Aprendizagem Operatória de Números Inteiros: Obstáculos e Dificuldades*

*Leny Rodrigues Martins Teixeira***

A concepção de aprendizagem subjacente à análise realizada neste trabalho tem como referência a proposta piagetiana de que a aprendizagem de conceitos de natureza lógico-matemática deve ser entendida no sentido amplo porque depende das coordenações de ações e como tal está sujeita aos mecanismos de regulação ou equilibração do desenvolvimento das noções operatórias. Segundo Piaget (1975), a construção dos conceitos matemáticos se baseia em um movimento permanente de generalização completiva e de abstração reflexiva que garante ao mesmo tempo a continuidade, bem como a novidade responsável pelos progressos a que se chega.

A abstração é reflexiva em um duplo sentido (1977) porque envolve dois processos: o "réfléchissement", no sentido de uma projeção sobre um nível superior daquilo que é tomado do nível precedente, e a "reflexão", no sentido de que o que foi retirado do plano anterior se reorganiza em uma nova totalidade no nível posterior (das representações ou das formas). Na medida em que os resultados da abstração se tornam conscientes, ou seja, quando a reflexão se dá ao nível das representações imagéticas, a abstração se torna "refletida", instala-se o pensamento reflexivo, pois se torna objeto de reflexão aquilo que em nível anterior era um instrumento em forma de pensamento. Trata-se de um processo em espiral, como diz Ramozzi (1984), onde o que foi construído em um nível se projeta para o nível seguinte sob a forma de conteúdos ou observáveis, sobre os quais incide uma nova forma e assim sucessivamente, permitindo que as formas sejam cada vez mais ricas e mais importantes que os conteúdos.

A generalização completiva ou construtiva ocorre simultaneamente à abstração reflexiva e consiste em gerar novas organizações estruturais cuja generalidade conduz a aumentos tanto em extensão (conjuntos de situações às quais se aplica) quanto em compreensão (características ou propriedades comuns nas quais as generalizações se baseiam). É preciso contrapor essa generalização àquelas generalizações mais simples que Piaget e Henriques (1984) denominaram indutivas ou extensionais porque baseadas nos observáveis. O que se generaliza nesse caso é aquilo que se observa (conteúdo), ou seja, transfere-se este conteúdo para novos objetos, constituindo-se um qua-

---

* O presente artigo é parte da Tese de Doutoramento da autora, *Aprendizagem Escolar de Números Inteiros: Análise do Processo na Perspectiva Construtivista Piagetiana,* defendida em 15/10/92, na Universidade de São Paulo.

** Docente e pesquisadora do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente. Doutora em Psicologia Escolar.

dro assimilador capaz de incorporar novos conteúdos, mas não de gerá-los.

Ao contrário, a generalização construtiva não se limita a uma assimilação simples, mas envolve uma assimilação recíproca de esquemas, antes heterogêneos e agora integrados em um novo sistema, o que implica em diferenciações e reintegrações. Nesse caso a descoberta das relações regulares não é dada externamente, mas deduzida internamente, e por isso construída.

A aprendizagem operatória dos números inteiros tendo como pressuposto a compreensão do seu significado, supõe que o aluno domine paulatinamente as propriedades que regem os inteiros como um sistema. A compreensão, conforme o referencial da Psicologia Genética, parte da periferia para o centro, ou seja, nos primórdios esta compreensão é parcial porque se dá nos limites do fazer, para aos poucos ir mergulhando nas leis do sistema, tornando explícitas ou conscientes as propriedades que o regem.

Toda aprendizagem, por outro lado, tem um ponto de partida, que são os esquemas de assimilação, no caso, aqueles que a criança tem desenvolvido para trabalhar com números, restritos, até o nível de 5ª série, aos naturais e fracionários. Não se pode desconhecer, também, como o próprio Piaget aponta (1975) que, a nível espontâneo, a criança pode ter vivenciado situações que tivessem requerido operações, que configuram o uso de processos operatórios inerentes ao sistema dos inteiros: como a criança que inverte rotações, ou faz compensações entre perdas e ganhos em jogos diversos.

De qualquer forma, a aprendizagem dos números inteiros supõe, em tese, o desenvolvimento de esquemas de assimilação, cuja natureza se baseia no caráter operatório do número, no sentido de que ele não representa um estado, mas é resultado das coordenações entre ações consubstanciadas na idéia de que uma quantidade qualquer expressa a operação de acrescentar ($n+1$) ou tirar ($n-1$), de tal sorte que o conjunto dos naturais é produto de uma função operatória da adição das classes e das diferenças ordenadas ou relações assimétricas.

Os mecanismos cognitivos que permitem, a nível interno, esta síntese são a abstração e a generalização, pois o número é uma coleção de elementos que se tornaram equivalentes (abstração) por uma semelhança generalizada, ao mesmo tempo em que se mantêm diferenciados, graças a uma ordem vicariante (abstraída) ou diferença generalizada, expressa na idéia de antecessor e sucessor.

Ser capaz de operar com números naturais supõe ter construído ao longo do tempo, nas trocas com o meio, regulações lógico-matemáticas traduzidas em formas de pensar, tais como conceituar, fazer correspondências, classificar, ordenar, compor, reverter, compensar etc. A construção dos números naturais supõe também dominar em diferentes níveis de compreensão — desde os reconhecimentos parciais até as tematizações — as leis que regem o sistema de numeração do qual o número é um elemento. Em outros termos, significa reconhecer as propriedades subjacentes às operações neste conjunto: fechamento, comutativa, associativa, elemento neutro para as operações da adição e multiplicação, sendo que para esta última se aplica também a distributiva.

A construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas. Entretanto, se, do ponto de vista formal e lógico, esse raciocínio nos é apresentado atualmente como coerente e organizado, sabemos que na perspectiva histórica ou da evolução do pensamento matemático, tal ampliação encontrou muitas dificuldades e obstáculos.

Glaeser (1985) aponta que a construção formal dos números inteiros levou vários séculos — ou seja, desde a Antiguidade, onde apareceram, até o século XIX, quando Hankel se desvinculou da preocupação de extrair do real exemplos para explicar os números relativos e propôs uma explicação formal para os mesmos.

Nesse percurso o autor identifica vários obstáculos de natureza epistemológica — ou seja, devidos às resistências de um saber mal adaptado, conforme definido por Bachelard (1973), e tornado evidentes através do exame da obra de matemáticos clássicos no desenrolar da compreensão dos números relativos. São seis os obstáculos apontados por Glaeser: (1) inaptidão para manipular quantidades isoladas; (2) dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; (3) dificuldade em unificar a reta numérica manifesta pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semi-retas opostas, ou ainda por desconsideração do caráter simultaneamente dinâmico e estático dos números; (4) ambigüidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem; (5) dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos: fixação no estágio das operações concretas por oposição ao formal; (6) desejo de um modelo unificador: utilização de um modelo aditivo para o campo multiplicativo, ao qual não se aplica.

Ao nível do sujeito, o problema se torna muito complicado, pois não se trata simplesmente de entender as propriedades, mas de aplicá-las a um outro contexto — com novos significados — o que supõe uma reorganização do conceito de número na medida em que se incorporam a ele qualidades até então desconhecidas ou não-explicitadas.

Do ponto de vista cognitivo, a compreensão dos números inteiros requer algumas operações, às quais se chega como regulações construídas pela criança na medida em que tenta preencher as lacunas ou resolver as contradições que comparecem ao estender os esquemas assimiladores dos números naturais a realidades às quais eles não se aplicam. A perturbação se instala quando a subtração $(a - b)$ é aplicada a casos em que $b > a$, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as formas (operações) geram um novo conteúdo. Admitir a realidade deste novo resultado implica reconhecer a existência de uma nova classe de números — os negativos.

Tomar consciência da existência de números que sejam negativos — com base nos resultados dessas operações e outras semelhantes — conduz por abstração reflexiva à idéia de que eles são menores do que os positivos, característica generalizável a todos os números negativos. A descoberta da existência do negativo, portanto, está necessariamente ligada à sua relação com os positivos, e mergulhar nas propriedades deste novo campo numérico envolve diferenciações progressivas que vão permitindo que novas integrações entre os dois campos surjam. Por um processo de generalização indutiva a criança vai tomando consciência de variações extrínsecas impostas pelos diferentes resultados a que chega nos problemas que resolve, até a construção do sistema dos números inteiros, como resultado de integração de todas as suas propriedades, por um processo de generalização construtiva porque baseada em deduções necessárias.

Assim, a compreensão do que seja um número negativo avança paulatinamente, por abstrações e generalizações, na medida em que a criança descobre que se negativo é menor do que positivo, há um ponto de onde negativo e positivo se originam. Isso leva, por sua vez, à necessidade de nova ampliação, porque nos naturais a assimilação do zero foi feita com base no significado de ausência de quantidade. Agora, é preciso ampliar este significado, ou seja, diferenciá-lo na concepção de zero origem. Tido como tal, elimina-se o que aparentemente, ao nível dos observáveis, parecia uma oposição por isolamento dos conjuntos positivo e negativo, para integrá-los em um sistema onde a oposição entre estes números determina as regras do sistema. Ou seja, a contradição representada pelo resultado de uma subtração $a - b$ onde $b > a$ no conjunto dos naturais, é resolvida pela integração da mesma em um novo sistema mais abrangente, que incorpora a oposição entre positivos e negativos como uma qualidade. A integração dos negativos aos positivos resulta no sistema dos inteiros, e enquanto tal passa a ter um novo significado, porque não representam mais, como diz Skemp (1980), objetos contáveis, mas realidades reversíveis, ou seja, os números positivos e negativos enquanto tais (valor absoluto) são os mesmos, mas o que os caracteriza como inteiros é a posição que ocupam em relação ao ponto de origem, o que os torna relativos.

A ordenação a que obedece o sistema dos inteiros supõe a integração de uma ordem crescente entre os números positivos e decrescente entre os negativos a partir de um ponto de referência. Esta ordenação representada em uma reta numérica permite abstrair o invariante de que os números à direita aumentam e à esquerda diminuem, seja qual for o ponto de origem tomado, de tal forma que, se mudarmos a origem, a ordem se conserva, tal como se o zero fosse móvel.

A compreensão dos inteiros, portanto, supõe a construção interna de um esquema de referência móvel que se aplica a um conjunto de números operados simultaneamente em dois sentidos e opostos. Trabalhar com números cujos valores se modificam conforme a posição ou que se deslocam, requer do sujeito que aprende os mecanismos básicos da reversibilidade por compensação.

Da mesma forma que o número natural é resultado de uma operação (x a mais ou x a menos), o número inteiro é um operador (Glaeser, 1985) só que agora com duplo sentido: representa uma quantidade escalonada e ao mesmo tempo é resultado de transformações que se dão em dois sentidos. Representados em uma reta numérica única, estes números podem ser interpretados não só como indicativos do valor numérico das posições, mas também como deslocamentos que transformam uma posição em outra. Em outras palavras, os números positivos e negativos representam estados e operações, por exemplo: -2 representa ao mesmo tempo 2 unidades abaixo de zero, portanto, que se localizam na região negativa, como também significa "2 a menos que", indicando a operação de deslocamento, que produzirá transformações em um certo sentido (no caso de número negativo significa deslocar à esquerda e, de positivo, deslocar à direita). Nesse sentido, vale lembrar a diferença entre sinais predicativos (indicando estado) e operatórios (relativos à operação), introduzida por Cauchy em meados do século XIX, como aponta Glaeser.

Ao nível interno, construir tais regulações como implicações necessárias deste sistema demanda descentrações gradativas, de tal sorte que se inicia pela consciência dos aspectos periféricos (o número como estado, as semi-retas justapostas, as regiões positiva e negativa estanques, o zero fixo) passando gradativamente para os aspectos centrais que envolvem compreender as transformações que o número, enquanto operador, produz, bem como suas razões.

Dadas as propriedades desse sistema, as operações realizadas com seus elementos ganham um novo significado e se ampliam. Assim, nos naturais, os sinais usados nas operações são exclusivamente de natureza operatória e, portanto, indicam "acrescentar algo a" ou "tirar de". Em se tratando do conjunto dos inteiros, a adição representa casos em que há acréscimo, outros em que há decréscimo, bem como somas que dão zero. Na realidade, o conceito de adição precisa ser ampliado, não se limitando à idéia de acrescentar. Na medida em que se abstrai das diferentes associações de números positivos e negativos, um invariante, expresso na idéia de operador aditivo que produz transformações de acordo com os elementos em jogo, é possível chegar às generalizações expressas nas regras da adição: sinais iguais somam-se e conservam-se os sinais; sinais diferentes ou opostos subtraem-se e conserva-se o sinal do de módulo maior. A adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição.

Da mesma forma que a adição, a subtração ganha novo significado. No geral, nos naturais, está associada à idéia de tirar (do maior tirar o menor) ou à de achar o complemento entre dois números positivos dados. A construção operatória da subtração supõe assimilá-la como inversa à adição, de tal forma que em uma dada reunião ou associação de elemento ($a + b = c$), é possível chegar ao ponto de partida, (a), por exemplo, pela diferença ($c - b$), ou seja, pela operação inversa. Para operar com inteiros é fundamental que o esquema de assimilação para subtração esteja estruturado com base na abstração do invariante da inversão e não simplesmente no conceito de tirar. Subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição. Assim -7-(-2) = -7+2 ou -7-(+2) = -7-2. A generalização do caráter de inversão presente na subtração para os inteiros é muito mais complexa, porque é preciso identificar com clareza a operação que está em jogo, tarefa não muito simples quando se trata de operar com números positivos e negativos. Assim, por exemplo, para operar o inverso de +7+2 = +9 ou -7-2 = -9, é preciso ter clareza de que em ambos os casos temos uma adição (os operadores têm o mesmo sinal, portanto, produzem transformações em um mesmo sentido) e que a subtração se daria mudando o sinal de um dos operadores (operadores com sinais diferentes indicam transformações em sentidos opostos).

Dado o caráter de inversão, é sempre possível fazer composições com os operadores de tal sorte que se chegue a um mesmo resultado. De fato, somar grandezas com sinais diferentes (+ e -) é o mesmo que subtrair grandezas de mesmo sinal (+). Dada a natureza do sistema dos inteiros, a subtração nada mais é que a composição entre operadores, ou seja, uma adição. Exemplificando: qual é o número que associado a -5 resulta -3? Chega-se assim à equivalência entre adição e subtração de inteiros, o que, a nível dos mecanismos cognitivos, significa ter simultaneamente presentes duas formas de operar, as quais, por compensação, fundem-se em uma totalidade. A equivalência entre adição e subtração é uma regulação a que o sujeito chega por diferenciações progressivas, na medida em que uma qualidade se destaca das demais, é alçada das ações realizadas em determinadas interações como invariantes e integrada aos esquemas de assimilação, alterando a sua organização. Modifica-se assim o grau de compreensão do esquema, ao mesmo tempo em que ele pode ser aplicado em maior extensão, graças à generalização completiva que se reconstrói em situações novas ou invariantes já encontrados anteriormente.

No caso da multiplicação, o conceito de operador multiplicativo deve ser reconstruído. Nos naturais, ele se refere ao número de vezes que um conjunto se repete, ou seja, indica adição repetida. No conjunto dos números inteiros, no entanto, a extensão da concepção de multiplicação como adição repetida encontra um obstáculo, pois como mostrar que (-1) x (-1) = 1?

Um operador multiplicativo, no caso dos inteiros, indica número de vezes que um conjunto se repete, ao mesmo tempo em que produz transformações de aumento ou diminuição no resultado, dependendo dos sinais em jogo. Quando o operador multiplicativo é positivo, a assimilação é fácil, porque é possível até usando modelos mostrar que 2.(-5) ou 2.(+5) significa repetir duas vezes um número dentro de sua região: ao multiplicar negativo o resultado permanece na região negativa, valendo o mesmo para positivo. Entretanto, quando o operador multiplicativo é negativo não é possível simplesmente imaginar números que se multiplicam na mesma região, mas, além disso, que o operador transforma o resultado obtido, mudando-o de região, ou seja, -2.(+5) = -10 e -2.(-5) = +10. Na multiplicação, portanto, é preciso compreender que há uma duplicidade de operações: as que multiplicam os conjuntos equivalentes, ao mesmo tempo em que há operações de transformação que se aplicam aos números, fazendo-os manter ou inverter sua posição na região a que pertenciam. Posteriormente, com base em abstração de níveis mais complexos, é possível compreender que se Z é uma ampliação de N, o produto de Z tem que ser uma extensão de N, portanto distributivo com relação à soma, comutativo e associativo. O prolongamento dessas propriedades de N a Z faculta definir operações impondo-se condições prévias, como no caso das justificativas algébricas formais, tal como demonstrou Hankel (Glaeser, 1985).

Construir os invariantes necessários a cada uma dessas operações com inteiros supõe abstrações reflexivas que facultam destacar a estrutura comum a diversas situações nas quais estão implícitas realidades numéricas representativas dos inteiros. Se tal construção se dá sob a forma de autoregulação, deduz-se que se for possibilitada à criança maior heterogeneidade de situações, contextos e mesmo linguagens, ampliam-se os pontos de referência e as possibilidades de interconexões. Em outras palavras, a diversidade de situações das quais partem os problemas, desde que não levem a reproduções mecânicas, favorecem a abstração tanto quanto possibilitam que o dado abstraído se generalize, permitindo reconstruções diante de novos problemas.

As situações a partir das quais surgem desafios para a criança, que acionem o desenvolvimento de tais mecanismos operatórios, estão compreendidas em uma amplitude de fatos que variam dos mais concretos aos mais abstratos, cada um dos quais comportando sistemas de representações e linguagens próprias. O uso pedagógico que se faz de algumas dessas situações como exemplificadoras da aplicação do esquema dos inteiros está expresso nos modelos de natureza física (temperatura, deslocamentos no espaço e no tempo representados por pontos na reta numérica) ou contábil (compreensão entre saldo positivo e negativo relativo a dinheiro, resultado de jogos etc.).

A aprendizagem operatória dos inteiros supõe a construção dos invariantes ou propriedades do sistema, ou seja, implica a construção de esquemas de assimilação (operações e linguagens) capazes de resolver problemas relativos a realidades comparadas quando em sentidos opostos. Os modelos, ligados a conteúdos da experiência cotidiana da criança — que representam tais realidades — devem ser vistos como pontos de partida, porque de fato não há uma correspondência dos inteiros com o mundo físico tal como nos naturais. O invariante mais geral de todas as propriedades do sistema pode ser expresso, como diz Lovell (1986), na idéia de "negatividade", que é produto de operações a que se chega por abstrações reflexivas e generalizações completivas que ocorrem ao nível do pensamento.

Chegar a este nível de abstração — que concebe os inteiros com base na negatividade ou realidades reversíveis, é uma construção que se faz a partir de abstrações e generalizações de níveis mais elementares que ocorrem em contextos diversos, formando diferentes subsistemas. Na medida em que a criança consegue encontrar alguns invariantes comuns a tais subsistemas diferenciados é possível integrá-los em um único sistema. Esse processo não só ocorre na passagem dos naturais para os inteiros, como também explica a possibilidade de, comparando os modelos (físicos ou contábeis), abstrair o sistema comum subjacente a eles.

Quando se observam os modelos, há para cada um deles uma diversidade de esquemas necessários para assimilação e resolução de problemas relativos a espaço, tempo, movimento, saldo positivo e negativo, com suas respectivas representações gráficas. Apreender o caráter dos números inteiros significa não só desenvolver os esquemas necessários no contexto de cada um dos modelos, mas sobretudo abstrair, desses esquemas, a sua forma mais geral.

Na multiplicidade de esquemas que comparecem no processo de construção do conceito de números inteiros — desde os ligados a realidades concretas de significado cotidiano até as implicações necessárias — podemos reconhecer, usando a classificação feita por Piaget (1987), três tipos de esquemas:

Os *esquemas presentativos* (sensório-motores e representativos) estão ligados às propriedades permanentes e simultâneas de objetos, e como tal podem ser abstraídos do seu contexto e generalizáveis. São, freqüentemente, nesse caso, os conceitos desde os mais simples, como os conceitos de deslocamento, direita, esquerda, acima, abaixo, distância, intervalo, antes, depois, maior, menor, até os mais complexos, como número, soma, subtração, multiplicação, divisão, respectivos aos conteúdos ou modelos envolvendo problemas de deslocamento no espaço e no tempo, variações em uma escala, compensação entre perdas e ganhos etc...

Um segundo tipo de *esquemas* são os denominados *procedurais* e se opõem aos anteriores porque são ações sucessivas compromissadas com um fim a ser alcançado ou com o êxito da ação. Por esse caráter, estão ligados ao contexto onde se realizam, são transitórios, sendo, portanto, pouco generalizáveis e quando ocorre a generalização é de natureza distinta da dos esquemas anteriores. Aqui podemos localizar toda a sorte de procedimentos de que a criança lança mão para resolver os problemas sobre identificação, comparação e operações fundamentais com inteiros, relatados no trabalho realizado sobre aprendizagem de números inteiros (Teixeira, 1992) do qual esse artigo faz parte.

Piaget (1987) classifica ainda os *esquemas* em *operatórios* como síntese dos dois anteriores. Os esquemas operatórios são também procedurais, no sentido que envolvem conceitos e relações generalizáveis, mas regulados pelas operações enquanto estruturas internas, o que dá a estes esquemas uma certa estabilidade. Os procedimentos, por sua vez, embora transitórios, na medida em que se coordenam, conduzem a procedimentos operatórios, ou seja, na medida em que uma estratégia usada evidencia contradição e que os resultados a que o sujeito chega levam a conceitualizações, os esquemas se tornam presentativos, portanto, ligados a uma estrutura. No caso dos inteiros, tivemos a oportunidade de mostrar como as crianças, por exemplo, ao realizarem a adição e a subtração, mesmo que inicialmente com base nas regras, podem tomar consciência de algumas contradições nos seus resultados e construir regulações mais estáveis, ou invariantes operatórios segundo Vergnaud (1985), tal como a reversibilidade por compensação entre tais operações.

Quando se fala em aprendizagem de números inteiros, deve-se imaginar a construção de uma diversidade de esquemas estabelecidos em vários contextos de significados diversos e representados através de determinado sistema de símbolos. O desenrolar deste processo, contudo, não é simples, mas supõe transpor vários obstáculos, bem como superar muitas dificuldades.

Baldino (1990), ao fundamentar uma proposta metodológica para o ensino de números inteiros através de jogos, retoma o conceito de obstáculo epistemológico trabalhado por Brousseau (1983) para mostrar o seu papel no desenvolvimento dos conceitos, tanto na história do pensamento matemático, quanto dos alunos atualmente. A superação dos obstáculos supõe os mecanismos de abstração e generalização, que tornam possível transformar os aspectos periféricos nos aspectos centrais da ação, tanto ao nível filogenético quanto ontogenético. As etapas de construção de um conhecimento, quer em um nível, quer no outro, estão descritas conforme sugerem Piaget e Garcia (1984) em *intra-objetal* (análise do objeto), *interobjetal* (estudo das relações e transformações) e *transobjetal* (construção das estruturas), as quais, por sua vez, correspondem às três formas de equilibração.

Com base na análise histórica dos obstáculos presentes no desenvolvimento do conceito de números inteiros, Baldino faz uma comparação à luz das três etapas. A primeira etapa (intra) corresponde, segundo o autor, aos primórdios da construção dos inteiros, quando eram concebidos como estados e aceitos apenas como números clandestinos. As regras de sinais e a distributividade aplicada aos negativos estavam presentes apenas na ação (na prática do cálculo), mas não eram explicitadas, portanto, não determinavam a compreensão do fato.

A segunda etapa (inter) comparece quando as relações entre os estados permitem diferenciá-los das transformações. Isso se dá com a introdução por Cauchy dos sinais operatórios e predicativos, determinando que o número inteiro passasse a ser concebido como operador.

A terceira etapa (trans) ocorre com a demonstração feita por Hankel, estendendo aos inteiros as operações dos naturais e mantendo a distributividade. Segundo Baldino, pode-se identificar na filogênese ou na ontogênese os mesmos mecanismos de equilibração descritos por Piaget e Garcia: "ação (intra), centração-descentração (inter) e reintegração (trans)" (p. 41).

Partindo da hipótese de que a passagem de uma etapa à outra se faz por abstração reflexiva e generalização completiva, tanto ao nível da filogênese quanto do sujeito, o autor faz dos obstáculos revelados na história uma fonte de informações para pensar uma didática que tenha, como objetivo, elaborar procedimentos que tornem possível a passagem da primeira etapa (centração nos elementos) para a segunda (transformação dos elementos), a nível de alunos de 1º grau, enquanto a passagem para o domínio das estruturas algébricas só poderá ser feita em níveis superiores de ensino. Em outros termos, supõe uma didática que introduza o obstáculo e planeje formas de superá-lo, tomando por base a concepção de didática de Brousseau (1983).

Contudo, o interessante no trabalho de Baldino é a construção de uma metodologia que parte do pressuposto de que os obstáculos enfrentados pelos alunos são semelhantes aos encontrados pelos pensadores matemáticos ao longo do tempo. Em outros termos, significa que as dificuldades e erros na aprendizagem dos números inteiros estão ligados a tais obstáculos. Dos seis obstáculos epistemológicos apontados por Glaeser, os dois primeiros (manipular quantidades isoladas e dar sentido a quantidades negativas isoladas) foram rejeitados por Brousseau, que os entende como meras dificuldades. Os demais obstáculos: dificuldade em unificar a reta numérica, ambigüidade dos dois zeros, estagnação no estágio das operações concretas (confusão entre operadores multiplicativos e estados a que se aplicam) e a questão do modelo unificador (adição e multiplicação) são, portanto, uma das fontes das dificuldades e erros dos alunos. Entretanto, como mostrou Brousseau, há outros obstáculos de natureza didática e mesmo ontogenética.

A abordagem de dificuldade e de erro norteadora deste trabalho expressa uma concepção de aprendizagem que perpassa todos os autores cuja matriz de pensamento se situa além dos limites empiristas, e cuja espinha dorsal está delineada pelo construtivismo, o qual não vê a aprendizagem como um processo isolado, mas interconectado com o desenvolvimento.

O erro nesta perspectiva não é um dado apenas pontual, mas reflete os mecanismos envolvidos no processo de compreensão, e se queremos entendê-lo devemos necessariamente considerá-lo como ponto de partida, a partir do qual podemos retroceder e desvendar os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem de um conceito.

Os erros, segundo Brousseau, são formas de manifestação de obstáculos epistemológicos na medida em que eles não se dão por acaso, mas são reprodutivos e persistentes. Na realidade representam, no mesmo sujeito, uma concepção característica ou uma forma de conhecer.

Artigue (1989) afirma que é possível pensar em "nós de resistência" presentes no ensino atual que funcionam tal como os obstáculos epistemológicos no desenvolvimento do pensamento matemático, sem que se lhes atribua o caráter histórico. Desse ponto de vista, é preciso identificá-los na história ou na aprendizagem de uma noção, bem como investigar os processos produtores dos obstáculos na Matemática.

Vergnaud (1985) afirma que os erros são parte integrante do processo de aprendizagem, sendo reveladores dos significados com os quais as crianças trabalham, das defasagens entre significados e significantes e da explicitação dos invariantes que constroem a respeito de um conjunto de situações.

Inhelder, Bovet e Sinclair (1977), nos seus estudos sobre aprendizagem, apontam os erros como indicadores dos níveis de construção do sujeito, devendo ser vistos como manifestação das coordenações pouco integradas. As soluções parciais a que as crianças chegam — explicitadas como erro — revelam, na verdade, esforços de conciliação entre esquemas.

Nos estudos sobre os processos de descoberta Inhelder, et alii (1987) e Karmiloff-Smith e Inhelder (1980) identificam, nos procedimentos da criança, ao resolver problemas, teorias implícitas ou "teorias em ação". Tais teorias, na medida em que orientam a ação, conduzem muitas vezes a erros, que se caracterizam por uma certa regularidade descoberta pela criança e generalizada indevidamente. O erro, nessa perspectiva, não é apenas o indício de uma dificuldade, mas, sobretudo, indicador de uma lógica infantil ou "teoria em ação" que orienta as estratégias de ação com vistas à obtenção do êxito.

Moreno e Sastre (1983), ao proporem o conceito de aprendizagem operatória, vêem também os erros como necessários, pois para que as aprendizagens sejam generalizáveis, portanto, construídas, é preciso que as "teorias" sejam explicitadas, o que torna os erros passos intrínsecos ao processo de construção. Nesse enfoque, os erros são resultados de sucessivas centrações em pontos de vistas particulares, as quais impedem considerações simultâneas. Por outro lado, as centrações são resultados do descobrimento de uma nova forma de assimilar e resolver um problema, e em si mesma muitas vezes representa a superação de uma centração anterior. Resolver um problema compreensivamente, de forma estável, supõe, ao longo do tempo, contraposição entre as diferentes formas de considerá-lo. O erro permite o crescimento na medida em que a simultaneidade das contraposições produz contradições que levam a novas integrações. Em outras palavras, a consciência do erro oportuniza a reorganização das variáveis em jogo, em um sistema interno explicativo mais amplo. Conceituando generalizar como "reproduzir ou aplicar esquemas, relações, operações etc. já conhecidos em um contexto operacional distinto" (p. 250), as autoras afirmam que os erros podem ocorrer por defasagem horizontal, ou seja, ao transpor operações de um contexto a outro mais complexo, o sujeito fracassa. Ao estudar a aprendizagem da noção de coleções, Moreno e Sastre identificaram dois tipos de erros: por "contaminação", ou seja, indissociação dos atributos levando a generalizações excessivas ou por "limitação" ou indissociação entre o elemento e o todo, só identificando com pertencentes a uma coleção, elementos idênticos.

Na perspectiva construtivista, à qual esses conceitos de erros estão filiados, podemos identificar dois enfoques, que situam os erros enquanto manifestação da construção das regulações operatórias ou dos procedimentos desenvolvidos para resolução imediata de problemas.

Piaget (1987) faz uma síntese desses enfoques ao comparar os dois sistemas subjacentes aos mecanismos cognitivos: o sistema que visa à compreensão das realidades físicas e lógico-matemáticas (sistemas lógicos) e o sistema que serve para ter êxito (sistemas de significações). Dessa perspectiva, a natureza dos erros nos dois sistemas é diversa. No primeiro sistema, estão envolvidos os esquemas presentativos e operatórios, e os erros devem ser considerados como "acidentes de percurso". Nesse caso, os erros são manifestações da dificuldade de construir as regulações, ou seja, de equilibrar negações e afirmações, processo que ocorrerá só ao longo do tempo, se mantidas condições ambientais normais. Entretanto, no segundo sistema — mantido por esquemas procedurais simultâneos e sucessivos — o erro pode ser considerado como tentativas devidas a falsas transferências entre contextos heterogêneos. Nesse sistema, "um erro corrigido pode ser mais fecundo que um êxito imediato, porque a comparação da hipótese falsa e suas conseqüências proporciona novos conhecimentos e a comparação entre erros dá lugar a novas idéias" (p. 61).

No caso da aprendizagem escolar, portanto, o que comparece concretamente são os esquemas representativos e procedurais e é sobre eles que o professor deve trabalhar. Fica evidente a necessidade de acompanhar a produção dos alunos como forma de recuperar o processo de construção do conceito, bem como de fazer uso pedagógico do mesmo, como forma de garantir as condições para a construção dos esquemas operatórios. Na realidade trata-se de, trabalhando ao nível dos conteúdos e de suas significações, favorecer a construção, pelo aluno, das implicações significantes ou lógico-matemáticas com base nas quais se organizam os sistemas lógicos de pensamento. Por outro lado, é preciso lembrar também que, se os erros dos alunos podem advir de obstáculos de ordem ontogenética (mecanismos internos do sujeito) ou epistemológica (intrínsecos ao próprio conteúdo), não é menos provável que, a nível do ensino, coloquem-se obstáculos didáticos. Podemos concluir conforme afirma Vihn-Bang (1990), que, no caso da aprendizagem escolar, a explicação do erro faz apelo, no mínimo, à articulação de dois componentes: os instrumentos cognitivos do aluno e os conteúdos do ensino e sua forma didática.

Referências Bibliográficas

ARTIGUE, M. Epistémologie et didactique. *Cahier de DIDIREM*, Paris, Ed. IREM; *3*: 1-24, 1989.

BACHELARD, G. *La Formation de L'Esprit Scientifique*. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1967.

BALDINO, R. R. *Metodologia de Jogos para os Números Inteiros*. Texto mimeografado, 1990.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2): 165-198, 1983.

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. Trad. Lauro Tinoco. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, *17*: 29-124, 1985.

INHELDER, B.; BOVET, M. & SINCLAIR, H. *Aprendizagem e Estrutura do Conhecimento*. São Paulo, Saraiva, 1977.

_____ et alii. Das estruturas cognitivas aos procedimentos de descoberta. In: LEITE, L. B., org. *Piaget e a Escola de Genebra*, São Paulo, Cortez, 1987.

KARMILOFF-SMITH & INHELDER, B. Si quieres avanzar, hazte con una teoría. *Infancia y Aprendizaje, 13*: 69-88, 1980.

LOVELL, K. *Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los Niños*. Madrid, Ed. Morata, 1986.

MORENO, M. & SASTRE, G. *Aprendizaje y Desarrollo Intelectual*. México, Gedisa, 1983.

PIAGET, J. *Introducción a la Epistemología Genética: 1- El Pensamiento Matemático*. Buenos Aires, Paidós, 1975.

_____ O possível, o impossível e o necessário. In: LEITE, L. B., org. *Piaget e a Escola de Genebra*, São Paulo, Cortez, 1987.

_____ *Recherches sur l'Abstraction Réfléchissante: 2- L'Abstraction de l'Ordre et des Relations Spatiales*. Paris, PUF, 1977.

PIAGET, J. & GARCIA, R. *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, Siglo Veintiuno Editores, 1984.

PIAGET, J. & HENRIQUES, G. *Investigaciones sobre la Generalización*. México, Premiá Ed., 1984.

RAMOZZI, Chiarottino Z. *Em Busca do Sentido da Obra de J. Piaget*. São Paulo, Ática, 1984.

SKEMP, R. *Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid, Ed. Morata, 1980.

VERGNAUD, G. Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. Trad. Anna Franchi e Dione L. de Carvalho. *Psychologie Française. 314*: 245-252, 1985.

_____ Psicologia Cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática: Algumas Questões Teóricas e Metodológicas.

VINH-BANG. L'intervention psychopédagogique. *Archives de Psychologie. 58*: 123-135, 1990.

Resumo O presente artigo apresenta uma análise da aprendizagem do conceito de números inteiros, entendida como processo de compreensão que envolve mecanismos operatórios básicos de abstração reflexiva, generalização construtiva e tomada de consciência presentes na construção das noções lógico-matemáticas. Procura explicitar as operações necessárias subjacentes à aprendizagem do conceito de inteiros, bem como identifica os obstáculos epistemológicos encontrados na formulação matemática do mesmo ao longo da história. Com base nessas análises propõe que os erros e dificuldades para aprender esse conceito sejam abordados num enfoque construtivista.

Palavras-chaves: Aprendizagem operatória, números inteiros, obstáculos epistemológicos, abstração reflexiva, generalização construtiva.

Abstract This article presents an analysis of the learning of integer number concept, seen as an understanding process which involves basic operatory mechanisms of reflexive abstraction, constructive generalization and awareness involved in the construction of the logic-mathematical notions. It seeks to make explicit the necessary operations underlying the learning of integer concept, as well as the formulations of integer numbers along history. Based on this analysis we propose that the errors and difficulties in learning this concept be approached in a constructivist perspective.

Descriptors: Operatory learning, integer numbers, epistemological obstacles, reflexive abstraction, constructive generalization.