RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM CRIANÇAS: CONSIDERAÇÕES ACERCA DE ALTERNATIVAS EDUCACIONAIS

Alina Galvão Spinillo *

Resumo O presente artigo apresenta estudos recentes sobre o conceito de proporção em crianças. Os resultados desses estudos são discutidos a partir do ponto de vista cognitivo (aquisição e desenvolvimento de conceitos) e a partir das alternativas educacionais que esses resultados revelam para a educação matemática em crianças nas séries iniciais do primeiro grau. A discussão se apoia basicamente em três aspectos relevantes: o *sujeito* que aprende, a *natureza do objeto de conhecimento* a ser aprendido e a *situação* na qual a aprendizagem ocorre.

Palavras-chaves: Conceito de proporção em crianças; educação matemática; raciocínio proporcional em crianças; aquisição de conceitos matemáticos.

Abstract This paper focuses on the results from recent studies on proportional reasoning in young children. The data are discussed in a cognitive approach (conceptual acquisition and development) and also in a educational approach. The discussion conducted in this paper is based on three crucial aspects: the *subject* who learns, the *nature of the concept* to be learned and the *situation* in which learning takes place.

Descriptors: Children's proportional concepts; mathematical education; children's proportional reasoning; mathematical concept acquisition.

A abordagem deste texto se insere em um campo de conhecimento denominado Psicologia da Educação Matemática. Esta área emergente de intersecção entre a psicologia, a matemática e a educação pode ser caracterizada como esforços empreendidos na busca de "... uma compreensão psicológica do processo de aquisição e do desenvolvimento de conceitos matemáticos, a qual auxilia a esclarecer questões educacionais acerca das formas de ensinar e de aprender" (Spinillo, 1993, p.59).

Nessa perspectiva, três aspectos aparecem como relevantes: o *sujeito* que aprende, a *natureza do objeto de conhecimento* a ser aprendido e a *situação* na qual a aprendizagem ocorre.

Inúmeras características do sujeito podem ser consideradas, bem como o termo situação pode ser entendido de diversas maneiras e diferentes aspectos da situação podem ser tomados como unidade de análise. Na perspectiva ora considerada, torna-se relevante compreender as noções iniciais que o sujeito possui (conceitos espontâneos) e a forma como se desenvolvem. Quanto à situação, esta é considerada em termos da prática em sala de aula. O terceiro elemento constituinte do tripé desta reflexão é a natureza do objeto de conhecimento - o conceito de proporção, natureza esta que se refere às relações nele envolvidas.

Se de um lado, procuramos entender quais as noções que o sujeito possui sobre proporção; de outro lado procuramos também compreender que situações seriam facilitadoras e propiciadoras de desenvolvimento. Tomando como situação a sala de aula, é preciso considerar que experiências de instrução seriam intelectualmente desafiadoras e que permitiriam a apropriação do conceito (objeto de conhecimento) pela criança (sujeito), promovendo, assim, seu desenvolvimento. Neste sentido a aprendizagem pode ser definida como a situação em que o adulto (professor) atua como guia intelectual que propõe experiências e encontros entre a criança e o conceito; trabalhando suas noções espontâneas, tornando-as, através da compreensão, conceitos científicos[1] poderosos e efetivos.

* Professora do Departamento de Psicologia da UFPE.

O ensino de proporção

O ensino de proporção em nossas escolas é geralmente introduzido por volta da 5a. e 6a. série do primeiro grau (aproximadamente aos 11-12 anos). A tendência tem sido tratar a proporção como um tópico ou assunto do currículo de matemática e não como um conceito a ser compreendido. Tratado como uma 'matéria' do programa de matemática, o ensino de proporção se caracteriza por 'falar sobre o assunto', pelo uso de procedimentos mecânicos e a aplicação de exercícios de fixação. De modo geral, a quantificação numérica (cálculos) e o uso do algoritmo da regra de três são a base do ensino de proporção. É comum também verificar que os conceitos matemáticos são reduzidos de forma simplista à sua representação simbólica (expressões do tipo y/a = x/b; ou a:b::c:d) e o raciocínio proporcional é entendido como a utilização de um algoritmo de resolução. Tanto a representação simbólica como o uso do algoritmo não garantem uma compreensão do significado das relações envolvidas no conceito.

Assim, a compreensão conceitual do que de fato está envolvido no raciocínio proporcional é aspecto negligenciado no ensino de proporção.

Raciocínio proporcional: As relações envolvidas

O raciocínio proporcional envolve basicamente dois tipos de relações: relações de primeira-ordem e relações de segunda-ordem (Spinillo, 1993).

Tomemos como exemplo dois conjuntos de bolinhas, sendo um formado por três bolinhas azuis e cinco amarelas e o outro por três bolinhas azuis e três amarelas. Para decidir em qual dos dois conjuntos existe a maior proporção de bolinhas azuis, a criança precisa inicialmente comparar em cada conjunto a quantidade de bolinhas azuis em relação às bolinhas amarelas (3 bolinhas azuis para 5 amarelas, e 3 azuis para 3 amarelas) ou comparar o número de bolinhas azuis ao número total de bolinhas em cada conjunto (3/8 das bolinhas são azuis e 3/6 das bolinhas são azuis). Estas são as relações de primeira-ordem. No primeiro caso, a criança estabelece as relações de primeira-ordem em termos parte-parte (razão); e no segundo caso em termos parte-todo (fração).

Após estabelecer as relações de primeira-ordem, a criança precisa, então, compará-las entre si, para decidir em qual dos dois conjuntos há maior proporcão de bolinhas azuis. Esta comparação entre as relações de primeira-ordem consiste na relação de segunda-ordem (relação entre relações).

Assim, ao resolver tarefas de proporção, a criança lida, necessariamente, com relações que precisam ser estabelecidas entre os valores ou quantidades (discretas ou contínuas) apresentadas.

Crianças entre 6 e 8 anos tendem a estabelecer as relações de primeira-ordem em termos parte-parte (i.e., comparando uma parte com a outra parte de um mesmo todo), tendo dificuldades em estabelecer relações de primeira-ordem em termos parte-todo (i.e., comparando uma parte do todo como o próprio todo). Exemplos de como as crianças estabelecem comparações parte-parte em tarefas de proprоção são mostrados ao final da próxima seção, onde são brevemente consideradas as estratégias e noções iniciais que as crianças possuem desde cedo.

Raciocínio proporcional: Estratégias e noções iniciais

Inúmeras estratégias na resolução de tarefas de proporção são usualmente documentadas na literatura. Algumas dessas estratégias referem-se a procedimentos de resolução, como por exemplo, as estratégias aditivas e multiplicativas(e.g., Hart, 1981, 1984; Carraher, Carraher & Schliemann, 1986). Alguns autores consideram essas estratégias como a expressão de diferentes níveis de compreensão que o sujeito apresenta sobre proporção, onde as estratégias multiplicativas expressam um raciocínio proporcional sofisticado. Outros autores apontam que o uso dessas estratégias estariam também relacionadas às características da tarefa apresentada[2].

Estratégia escalar, funcional e o uso da regra de três são outros tipos de estratégias verificadas na literatura (e.g., Vergnaud, 1983; Carraher, 1988). O grau de compreensão por parte do sujeito na utilização dessas estratégias varia: a estratégia escalar (adotada com freqüência) é usada com compreensão, em oposição à regra de três (ensinada na escola) que muitas vezes é adotada sem que haja uma compreensão das relações envolvidas.

Noelting (1980a, 1980b) identificou dois tipos de estratégias na resolução de uma tarefa de proporção: estratégia *Between* (comparações entre bolinhas azuis em dois conjuntos de bolinhas) e *Within* (comparações entre bolinhas azuis e amarelas). De maneira geral, estratégias referem-se ao modo como o sujeito lida com as relações em uma tarefa de proporção.

Embora as estratégias citadas sejam de grande importância para a compreensão do raciocínio proporcional em crianças (10-11 anos) e adultos, nos deteremos em abordar um tipo específico de estratégia usado por crianças muito jovens.

Estudos recentes demostraram que crianças de 6 anos de idade utilizam um tipo de estratégia com base no uso do referencial de 'metade' para decidir acerca da equivalência ou não equivalência entre razões representadas por quantidades contínuas (Spinillo, 1990; Spinillo & Bryant, 1991) e em outros, por quantidades discretas (Spinillo & Bryant, 1993; Spinillo, 1994).

Por exemplo, em uma tarefa como aquela ilustrada na Figura 1, a criança era solicitada a escolher dentre dois cartões (parte pintada em preto e outra em branco) aquele que combinava com um modelo (cartão pequeno), apesar de diferenças nos tamanhos absolutos dos todos e na forma da área pintada em preto.

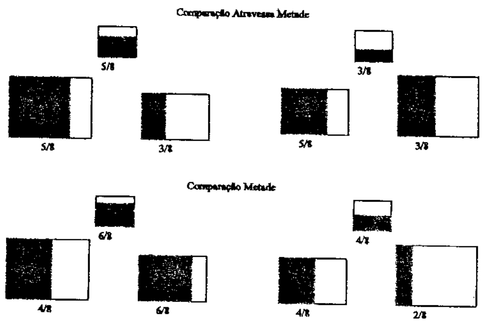

Figura 1. Nesta tarefa, as duas alternativas possuiam tamanhos absolutos diferentes, sendo consideravelmente maiores que o retângulo que servia de modelo, e as áreas pintadas em preto e branco eram apresentadas em orientações diferentes (Horizontal no modelo e Vertical nas alternativas).

Ao usar a estratégia de 'metade', as crianças estabeleciam comparações do tipo parte-parte nas relações internas (primeira-ordem) entre a secção preta e a branca, escolhendo a alternativa correta. Exemplos das justificativas oferecidas pelas crianças são apresentados a seguir[3]:

3/8 (modelo) e 3/8 vs. 5/8 (alternativas)
"Porque no cartão pequeno (modelo) tem mais branco que preto e este grande (alternativa 3/8) tem mais branco que preto também. Lá (alternativa 5/8), é mais preto que branco, não combina. É diferente."

4/8 (modelo) e 4/8 vs. 6/8 (alternativas)
"Metade branco e metade preto no cartãozinho (modelo). A mesma coisa aqui (alternativa 4/8): metade branco e metade preto. Lá (alternativa 6/8) tem mais da metade preto e menos da metade branco. Não combina com o cartãozinho (modelo) porque nele o preto é do mesmo tamanho que o branco, metade e metade."

2/8 (modelo) e 4/8 vs. 2/8 (alternativas)
"Aqui (2/8 alternativa) porque tem mais branco que preto. É mais da metade branco e menos da metade preto. Feito esse (modelo). Aqui (alternativa 2/8) parece que tem mais preto que lá (modelo) por causa de que o cartão é maiorzão e fica tudo maiorzão dentro dele. Mas

é a mesma coisa que lá (modelo). Não pode ser esse (alternativa 4/8) porque tem metade branco e metade preto.

Nota-se que o processo de resolução se inicia, comparando a parte preta com a branca em cada retângulo (relação de primeira-ordem do tipo parte-parte) e então, verificando em qual deles existe a mesma relação preto:branco como no modelo(relações de segunda-ordem). O referencial de 'metade' é tomado como padrão de referência nos julgamentos. Ainda que elementar, esta estratégia reflete as noções iniciais que as crianças possuem sobre proporção.

Essas noções inicias são conceitos espontâneos anteriores ao aprendizado escolar e que estão presentes desde os 6 anos de idade. Essas noções se caracterizam por: (1) estabelecer as relações de primeira-ordem em termos de razão (comparação parte-parte) e não em termos de fração (parte-todo); (2) julgamentos proporcionais de natureza qualitativa que envolvem relações simples ('maior do que', 'menor do que', 'igual a') antes de quantificação numérica; e (3) pelo uso de pontos de referência (referencial de metade).

Alternativas educacionais para o ensino de proporção nas séries iniciais do primeiro grau

Considerando as noções iniciais que as crianças (sujeito) têm e a forma como lidam com as relações ao resolverem tarefas de proporção, é possível extrair-se algumas implicações educacionais para o ensino deste conceito. Com base na consideracões a seguir, professores das séries iniciais do primeiro grau poderão desenvolver uma série de atividades matemáticas em sala de aula para introduzir o conceito de proporção.

Primeiro, uma vez que desde os 6 anos as crianças apresentam noções a respeito da proporção, é possível que o ensino deste conceito possa ser iniciado em séries anteriores à 5a.-6a. séries do primeiro grau. A pergunta crucial, entretanto, não reside no *quando*, mas no *como* introduzir este conceito de forma cognitivamente proveitosa.

Em uma situação de aprendizagem, o *como* introduzir um dado conceito está relacionado, entre outros aspectos, às habilidades cognitivas já dominadas pelo sujeito e às características do conceito em questão.

Primeiro, o ensino introdutório de proporção poderia enfatizar menos a quantificação numérica e privilegiar formas qualitativas de raciocínio baseadas em estimativas e habilidades perceptuais. Atividades envolvendo estimativas e comparacões qualitativas do tipo 'maior/menor que' e 'igual a' podem ser conduzidas em sala de aula com materiais diversos (quantidades contínuas e discretas). Estimativas, por serem um processo de resolução semi-numérico, propicia a passagem de formas qualitativas de raciocínio para formas quantitativas precisas.

Segundo, considerando as estratégias que a criança adota desde cedo, verifica-se que o referencial de 'metade' é um procedimento de resolução significativo para a criança. Assim, a escola poderia promover atividades matemáticas em que fosse possível aplicar tal estratégia ao julgar a equivalência ou não equivalência entre situacões distintas. Quantidades discretas e contínuas podem ser exploradas.

Uma terceira consideração diz respeito à natureza do conceito de proporção. Este, como mencionado anteriormente, envolve relações. É necessário que fique claro para a criança distinção entre relações de primeira e de segunda-ordem em uma tarefa de proporção. O professor precisa explicitar, discutir e refletir acerca das relações envolvidas no raciocínio proporcional com seus alunos, fazendo a distinção entre as relações de primeira e de segunda-ordem em tarefas de proporção.

Conceitos matemáticos são adquiridos com base na reflexão sobre diversas situações que devem envolver os princípios essenciais do conceito. No caso da proporção, a criança precisa ser exposta a inúmeras situações que envolvam o estabelecimento de relações. Por exemplo, comparar e refletir acerca de relações iguais e relações diferentes.

Quarto, durante a resolução de tarefas de proporção é interessante que o professor explore as justificativas, critérios e estratégias adotadas por seus alunos. Como mencionado, são inúmeras as estratégias que podem ser utilizadas, as quais refletem a forma como o sujeito atua sobre a situação-problema. O professor precisa compreender as diferentes formas de raciocinar de seus alunos, bem como ao explicitar sua forma de raciocinar, o aluno também poderá refletir e compreender as formas de resolução que adotou. Pensar sobre os processos de resolução que utiliza[4] auxilia o aluno no sentido de tomar seu raciocínio como objeto de reflexão, direcionando-o para formas cada vez mais adequadas de resolução.

Guiadas pelo adulto (professor), atividades matemáticas contribuem para a construção de atividades mentais. Embora o raciocínio proporcional possa também ser desenvolvido antes e fora da escola, é nela que os conhecimentos iniciais e espontâneos se tornam sistematizados e mais efetivos.

Ensino-Aprendizagem: Tensão entre continuidade-descontinuidade

Schliemann & Carraher (1993) afirmam que existe uma tensão entre continuidade e descontinuidade na situação de ensino-aprendizagem. Descrevem esta tensão da seguinte forma:

> O ensino e a aprendizagem sempre envolvem uma tensão entre a continuidade e a descontinuidade. Por um lado, é necessário que o conhecimento novo se apoie naquilo que o aluno já sabe e compreende. Por outro lado, é necessário introduzir rupturas e saltos no conhecimento, pois os conceitos novos não podem ser totalmente reduzidos aos conceitos já adquiridos (p. 34).

No caso da proporção em crianças jovens, a continuidade reside no fato de que o ensino introdutório precisa envolver as noções e as relações iniciais que a criança ja possui, i.e., relações de primeira-ordem do tipo parte-parte e as estratégias que espontaneamente construiu (o referencial de 'metade', por exemplo). A descontinuidade seria a introdução de uma reflexão acerca de novas estratégias e acerca de outros tipos de relações de primeira-ordem (parte-todo, por exemplo), até alcançar formas de raciocínio mais poderosas e efetivas (como quantificações numéricas, por exemplo).

Se as crianças desde cedo possuem nocões sobre proporção, por que então, apresentam tanta dificuldade na aprendizagem deste conceito? Uma possível explicação para isto é que a ruptura entre o conhecimento antigo e o novo é bastante acentuada. A escola parece ter dificuldades em lidar com a tensão entre continuidade e descontinuidade. O ensino tem se caracterizado ou por uma *continuidade acentuada*, onde o conhecimento novo assemelha-se de tal forma ao antigo que nada acrescenta em termos cognitivos; ou se caracteriza por uma *descontinuidade acentuada*, onde o conhecimento novo está tão distante do antigo que não é possível fazer uma ponte conceitual significativa entre eles. Esta tensão entre continuidade e descontinuidade precisa ser melhor considerada nas atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula, não apenas no que se refere ao conceito de proporção, mas em relação ao ensino de outros conceitos matemáticos.

Notas

1. Para uma maior compreensão acerca de conceitos científicos e espontâneos, remeter a Vygotsky (1991)
2. Tarefas de incógnita propiciam mais o aparecimento de procedimentos aditivos do que tarefas de comparação.
3. Os exemplos aqui apresentados estão também documentados em outro trabalho da autora (Spinillo, 1993, p.47).
4. Em psicologia, refletir acerca dos proprios processos intelectuias é denominado 'metacognição'.
5. Sugestões de atividades para o ensino introdutório de proporção baseadas nos pontos acima considerados podem ser encontradas em Spinillo (1993).

Referências Bibliográficas

Carraher, T.N.; Carraher, D.W. & Schliemann, A. D. (1986) Proporcionalidade na educação científica e matemática, III: Desenvolvimento cognitivo e aprendizagem. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *67* (157), 586-602.

Carraher, T. N. (1988) Passando da planta para a construção: Um trabalho de mestres. In: T. N. Carraher; D. W. Carraher & A.D. Schliemann (Eds.), *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez Editora.

Hart, K. M. (1981) Ratio and proportions. In: K.M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hart, K. M. (1984) *Ratios: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson Publishing Company.

Noelting, R. (1980a) The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11* 217-253.

Noelting, R. (1980b) The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II - Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive structuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 331-363.

Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1993) Razões e proporções na vida diária e na escola. In: A. D. Schliemann; D.W. Carraher; A.G. Spinillo; L.L. Meira & J.T.R. Falcão, *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Editora Universitária da UFPE, 13-39.

Spinillo, A. G. (1990) The development of the concept of proportion in young children. Tese de Doutorado, University of Oxford, Inglaterra.

Spinillo, A. G. (1993) Proporcões nas séries iniciais do primeiro grau. In: A. D. Schliemann; D.W. Carraher; A.G. Spinillo; L.L. Meira & J.T.R. Falcão, *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Editora Universitária da UFPE (40-59).

Spinillo, A. G. (1993) As relações de primeira-ordem em tarefas de proporcão: Uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. *Psicologia:Teoria e Pesquisa*, 9(2), 243-450.

Spinillo, A. G. (1994) O conceito de proporção em crianças: Implicações da psicologia para a educação matemática. *Seminário sobre Novas Perspectivas da Educação Matemática no Brasil, Série Documental: Eventos*, No. 4 (1a. parte), 16 pp. , Águas de São Pedro, São Paulo, Maio.

Spinillo, A. G. & Bryant, P.E. (1991) Children's proportional judgements: The importance of 'half'. *Child Development*, *62*, 427-440.

Spinillo, A. G. & Bryant, P. E. (1993) Julgamentos proporcionais em crianças: Comparando o desempenho e as justificativas em tarefas numéricas e não-numéricas. *45a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC)*, p. 884, Recife, PE, Julho.

Vergnaud, G (1983) Multiplicative structures. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and process*. New York: Academic Press.

Vygotsky, L.S. (1991) *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.