que está siendo descrita puede ser finita o infinita. Naturalmente, la descripción de una demostración, que sería lo que los matemáticos realmente hacen, está subordinada a su concepto amplio de comprensión.

No se puede negar que Chateaubriand tiene su parte de razón. Pero solamente se le podría conceder entera razón en la medida en que su concepto de comprensión fuese suficientemente explicitado. Los argumentos que encontramos para negar demostraciones que tienen lo que él denomina “estructura infinita” nos parecen una petición de principio, esto es, que una demostración tiene que ser, entre otras cosas, una secuencia finita de fórmulas. Tal vez la mejor estrategia sea asumir explícitamente la defensa de aquello que Chateaubriand ha denominado “prejuicio en favor de lo finito”.

Ese prejuicio se traduce menos en negar que en el caso examinado no se trata de una demostración que en buscar una demostración de la misma de estructura finita, aunque naturalmente no en primer orden. Desde otra perspectiva, se trata de sustituir una noción de comprensión un tanto amplia por una instancia epistemológicamente menos objetable. Dijimos antes que el formalismo hilbertiano era una alternativa frente a las conclusiones restrictivas del primado de la noción epistemológicamente objetable de comprensión. Nos preguntamos si no cumpliría un papel semejante frente a una noción tan amplia de comprensión como la de Chateaubriand.

En efecto, la formalización de una teoría de manera tal que sea exigida la finitud de las demostraciones presupone no tanto negar que comprendemos el infinito sino que tal comprensión no es garantía suficiente. En palabras de Hilbert: “Sobre el suelo de

lo finito, por lo tanto, debemos alcanzar el libre trato y dominio completo de lo transfinito.” (Hilbert (1923), p. 182.) Por esta razón, entonces, las demostraciones *que envuelven conceptos y métodos objetados* deben ser traducidas en secuencias finitas de fórmulas. El criterio de consistencia es el menos restrictivo posible y la demostración de consistencia a través de conceptos y métodos inobjetables establecería la confiabilidad definitiva de conceptos y métodos cuestionados por el constructivismo.

Con estos recursos se emprende la demostración de consistencia de la teoría formal de números que incluye no solamente el principio de inducción sin restricciones finitarias sino también el principio de tercero excluído en la lógica subyacente. Porque se trataba precisamente de la aritmética, la formalización debía incluir entre sus teoremas las verdades reconocidas en teoría de números. Por la misma razón, las reglas de inferencia incluídas son formas de raciocinio válidas⁸. Entonces, no es que la aritmética y la lógica sean manipulación (finita y algorítmicamente testeable) de secuencias de símbolos sin significado, sino que tal reducción *metodológica* está dirigida a mostrar que los conceptos y métodos cuestionados no implican contradicción. Una reducción, por lo tanto, que no expresa ninguna tesis substantiva acerca de la matemática integralmente considerada⁹.

⁸ Aunque en un contexto diferente, Chateaubriand objeta con mucho acierto que la concepción standard de demostración “olvida” que las reglas de inferencia son tales porque preservan verdad y no podrían ser justificadas exclusivamente con criterios sintácticos. En general, quienes pretenden apoyarse en Hilbert para defender una concepción puramente sintáctica de la matemática “olvidan” que el Programa de Hilbert estaba destinado a demostrar la consistencia de teorías matemáticas históricamente relevantes, no de sistemas formales arbitrarios. Con nuestra observación queremos sugerir que no es Hilbert el responsable de tales desmanes. El lector puede consultar sobre este punto el ya citado Bernays (1941).

⁹ En otros lugares, de cuyos nombres no quiero acordarme, introduce la expresión *formalismo metodológico* para caracterizar el formalismo de Hilbert.

Un argumento semejante podría ahora ser dirigido a una noción de comprensión no ya demasiado estricta, sino demasiado amplia como la de Chateaubriand: la misma aparece como instancia cuestionable de aceptación de conceptos y métodos matemáticos. Claro que Chateaubriand podría objetar que el proyecto hilbertiano se mostró irrealizable, pero éste no es, nos parece, el punto. Que no podamos demostrar la consistencia de conceptos y métodos matemáticos suficientemente potentes por métodos finitarios no implica que debamos (o podamos) abandonar sin más la exigencia de finitud de las demostraciones, por lo menos en el sentido de buscar demostraciones de estructura finita que sustituyan demostraciones de estructura infinita.

Unas palabras finales. Chateaubriand nos advierte que el artículo que hemos analizado es un trabajo preliminar, un capítulo introductorio de un futuro libro, cuya función es motivar una discusión sobre la noción de demostración. En la medida en que los argumentos de Chateaubriand obligan a reexaminar prejuicios, los mismos ya constituyen de por sí una contribución filosófica notable. Ahora bien, nos gustaría destacar que nuestro análisis expresa menos una eventual divergencia que un pedido, a saber, que el futuro libro incluya una discusión sobre las relaciones entre simbolismo y comprensión, de forma tal que nos permita no incurrir en las confusiones en que ciertamente hemos incurrido en estas páginas. No nos parece una expectativa exagerada, pues el Prof. Chateaubriand ha demostrado innumeradas veces su sensibilidad para los variados aspectos que una filosofía de la matemática debería tener en cuenta.

Abstract: *In a recent paper Chateaubriand has objected to the standard account of proof as a effective sequence of formulae by means of arguments based on a broad notion of understanding. In the present paper those argumens will be analysed. Although we generally agree with Chateaubriand's critique, we disagree with his way of formulating the relation between understanding and formalism.*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERNAYS, P. (1941). "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration". In F. Gonseth (ed.): *Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*. Leemann, 1941.
- CHATEAUBRIAND, O. (1999). "Proof and Logical Deduction", pp. 79-98. In H. Hauesler and Luiz C. Pereira (eds): *Pratica: Proofs, Types and Categories* (Rio de Janeiro, PUC-RJ).
- HARDY, G.H. (1929). "Mathematical Proof", *Mind*, 38.
- HILBERT, D. (1923). "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematischen Annalen* Bd. 88, 151-165, reimpresso en Hilbert (1970), 1781-191.
- . (1925). "Über das Unendliche", *Mathematischen Annalen* Bd. 95, Anhang VIII en Hilbert, D. (1930), 262-288. [Utilizamos también la traducción inglesa de Stefan Bauer-Mengelberg, publicada en Van Heijenoort (1967), pp. 369-392, y la traducción inédita al castellano de Carlos Gonzales.]
- . (1927). "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen des mathematischen Seminars zu Hamburg* Bd. 6; Anhang X en Hilbert (1930), 289-312. [Utilizamos también la traducción inglesa de Stefan Bauer-Mengelberg e Dagfinn Follesdal, en Van Heijenoort (1967), 464-479.]
- . (1930). *Die Grundlagen der Geometrie*, 7ª edición (Leipzig & Berlin, B.G. Teubner).
- . (1970). *Gesamelte Abhandlungen*, zweite Auflage, Vol. III. (Berlin, Heildelberg & New York, Springer-Verlag).
- VAN HEIJENOORT, J. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic* (Cambridge, Mass., Harvard University Press).

