Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar

*Dario Fiorentini, Maria Ângela Miorim e Antonio Miguel**

Introdução

No artigo "Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?", publicado nesta Revista[1], mostramos que o ensino da Matemática elementar no Brasil foi, historicamente, marcado pela existência de uma atitude oscilatória e maniqueísta que se expressava ora no realce da Álgebra em detrimento da Geometria, ora na defesa do ponto de vista oposto. Mostramos, também, que essa atitude ainda persiste pois, enquanto o ensino da Geometria vem recebendo atenção especial por parte dos pesquisadores em Educação Matemática, o ensino da Álgebra parece relegado a um estado letárgico. No nosso estudo anterior destacamos que uma possibilidade de superação de tal atitude seria a de repensar também o ensino da Álgebra. Como condição para esse repensar havíamos apontado para a necessidade de

> "realização de estudos que procurassem explicitar a especificidade da Álgebra e o papel por ela desempenhado na história do pensamento humano, particularmente na história do pensamento científico e matemático" (Miguel, Fiorentini e Miorim, 1992:52).

O presente trabalho tenta seguir essa direção. Pretendemos, agora, apresentar alguns elementos que permitam esse repensar a educação algébrica elementar. Faremos isso a partir de uma análise comparativa entre as concepções de educação algébrica que se manifestaram ao longo da histórica do ensino da Matemática e as concepções de Álgebra subjacentes às leituras mais freqüentes do desenvolvimento histórico desse campo do conhecimento matemático.

1. *Pro-Posições*, v. 3, nº 1(7): 39-54, 1992.

Algumas leituras do desenvolvimento histórico da Álgebra

Uma *primeira e usual leitura* do desenvolvimento da Álgebra na história considera como ponto de referência o momento em que se teve a clara percepção de que o objeto de investigação desse campo do conhecimento matemático ultrapassava o domínio exclusivo do estudo das equações e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos, isto é, sobre estruturas matemáticas tais como grupos, anéis, corpos etc.

Através desse critério, que tem como base a mudança qualitativa da natureza do objeto de investigação desse campo de conhecimento, a história da Álgebra divide-se em *Álgebra Clássica ou*

* Professores do Departamento de Metodologia de Ensino da Faculdade de Educação da UNICAMP.

Elementar e *Álgebra Moderna ou Abstrata*. O debate a respeito da natureza da Álgebra, que se estabeleceu a partir da primeira metade do século XIX, motivado pelos trabalhos de matemáticos ingleses e franceses, notadamente os de George Peacock (1791-1858), Augustus De Morgan (1815-1864) e Evariste Galois (1811-1832), reflete a tomada de consciência dessa ruptura.

Duas concepções evidenciavam-se nesse debate: por um lado, uma tendência tradicional que insistia em considerar a Álgebra como uma Aritmética universal ou generalizada e, por outro lado, uma tendência moderna para a qual a Álgebra consistia em um sistema simbólico postulacional, isto é, um sistema cujos símbolos e regras operatórias sobre eles são de natureza essencialmente arbitrária, sujeitos apenas à exigência de consistência interna (Kieran, 1990:97; Boyer, 1974:420 e 428).

A passagem seguinte ilustra o modo como essa ruptura era vista por De Morgan — um dos representantes da tendência moderna:

> "Com uma única exceção[2], nenhuma palavra ou sinal em Álgebra ou Aritmética tem um átomo de significado em todo este capítulo, cujo assunto são símbolos e suas leis de combinação, dando uma Álgebra simbólica que pode a partir daí tornar-se a gramática de cem álgebras diferentes significativas" (Boyer, 1974:421).

Para De Morgan, os símbolos e as operações não apenas poderiam buscar significação no interior da Matemática, como também em domínios, tais como o ético e o moral, considerados sem conexão com o matemático. Assim, para ele, as letras poderiam significar virtudes ou vícios e os sinais + e -, recompensas e castigos (Boyer, 1974:421).

Uma *segunda leitura* do desenvolvimento da Álgebra baseia-se na contribuição das diversas culturas à constituição desse campo de conhecimento. Nesse sentido, é possível falar de uma "álgebra egípcia", de uma "álgebra babilônica", de uma "álgebra grega pré-diofantina", de uma "álgebra diofantina", de uma "álgebra chinesa", de uma "álgebra hindu", de uma "álgebra arábica", de uma "álgebra da cultura européia renascentista" etc.

De fato, só para citar alguns exemplos, não dispunham os egípcios do método da falsa posição para a resolução de equações de 1º grau? Não dispunham os babilônios de um conjunto relativamente sofisticado de técnicas e artifícios para a resolução de equações lineares, quadráticas, cúbicas e até quárticas?

Esse tipo de leitura não costuma identificar um momento histórico específico do surgimento da Álgebra. Sua preocupação fundamental é evidenciar alguns elementos característicos do pensamento algébrico de cada cultura, os quais são vistos sendo produzidos de forma autônoma ou através da interação entre culturas.

Uma *terceira leitura*, muito freqüente nos manuais de história da Matemática, é aquela que distingue três momentos no desenvolvimento da Álgebra em função das fases evolutivas da linguagem algébrica: a retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica.

A *retórica ou verbal* corresponderia à fase em que não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento algébrico. Todos os

2. Segundo Boyer (1974: 421), "a exceção mencionada por De Morgan é o símbolo de igualdade, pois ele pensava que em $A = B$ os símbolos A e B devem ter o mesmo significado resultante, quaisquer que sejam os passos para atingi-lo".

passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente. Esta teria sido a álgebra dos egípcios, dos babilônios e dos gregos pré-diofantinos.

A fase *sincopada* da expressão do pensamento algébrico teria surgido com Diofanto de Alexandria (século III), pois foi ele quem, pela primeira vez, introduziu um símbolo para a incógnita — a letra "sigma" do alfabeto grego — e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações. Uma forma sincopada similar à de Diofanto seria, mais tarde, desenvolvida pelos hindus, especialmente por Brahmagupta (século XII). A álgebra árabe, por sua vez, parece não ter utilizado esta forma de expressão. Entretanto, convém assinalar que, apesar da forma retórica de exprimir a Álgebra, os árabes introduziram um novo vocabulário técnico para esse campo de conhecimento, dando-lhe uma certa autonomia que, mais tarde, seria reconhecida através da aceitação universal do termo *al-găbr* introduzido por al-Khwarizmi.

O estilo sincopado foi utilizado também pelos algebristas italianos do século XVI. Por exemplo, a expressão "cubus p. 6 rebus aequalis 20", de Cardano (1545), seria uma forma sincopada de exprimir uma equação, que, na linguagem simbólica posterior, corresponderia a "$x^3 + 6x = 20$".

A fase *simbólica* corresponderia ao momento em que as idéias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras. Embora Viète (1540-1603) ainda utilizasse um estilo sincopado, foi o principal responsável pela introdução de novos símbolos na Álgebra. Além de utilizar os sinais germânicos "+ e -", introduziu as vogais para representar quantidades constantes e consoantes para quantidades incógnitas. Descartes (1596-1650) consolidaria o uso da linguagem simbólica com a publicação, em 1637, de seu *La Géométrie*. Neste, Descartes utiliza as últimas letras do alfabeto (x, y, z, ...) como incógnitas (e implicitamente como variáveis) e as primeiras (a, b, c, d, ...) como quantidades fixas. Assim, embora os comprimentos dos segmentos de reta que utiliza na abordagem da Geometria Analítica sejam expressos, por exemplo, como *AB*, *BC*, *CH* etc., aparecem, na verdade, implicitamente como função das coordenadas x e y e dos parâmetros a, b, c, ..., que fixam a posição das retas dadas.

Com base nessa leitura, alguns historiadores entendem que a Álgebra teria surgido com Diofanto, uma vez que ele foi o primeiro a utilizar um símbolo literal para a incógnita e, sobretudo, por ter sido o primeiro a utilizar uma linguagem mais concisa e específica para expressar o pensamento algébrico.

Uma *quarta leitura* do desenvolvimento da Álgebra assenta-se não mais nos aspectos exteriores da linguagem algébrica, isto é, no seu maior ou menor grau de concisão, mas na significação que é atribuída aos símbolos desta linguagem. Jacob Klein, em seu livro publicado em 1934, foi quem primeiro efetuou esse tipo de leitura através de uma profunda análise comparativa das obras de Diofanto e Viète.

Segundo Klein, existe uma distinção fundamental entre as concepções de símbolo antes e após Viète. Até Viète, o símbolo é utilizado apenas para representar quantidades desconhecidas em uma equação, isto é, para representar genericamente uma quantidade determinada, ainda que provisoriamente desconhecida. A novidade introduzida por Viète foi não apenas representar simbolicamente, de maneira distinta, quantidades conhecidas (coeficientes de equações) e desconhecidas (incógnitas das equações), mas, sobretudo, atribuir papéis diferenciados aos símbolos representativos dessas quantidades.

Para que a distinção entre coeficientes e incógnitas de uma equação pudesse ser percebida, Viète introduziu uma convenção fecunda que consistia em representar os coeficientes por vogais e as incógnitas por consoantes. Mas essa convenção era apenas o aspecto externo de uma distinção mais sutil e profunda entre o uso da letra para representar, genericamente, quantidades desconhecidas (incógnitas) e o uso da letra para representar, genericamente, quantidades quaisquer, isto é, parâmetros.

A sutileza e profundidade dessa nova forma de se conceber o símbolo e, conseqüentemente, de expressar as equações em um grau maior de generalidade, podem ser percebidas nas implicações que trouxe para o desenvolvimento do pensamento algébrico. De fato, essa forma de expressar equações possibilitou que se trabalhasse não apenas com equações particulares com coeficientes numéricos, como ocorria até então, mas, sobretudo, que se trabalhasse com classes de equações.

Resumindo o ponto de vista de Klein, pode-se dizer que é somente a partir da percepção do novo caráter simbólico assumido pela letra que se pode falar em um verdadeiro nascimento da Álgebra; ou seja, esta leitura reconhece em Viète o autêntico fundador da Álgebra.

Uma *quinta leitura* do desenvolvimento da Álgebra na história é aquela que toma como critério os métodos de abordagem daquilo que, por um longo tempo, constituiu o objeto e o objetivo fundamentais da Álgebra: a resolução de equações. Esse tipo de leitura, que foi realizado por Piaget e Garcia (1987) na obra *Psicogênese e História das Ciências*, distingue três grandes períodos no desenvolvimento da Álgebra: o intra-operacional, o interoperacional e o transoperacional.

O *período intra-operacional*, extremamente longo, caracteriza-se como aquele em que, para cada problema, buscava-se um método particular de solução. Isto é, cada equação é objeto de um tratamento específico. Aqui, a busca de solução para equações dos diversos graus é geralmente realizada por tentativas de caráter empírico.

O *período interoperacional* caracteriza-se pela tentativa de busca de fórmulas de resolução para equações gerais dos diversos graus, através de um método que consistia na transformação da equação original, não-resolúvel, em outra, resolúvel, que lhe fosse equivalente.

No século XVIII, os trabalhos de Euler, Lagrange e Gauss, realizados com as ferramentas proporcionadas pelo cálculo infinitesimal, abriram caminho para um salto qualitativo no desenvolvimento da teoria das equações. Essa abertura de caminho consistiu na busca das relações que permanecem invariantes nas transformações de funções contínuas. Esse estudo conduziu à percepção de que as propriedades das funções polinomiais e, conseqüentemente, as das equações algébricas, não dependiam do fato de os coeficientes e variáveis dessas equações serem números. Foi, portanto, a interferência do cálculo infinitesimal no domínio da Álgebra que possibilitou o salto qualitativo no que se refere à natureza do objeto de investigação desse campo de conhecimento, fazendo-o atingir o *período transoperacional*.

De fato, a questão central que passou a direcionar as novas investigações consistia não mais em buscar que tipo de números determinariam as propriedades das raízes das funções polinomiais, e sim as *propriedades dos números* que intervêm em tais considerações, uma vez que muitos outros conjuntos não-numéricos gozavam de tais propriedades (Piaget e Garcia, 1987:151). Essa nova linha de investigação conduziria ao surgimento, com Galois, das estruturas algébricas.

Algumas concepções de Álgebra

Quando se procede à análise desse conjunto de leituras, algumas concepções de Álgebra se evidenciam, mesmo que não se possa estabelecer uma correspondência um-a-um entre essas concepções e as leituras apresentadas.

Uma primeira concepção, que poderíamos chamar de *processológica*, encara a Álgebra como um conjunto de procedimentos (técnicas, artifícios, processos e métodos) específicos para abordar certos tipos de problemas. Esses procedimentos específicos consistem em *técnicas algorítmicas* ou processos iterativos que se aplicam a problemas ou conjunto de problemas, cuja resolução se baseia no seguimento de uma seqüência padronizada de passos.

A concepção processológica não é exclusivamente lingüística, uma vez que não subordina a existência de um pensamento algébrico à necessidade de existência de uma forma específica, isto é, não-retórica, de linguagem que seja capaz de expressá-lo.

Uma segunda concepção, que poderíamos chamar de *lingüístico-estilística*, encara a Álgebra como uma linguagem, isto é, como uma linguagem específica, artificialmente criada com o propósito de expressar concisamente aqueles procedimentos específicos a que fizemos referência anteriormente.

Como se pode notar, a concepção lingüístico-estilística, ao enfatizar a forma de expressão do pensamento algébrico em detrimento da forma como esse pensamento se manifesta, criando assim uma distinção entre forma de pensamento e forma de expressão desse pensamento, é mais rigorosa (o que não significa mais correta ou mais adequada para certos fins) que a concepção processológica, na medida em que defende a não-suficiência da existência de um pensamento algébrico para que a Álgebra se constitua em campo autônomo do conhecimento matemático. Para isso, é necessário também que esse pensamento adquira a consciência de que, para poder avançar, é preciso, de algum modo, estabelecer uma ruptura com aquilo que se revelou um obstáculo a esse desenvolvimento. Identifica, então, o obstáculo com a linguagem natural e a condição de ruptura com a possibilidade de criação de uma "nova linguagem", isto é, de uma linguagem adequada àquela forma específica de pensamento.

Uma terceira concepção, que poderíamos chamar de *lingüístico-sintático-semântica*, é aquela que, como a anterior, concebe a Álgebra como uma linguagem específica e concisa, mas cujo poder criativo e instrumental não reside propriamente em seu domínio estilístico, mas em sua dimensão sintático-semântica. É apenas quando os signos dessa linguagem específica adquirem o caráter de símbolos, ou seja, é apenas quando se estabelece, ao nível semântico, a sutil e fundamental distinção entre o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas ou contínuas, determinadas e particulares, e o uso da letra para representar genericamente quantidades genéricas, que essa linguagem revela sua dimensão operatória ou sintática, isto é, sua capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas estritamente simbólicas. É a distinção semântica possibilitando o desenvolvimento dessa linguagem ao nível sintático e ampliando, assim, o seu poder instrumental.

É fácil perceber que a concepção lingüístico-sintático-semântica da Álgebra é ainda mais rigorosa que a lingüístico-estilística, uma vez que, segundo ela, a condição necessária à existência de um pensamento algébrico autônomo é não apenas a consciência da necessidade de existência de uma linguagem específica a essa forma de pensamento, mas também a consciência de que essa linguagem, para adquirir a dimensão operatória e revelar o seu poder transformacional e instrumental, deve atingir o *status* e o estágio mais elevado de uma linguagem verdadeiramente simbólica, no sentido anteriormente definido.

Uma quarta concepção, que chamaremos de *lingüístico-postulacional*, é aquela que concebe a Álgebra como "a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da Matemática, incluindo a Lógica" (Piaget e Garcia, 1987:163).

A concepção lingüístico-postulacional compartilha com a concepção lingüístico-sintático-semântica o fato de conceber a Álgebra como uma linguagem simbólica. Porém, ao imprimir aos signos lingüísticos um grau de abstração e generalidade sem precedentes, a concepção lingüístico-postulacional estende o domínio da Álgebra a todos os campos da Matemática. De fato, para essa concepção, o caráter simbólico do signo lingüístico é ampliado, isto é, ele passa a representar não apenas uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas também entidades matemáticas que não estão, necessariamente, sujeitas ao tratamento quantitativo, tais como as estruturas topológicas, as estruturas de ordem, a estrutura de espaço vetorial etc.

As concepções de Educação Algébrica

Uma vez identificadas e caracterizadas as concepções mais freqüentes de Álgebra que podem ser inferidas a partir das diferentes leituras do desenvolvimento histórico desse campo, a questão que se coloca é: em que medida elas se relacionam com as concepções dominantes de Educação Algébrica que se manifestaram ao longo da história da Educação Matemática elementar?

Uma primeira concepção de Educação Algébrica, praticamente hegemônica durante todo o século XIX e primeira metade do século XX, tanto no Brasil como em outros países, que chamaremos de *lingüístico-pragmática*, vincula o papel pedagógico da Álgebra como instrumento de resolução de problemas à concepção lingüístico-semântico-sintática dessa disciplina.

Nessa concepção prevalece a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo "transformismo algébrico"[3] seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, ainda que esses problemas fossem, quase sempre, artificiais, no sentido de que não era a natureza e relevância

3. Estamos utilizando a expressão transformismo algébrico para designar o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas.

deles que determinariam os conteúdos algébricos a serem aprendidos, mas a forma como "fabricar" um problema para cuja solução tais e tais tópicos, tidos como indispensáveis, deveriam ser utilizados.

Nesse sentido, um transformismo algébrico totalmente independente de objetos concretos, de figuras ou ilustrações e de problemas antepunha-se como condição necessária, isto é, como pré-requisito, a uma "álgebra aplicada", ou seja, aos tais "problemas". Esse "transformismo algébrico" caracterizava-se, quase invariavelmente, por uma seqüência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passava pelas operações com essas mesmas expressões, chegando às equações para, finalmente, utilizá-las na resolução de problemas.

O Movimento da Matemática Moderna iria contrapor a essa concepção *lingüístico-pragmática da Educação* Algébrica uma outra concepção de cunho lingüístico, que denominaremos de *fundamentalista-estrutural.* Nesta nova concepção, que se baseia na concepção lingüístico-postulacional da Álgebra, o papel pedagógico dessa disciplina passa a ser o de fundamentador dos vários campos da matemática escolar. No que se refere, particularmente, à forma de abordagem daqueles conteúdos classicamente ditos algébricos, prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivessem subjacentes.

Essa busca da compreensão, via fundamentação lógica, traria como conseqüência uma reorganização dos tópicos algébricos (expressões algébricas, valores numéricos, operações, fatoração) no sentido de fazer com que eles fossem antecedidos por "tópicos fundamentais", entendidos como "fundamentadores" (conjuntos numéricos, propriedades estruturais, estudo dos quantificadores, sentenças abertas e fechadas, conjunto universo e conjunto verdade, equações e inequações de 1º grau) e sucedidos por "novos conteúdos algébricos" (funções, funções de 1º e 2º graus etc).

Uma terceira concepção de Educação Algébrica, que chamaremos de *fundamentalista-analógica*, volta a vincular o papel pedagógico da Álgebra como instrumento de resolução de problemas à concepção lingüístico-semântico-sintática dessa disciplina. Agora, porém, essa concepção tenta efetuar uma síntese entre as duas anteriores, uma vez que procura, por um lado, *recuperar o valor instrumental da Álgebra* e, por outro, manter o caráter fundamentalista — só que não mais de forma *lógico-estrutural* — de justificação das passagens presentes no *transformismo algébrico*. Essa nova forma de justificar baseia-se, na maioria dos casos, em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais. Nesse sentido, essa concepção acredita que uma "álgebra geométrica", por tornar visível certas identidades algébricas, seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica. Isso, porém, não significa defender a tese determinista da impossibilidade de acesso do estudante a uma forma de abordagem meramente simbólica e mais abstrata mas, simplesmente, acreditar que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal.

Um outro recurso analógico bastante comum é a "justificação" de certas passagens do transformismo algébrico através da utilização de leis do equilíbrio físico, recorrendo, para isso, a materiais "concretos" como balanças, gangorras etc., nos quais o "concreto" tem um significado diferente do "concreto" ao qual fazem apelo os recursos estritamente geométrico-visuais.

Fazendo, enfim, uma síntese comparativa entre essas três concepções de Educação Algébrica, podemos defender aqui a tese de que o ponto comum, e a nosso ver didaticamente negativo, existente entre elas é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. De fato, todas essas concepções de Educação Algébrica tomam como ponto de partida a existência de uma álgebra simbólica já constituída. Em todos esses casos, o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao "transformismo algébrico".

Na concepção lingüístico-pragmática existe uma reduzida preocupação fundamentalista. Temos aí um transformismo predominantemente mecânico-formal. Nas demais, existe uma preocupação em fundamentar o transformismo algébrico. Na concepção fundamentalista-estrutural essa fundamentação é de natureza lógico-estrutural e, na fundamentalista-analógica, a fundamentação é de caráter preponderantemente geométrico.

Se estabelecermos uma comparação entre as concepções de Álgebra obtidas a partir das várias leituras históricas do desenvolvimento desse campo, e as concepções de Educação Algébrica dominantes ao longo da história do ensino da Matemática, não é difícil concluir que existe uma certa consonância entre elas. De fato, do mesmo modo como as primeiras tenderam a priorizar a linguagem em detrimento do pensamento, também as últimas acabaram enfatizando o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem.

Repensando a Educação Algébrica

A análise anterior nos coloca diante do fato de que repensar a Educação Algébrica implica, de algum modo, repensar a relação que se estabelece entre pensamento e linguagem.

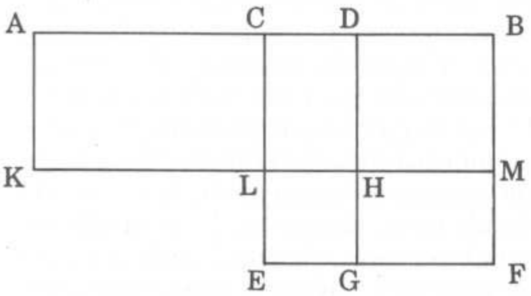
A tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra. Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-la, colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico. Tentaremos estabelecer essa caracterização a partir da análise de situações nas quais acreditamos ser possível a manifestação, em maior ou menor grau, do pensamento algébrico.

1ª situação. Em uma certa aldeia é o momento de descobrir o dia e o mês em que deve ser celebrada uma importante cerimônia religiosa. O feiticeiro, que anunciou de manhã a chegada da meia-lua, acaba de comunicar que a partir deste dia a cerimônia terá lugar exatamente no 13º dia da 8ª lua:

"Vários sóis e várias luas" — declarou ele — "deverão aparecer e desaparecer antes da chegada da festa. A lua que acaba de nascer deverá encher-se e depois esvaziar completamente. Depois ela deverá renascer tantas vezes quantas puder, desde o dedo mindinho de minha mão direita até o cotovelo do mesmo lado. Depois o sol deverá levantar-se e pôr-se tantas vezes quantas puder desde o dedo mínimo de minha mão direita até a boca. Só então se levantará o sol em que comemoraremos juntos a cerimônia do Grande Totem" (IFRAH, 1989:37).

2ª situação. Do *Livro II* dos *Elementos de Euclides* extraímos a proposição 5, que escrevemos na linguagem atual:

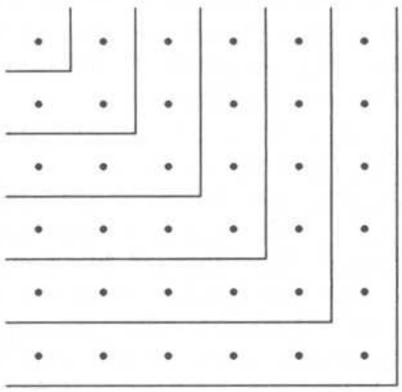
"Se os pontos *C* e *D* dividem o segmento de reta *AB* dado em partes iguais e desiguais, respectivamente, então, a área do retângulo *ADHK* mais a área do quadrado *LHGE* é igual à área do quadrado *CBFE*".



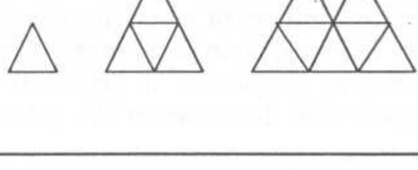
3ª situação. Na introdução à sua ciência da Dinâmica Galileu dizia que muitos filósofos haviam elaborado a respeito do movimento, mas que ele havia descoberto algumas propriedades que não tinham, até então, sido observadas ou demonstradas. Uma dessas propriedades refere-se ao movimento de um corpo em queda livre. Alguns haviam observado que esse movimento era acelerado. Galileu, porém, descobriu de que maneira a velocidade variava em função do tempo e expressou essa dependência através de uma "fórmula", ainda que de forma retórica.

O mesmo pensamento é expresso em relação ao movimento de projéteis. Outros já haviam observado que os projéteis descrevem uma trajetória curva, mas Galileu demonstrou que tal trajetória deveria ser uma parábola (Burtt, 1983:60).

4ª situação. Com base na figura abaixo, explique como se pode calcular a soma de uma quantidade qualquer de números ímpares consecutivos, começando por um.



5ª situação. Coloque mais dois elementos na série da figura abaixo e diga como saber quantos triângulos existiriam em um elemento qualquer da série.



6ª situação. Resolva o seguinte problema que foi extraído de um velho texto hindu surgido por volta do ano 450 d.C.:

"Um mercador paga direitos sobre certas mercadorias em três lugares. No primeiro entrega 1/3 de sua mercadoria, no segundo, 1/4 do restante, no terceiro, 1/5 do que lhe sobra. O imposto total é de 24 moedas. Quanto tinha o mercador ao iniciar a viagem?" (HOGBEN, 1958:328)

7ª situação. As Tabelas 1, 2 e 3 representam, respectivamente, os possíveis resultados da adição de números pares com números ímpares, os possíveis sinais dos produtos entre números positivos e negativos e os resultados de uma operação qualquer sobre elementos quaisquer.

+	par	ímpar
par	par	ímpar
ímpar	ímpar	par

Tabela 1

x	+	-
+	+	-
-	-	+

Tabela 2

*	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

Tabela 3

Verifique se existe uma analogia operatória entre as Tabelas 1, 2 e 3. Em caso afirmativo, diga como esta analogia pode ser estabelecida.

À primeira vista, devido à diversidade das situações apresentadas, poderíamos pensar que, em muitas delas, seria difícil perceber algum vestígio de pensamento algébrico. De fato, não é usual que situações análogas à maioria das apresentadas apareçam nos tópicos relacionados à Álgebra nos manuais didáticos.

Entretanto, se para efeito de análise suspendermos provisoriamente os aspectos lingüísticos dessas situações, perceberemos a existência de elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.

Assim, na primeira situação, quando o feiticeiro expõe o modo como determina o dia da cerimônia religiosa, com base na observação da lua e do sol, demonstra a percepção de regularidade na variação das fases da lua. Por outro lado, a linguagem retórica que utiliza evidencia uma tentativa de expressar a estrutura dessa regularidade.

Na segunda situação, Euclides expressa, através de uma linguagem retórico-geométrica, a conhecida identidade algébrica $(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$. O pensamento algébrico aí se manifesta não apenas pelo fato de Euclides estar enunciando uma proposição que se aplica a qualquer segmento *AB* (generalização), como também pela percepção de que, ainda que se varie a posição do ponto *D* na figura, a equivalência das áreas do hexágono *ADGELK* e do quadrado *CBFE* se mantém (percepção de invariância).

Na terceira situação, ao perceber o modo como os corpos caem e ao expressar esse modo através de uma lei funcional quantitativa, Galileu não apenas percebeu uma regularidade nesse movimento, como também expressou genericamente a estrutura dessa regularidade através de uma fórmula.

A resolução satisfatória da quarta e quinta situações depende da percepção de uma regularidade por trás da série de padrões geométricos (a quantidade de pontos nos gnômons consecutivos da situação 4 ou a quantidade de triângulos em cada padrão triangular da situação 5). A percepção dessa regularidade conduz à possibilidade de expressar retórica ou simbolicamente ($1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; $n \in N^*$) a estrutura subjacente à totalidade desses padrões.

No que se refere à sexta situação, se nos ativermos apenas ao seu enunciado, tradicionalmente tido como algébrico, seria difícil localizar aí algum dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Isso porque esses elementos nem sempre se revelam no enunciado de uma situação-problema, mas no modo como se busca resolvê-la. De fato, caso essa resolução ocorresse pelo método das tentativas, não poderíamos, a rigor, caracterizá-la como algébrica. Por outro lado, se o plano de resolução prever, de forma retórica ou simbólica, operações com quantidades incógnitas e o emprego de leis aritméticas que legitimem as transformações entre os membros de uma igualdade, então, seguramente, os elementos do pensamento algébrico deverão aí se manifestar. De fato, as regras nas quais se baseiam essas operações e transformações só puderam ser obtidas através da percepção de regularidades no trabalho com os números e da percepção da possibilidade de generalizá-las.

As três tabelas da 7ª situação apresentam a mesma estrutura lógico-operatória, no caso, uma estrutura de grupo. A percepção dessa estrutura exige um alto nível de abstração, uma vez que essa percepção só é possível quando deixamos de levar em consideração a natureza dos elementos envolvidos para voltar a nossa atenção à forma como os elementos são operados e às propriedades invariantes das operações. Nesse caso, portanto, estão presentes todos os elementos característicos do pensamento algébrico.

O modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, portanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento.

A análise das situações em que esse pensamento pode se manifestar levou-nos, ainda, a concluir que não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Esse ponto de vista, além de levantar a possibilidade de uma leitura diferenciada, dentre aquelas que apresentamos anteriormente, do desenvolvimento histórico da Álgebra, abre também novas perspectivas para o trabalho pedagógico relativo a esse campo do conhecimento matemático.

Uma primeira implicação pedagógica de caráter geral refere-se ao momento de iniciação ao pensamento algébrico no currículo escolar. Se, como mostramos, esse tipo de pensamento não prescinde de uma linguagem estritamente simbólico-formal para sua manifestação, não há razão para sustentar uma iniciação relativamente tardia ao ensino-aprendizagem da Álgebra. Ao contrário, acreditamos que, desde as séries iniciais, o trabalho com esse tipo de pensamento se deve fazer presente na formação do estudante.

Nas séries iniciais do 1º grau, o objetivo fundamental a que se deve visar é o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização.

Não devemos esquecer, porém, que esse pensamento se potencializa à medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Nesse sentido, se a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal constitui-se também em impedimento para o seu pleno desenvolvimento.

Parece, portanto, subsistir entre pensamento e linguagem simbólico-formal uma relação análoga àquela existente entre pensamento e linguagem natural, no domínio do desenvolvimento psico-cognitivo.

Do fato que acabamos de expor, advém uma segunda implicação pedagógica que diz respeito ao papel desempenhado pela linguagem simbólica na Educação Algébrica. Na verdade, a linguagem simbólico-formal cumpre, a partir de um certo momento, um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico abstrato, uma vez que ela fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema, o que possibilita dar conta da totalidade e da estrutura da situação. Além disso, ela é um instrumento facilitador na simplificação de cálculos, devido à capacidade transformacional das expressões simbólicas em outras mais simples que lhe são equivalentes. Finalmente, por permitir operar com quantidades variáveis, possibilita uma melhor compreensão de situações nas quais a variação e o movimento estejam presentes.

Uma terceira implicação pedagógica diz respeito à amplitude do pensamento algébrico. O fato dessa forma de pensamento manifestar-se em todos os campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento não significa apenas que a Álgebra "se aplica", no sentido instrumental do termo, a esses campos e a essas áreas, o que pressuporia a constituição e o domínio prévios da linguagem algébrica. Mais que isso, o pensamento algébrico está na base da construção e da compreensão do universo conceitual desses campos e áreas, isto é, é um pensamento indispensável para a constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea. Nesse sentido, o olhar algébrico perpassa e impregna o modo de produção do conhecimento em qualquer domínio. Conseqüentemente, no plano pedagógico, a construção do pensamento algébrico não se realiza de modo isolado, mas em articulação com tais campos e áreas.

Finalmente, uma última implicação de natureza didático-metodológica diz respeito às grandes etapas segundo as quais julgamos deva assentar-se o desenvolvimento da Educação Algébrica elementar. Definitivamente, não existe qualquer argumento de ordem pedagógica para se continuar a sustentar, como o fazia a Educação Matemática tradicional, que o primeiro momento da Educação Algébrica é o trabalho com o transformismo. No nosso ponto de vista, a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema. Esse trabalho deve ser realizado de forma a garantir o exercício daqueles elementos caracterizadores do pensamento algébrico destacados anteriormente. É esse trabalho reflexivo e analítico sobre situações-problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando à resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa para o estudante.

Se na primeira etapa o objetivo é chegar às expressões simbólicas através da análise de situações concretas, na segunda, trata-se de percorrer o caminho inverso. Agora, convém partir da expressão algébrica — uma forma pura — e tentar atribuir-lhe algumas significações que ela comporta.

Finalmente, na terceira etapa, a ênfase deve recair sobre o transformismo, isto é, sobre o modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e sobre os procedimentos que legitimam essas transformações.

É claro que a ordem dessas etapas não é rígida. Não só é possível, como também aconselhável, que elas se interpenetrem, dando ao estudante a oportunidade de rever idéias mal elaboradas e abrindo-lhe o caminho de acesso à construção sólida de seu pensamento algébrico.

Referências bibliográficas

BAUMGART, J. K. *História da Álgebra*. São Paulo, Atual, 1992.

BOOKER, G. Conseqüências pedagógicas da pesquisa em Álgebra. In: *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, *14*(24): 67-72, 1989.

BOURBAKI, N. *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Madrid, Alianza Editorial, 1972.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo, Blücher, 1974.

BURTT, E. A. *As Bases Metafísicas da Ciência Moderna*. Brasília, Editora da UnB, 1983.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1978.

DIEUDONNÉ, J. La abstracción en matemáticas y la evolución del álgebra. In: *La Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid, Aguilar, 1968.

HEATH, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York, Dover Publications Inc., 1956, 3 v.

HOCQUENGHEM, M. L. et alii. *Histoire des Mathématiques pour les Collèges*. Paris, Editions CEDIC, 1982.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre, Globo, 1958.

IFRAH, G. *Os Números: História de uma Grande Invenção*. Rio de Janeiro, Globo, 1989.

KIERAN, C. Cognitive processes involved in learning school algebra. In: *Mathematics and Cognition: a Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

______. The learning and teaching of school algebra. In: *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics — 1992*, Washington DC, NCTM, 1992.

MASON, J. et alii. *Routes to, Roots of Algebra*. Scotland, Open University Press, 1988.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. & MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? In: *Pro-Posições*, v. 3, nº 1 (7): 39-54, 1992.

MILTON, K. Fostering algebraic thinking in children. In: *The Australian Mathematics Teacher*, *45* (4): 14-16, 1989.

PEGG, J. & REDDEN, E. From number patterns to algebra: the important link. In: *The Australian Mathematics Teacher*, *46* (2): 19-22, 1990.
PIAGET, J. & GARCIA, R. *Psicogénese e História das Ciências*. Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1987.
QUEYSANNE, M. & DELACHET, A. *A Álgebra Moderna*. São Paulo, Difusão Européia do Livro, 1956.
RASHED, R. *Entre Arithmétique et Algèbre - Recherches sur l'Histoire des Mathématiques Arabes*. Paris, Les Belles Lettres, 1984.
SMITH, D. E. *History of Mathematics*. New York, Dover Publications Inc., s. d., v. II.
STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa, Gradiva, 1989.
WHEELER, D. Awareness of algebra. In: *Mathematics Teaching*, (96): 29-34, 1981.

Resumo O propósito deste artigo é levantar alguns elementos que possibilitem um repensar a educação algébrica elementar em nosso país. Faremos isso a partir de uma análise comparativa entre as concepções de educação algébrica que se manifestaram ao longo da história do ensino da Matemática e as concepções de álgebra subjacentes às leituras mais freqüentes do desenvolvimento histórico desse campo do conhecimento matemático.

Palavras-chaves: Educação Matemática, educação algébrica elementar, história da educação algébrica elementar, concepções de Álgebra.

Abstract The purpose of this paper is to provide elements for rethinking elementary algebraic education. We will attempt this through a comparative analysis between algebraic education conceptions that were revealed along the history of mathematical education and algebra conceptions underlying the most frequent readings of the historical development of this field of mathematical knowledge.

Descriptors: Mathematical education, elementary algebraic education, history of elementary algebraic education, Algebra conceptions.