doi: 10.20396/rfe.v10i3.8653649

Números transfinitos e transreais: um diálogo com a ontologia de Santo Tomás de Aquino

Walter Gomide [1]

Resumo

Neste artigo, procuro mostrar como a teoria dos números transfinitos de Cantor e a teoria dos números transreais admitem ser compreendidas filosoficamente a partir de alguns conceitos da metafísica tomista. Para que tal entendimento seja possível, admito a tese de que os conceitos tomistas de matéria designada, não-designada e prima podem ser relacionados com as noções cantorianas de número ordinal e cardinal transfinitos e com o número "nullity", da teoria dos números transreais, respectivamente. Com tal correlação, creio estabelecer uma base dialógica entre a ontologia tomista e a matemática do infinito e do indeterminado.

Palavras-chave: Transfinito – Ordinal – Cardinal – Metafísica Tomista – Nullity.

Resumen

En este artículo, procuro mostrar cómo la teoría de los números transfinitos de Cantor y la teoría de los números transreales admite ser comprendidos filosóficamente desde algunos conceptos de la metafísica tomista. Para que tal entendimiento sea posible, admito la tesis de que los conceptos tomistas de materia designada, no designada y prima pueden ser relacionados con las nociones cantorianas de número ordinal y cardinal transfinitos y con el número "nullity", de la teoría de los números transreales , respectivamente. Con tal correlación, creo establecer una base dialógica entre la ontología tomista y la matemática del infinito y de lo indeterminado.

Palabras clave: Transfinito - Ordinal - Cardinal - Metafísica Tomista - Nullity.

1) O infinito e seu tratamento matemático na teoria cantoriana de conjuntos.

[1] Doutorado em Filosofia pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Pós-doutor em fundamentos da matemática pela UFRJ-HCTE. Professor de Filosofia do Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Mato Grosso. *(UFMT). E-mail: waltergomide@yahoo.com*

Não há dúvida de que o infinito é um dos conceitos mais instigantes do pensamento ocidental. Pela sua própria natureza, essa noção dialoga ou encontra espaço tanto no discurso filosófico quanto no religioso ou teológico. De Anaximandro, com seu *apeiron*, às especulações escolásticas, em especial com Santo Tomás de Aquino, o infinito ocupa um lugar de destaque nas cosmologias e ontologias que o Ocidente apresentou na busca por uma compreensão ampla do mundo e de suas determinações causais. Assim sendo, pode-se afirmar que o infinito é, por excelência, um conceito estruturante da realidade vista em sua dimensão metafísica.

No entanto, mesmo sendo um dos conceitos filosóficos com mais força heurística, é na matemática que o Infinito encontrou seu *lugar natural* e, de fato, foi na obra de um matemático do século XIX, Georg Cantor – russo de formação alemã- , que o Infinito foi sistemática e detalhadamente tratado como uma noção aritmética; e esse tratamento aritmético do Infinito nos lança algumas luzes sobre as dimensões filosófica e teológica que, bem antes de Cantor, já eram decantadas pelos filósofos das tradições clássica ou cristã, isso para não mencionar os pensadores judaico, hindu ou islâmico, ou mesmo os trabalhos de Galileu Galilei, já na época moderna, sobre as características paradoxais do Infinito[2].

Os estudos de Cantor sobre o infinito, de forma sistemática, começaram com uma série de artigos em que propriedades de funções contínuas expandidas em séries de Fourier são analisadas e, com isso, características topológicas dos números reais são introduzidas. A partir desses estudos sobre funções expandidas em séries de Fourier, Cantor demonstra que há mais números reais do que números naturais, além de demonstrar que há a mesma quantidade de pontos em um segmento unitário de reta quanto em um espaço euclidiano de dimensões quaisquer[3].

Esses artigos de Cantor sobre as funções contínuas expandidas em séries de Fourier começaram em 1870, e em 1883 foi publicado o artigo intitulado

[2] Um interessante livro sobre a temática do Infinito é CLEGG, B (2003): *A Brief History of Infinite. The Quest to Think the Unthinkable.* Robinson, London.

[3] Sobre os trabalhos de Cantor sobre as funções expandidas em séries de Fourier, ver GOMIDE, W (2006). pp15-45

*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehr*e, considerado o primeiro trabalho de Cantor inteiramente dedicado a um estudo sistemático do Infinito a partir de um enfoque na teoria dos conjuntos. Nessa obra, Cantor apresenta as noções de número ordinal e cardinal (potência) e, a partir desses conceitos, aborda o infinito sob o prisma de sua estrutura de ordem e de seu tamanho[4].

Primeiramente, antes de abordar o tema do infinito de forma específica, Cantor apresenta a sua definição de agregado ou de multiplicidade como sendo uma coleção de objetos distintos entre si situada em nosso pensamento[5]. Assim, uma vez considerando um agregado, a inteligência ou pensamento pode avalia-lo de forma ordinal ou cardinal. Se abstrairmos a natureza dos objetos constitutivos da coleção em questão, então obteremos a estrutura ordinal do agregado, o que implica que as interrelações entre os objetos da coleção, já desconsiderados quanto à sua natureza, são privilegiadas e nos dão a ordem ou estrutura ordinal do agregado. É sob tal perspectiva que o agregado, se for um conjunto bem ordenado, pode ser avaliado como uma sequência em que faz sentido falarmos de um primeiro elemento do conjunto, um segundo, um terceiro, etc. Assim, dado um agregado qualquer M, então o número ou tipo ordinal de M é dado por uma primeira operação de abstração sobre M que denotaremos de M^*, isto é:

$$M^* = Ord\, M$$

Uma vez de posse da estrutura ordinal de M, o pensamento efetua uma segunda abstração e chega ao número cardinal de M que nos dá os aspectos puramente quantitativos do agregado. De certo modo, o número cardinal ou potência de um agregado apresenta, por assim dizer, o tamanho do agregado; e esse tamanho nos é dado pela justaposição das puras unidades

[4] Ver CANTOR, G. Cantor´s *Grundlagen*. In: EWALD, W. ed. *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Volume I, Clarendon Press University, [1999].

[5] Sobre a noção de agregado, ver também a primeira seção de CANTOR, G. ¨Beiträge zur Begrundung der Transfiniten Lehre”. *Contributions to the Founding of Transfinite Numbers I.* Dover Publications, New York, [1941]

do agregado agora visto como destituído de quaisquer interrelações de ordem entre os seus elementos. Temos assim:

$$M^{**} = Card\ M$$

A noção de cardinalidade apresenta os conjuntos vistos como entes matemáticos ao quais se associa uma quantidade – o seu tamanho aritmético – e, por conta disso, é a partir do conceito de número cardinal que podemos estabelecer relações de grandeza entre os conjuntos, como “ser maior”, “ser menor” ou “ser igual”. Em outras palavras, a hierarquização dos conjuntos quanto aos seus tamanhos se dá por intermédio da noção de número cardinal.

No âmbito dos conjuntos finitos, a distinção entre números ordinal ou cardinal tem pouca efetividade. Na realidade, afirmar que o resultado de uma contagem foi dois, por exemplo, apenas informa que o conjunto contado é uma dupla, pouco interessando a ordem em que os elementos dessa dupla apareceram: tanto faz se a dupla é dada como $\{a,b\}$ ou $\{b,a\}$, o número ordinal ou cardinal dessa dupla é a reunião de duas unidades abstratas u_1 e u_2, a saber:

$$Ord\ \{a, b\} = \{a, b\}^* = Card\ \{a, b\} = \{a,b\}^{**} = Ord\ \{b,a\} = \{b,a\}^* = Card\ \{b,a\} = \{b,a\}^{**} = \{u_1, u_2\}$$

As unidades abstratas em questão apenas posicionam os elementos da dupla quanto ao ato de contar, indicando o primeiro e o segundo elementos da contagem, *independentemente de quais sejam esses.* E, dessa forma, a ordem abstrata de apresentação de um conjunto finito acaba se coincidindo com seu tamanho. Assim sendo, para fins puramente aritméticos, há uma equivalência entre números ordinal e cardinal quando tratamos de conjuntos finitos.

Obviamente, a distinção filosófica de fundo entre ordinalidade e cardinalidade, e *não à aritmética ou operacional*, persiste no domínio do finito, posto que se trata da diferenciação mais básica ou metafísica entre sequenciar os elementos de um conjunto ou apenas tomar tais elementos reunidos para se ter uma grandeza, um *tamanho*, uma quantidade.

Se no domínio dos conjuntos finitos a distinção entre números ordinal ou cardinal não se mostra efetiva no âmbito operacional, o caso é completamente distinto no âmbito dos conjuntos infinitos. E para ilustrar como a diferença entre ordinalidade e cardinalidade é marcante no infinito, vamos considerar a análise que Cantor faz do mais básico de todos os infinitos, o infinito enumerável.

Primeiramente, é digno de nota que a definição que Cantor faz de conjunto infinito é a mesma utilizada por Bolzano e Dedekind, na segunda metade do século XIX, e que é a base para a constatação de Galileu Galilei, no século XVII, de que o infinito é uma grandeza matemática paradoxal. A saber:

Um conjunto é infinito se, e somente se, existir uma parte própria desse conjunto que admita uma correspondência bijetiva com o conjunto em questão

Em termos matemáticos, podemos definir a infinitude de um conjunto *X* da forma seguinte:

$$Inf\,X \leftrightarrow (\exists Y)\,[\,Y \subset X \;\wedge\; \exists f\,(\,Sobf \;\wedge\; (\mathbf{1\text{-}1})f \;\wedge\; f(Y) = X)].$$

A expressão acima nos diz que há um subconjunto próprio *Y* de *X* – isto é, um subconjunto *Y* de *X* cujos elementos, obviamente, são elementos de *X*, mas há elementos de *X* que não são elementos de *Y*- e uma função *f* que é bijetiva – isto é, é ao mesmo tempo “sobrejetora” e “injetiva”- e que, portanto, “emparelha” ou “coloca lado a lado” todos os elementos de *Y* com os elementos de *X*. Claramente, a existência dessa bijeção é impossível caso *X* seja finito. Entretanto, é a propriedade distintiva dos conjuntos infinitos em relação aos conjuntos finitos. E é essa propriedade que foi utilizada por Galileu ao apresentar o caráter paradoxal dos conjuntos infinitos, uma vez que, com essa caracterização, os conjuntos infinitos deixam de obedecer ao axioma de Euclides, segundo o qual o *todo é sempre maior que as partes.*

De fato, Galileu demonstrou que o conjunto dos números naturais admite ser emparelhado com seu subconjunto próprio dos números quadrados: *para todo número natural n é possível "emparelha-lo" como o seu quadrado* n^2. Mas é óbvio que o conjunto dos números quadrados são um subconjunto próprio dos números naturais, e mesmo sendo aqueles *menores* que esses, há a mesma quantidade de números nos dois conjuntos, como demonstra o emparelhamento[6].

Uma vez que matematicamente o infinito tenha sido definido, cabe a Cantor analisar o conjunto ℕ dos números naturais em seus aspectos estruturais. Sob o ponto de vista ordinal, o conjunto ℕ é o *arquétipo* de uma sequência, e o número relacionado a essa disposição ordinal dos naturais é ω_0, o primeiro ordinal transfinito, isto é:

$$\mathbb{N}^* \ = \ Ord\,(\mathbb{N}) \ = \ \omega_0.$$

Para melhor compreendermos o que é o número ordinal ω, consideremos o seguinte conjunto infinito de relações que nos dá a configuração de ordem "normal" que se verifica entre os números naturais, isto é, aquela que se obtêm uma vez que os números naturais sejam construídos a partir de adições sucessivas da unidade ao primeiro número natural, o um:

$$1 < 2 < 3 < \ldots < m < m+1 < \ldots$$

Essa é a ordem "normal" presente nos números naturais. Se abstrairmos agora a natureza dos elementos de ℕ, obteremos então essa relação de ordem de maneira "pura", de tal forma que os números naturais deixam de ser avaliados como agregados de unidades e passam a ser considerados como "*posições*" abstratas no conjunto dos naturais: o *um* passa a ser o *primeiro*; o dois, o *segundo*; o três, o *terceiro*; etc. Temos assim que o número ω_0 representa o conjunto das puras posições

[6] Ver PARKER, M. (2008). *Philosophical Method and Galileo´s Paradox.* http://philsci-archive.pitt.edu/4276/

relacionais entre os números naturais, o que lhe dá o *status* de *forma*, de padrão estrutural, de qualquer sequência. Portanto, podemos afirmar:

$$\mathbb{N}^* = Ord(\mathbb{N}) = \omega_0 \leftrightarrow a_1 < a_{2.} < a_3 < \ldots < a_m < a_{m+1} < \ldots$$

Na expressão acima, os números a_j são "puras posições" no conjunto dos naturais e, como tais, não representam agregados ordinais ou cardinais. Dessa maneira, a_k é a k-ésima posição na *sequência* dos números naturais, e não um agregado com k unidades.

Sob o ponto de vista aritmético, o comportamento de ω_0 é bem extravagante em relação ao que é esperado no âmbito dos números finitos. Por exemplo, a comutatividade da adição não vale quando uma das parcelas a ser adicionadas é ω_0, isto é:

$$\omega_0 + m \neq m + \omega_0,$$

sendo m um número finito.

Quanto ao seu tamanho considerado em si mesmo, os números naturais são representados por seu número cardinal $\mathbb{N}^{**} = Card(\mathbb{N})$, denominado por Cantor como $\aleph_0$. De fato, $\aleph_0$ é o número transfinito – o primeiro deles – associado a qualquer conjunto que tenha o mesmo número de elementos que têm os números naturais: o cardinal $\aleph_0$, o *alef zero*, é o ente matemático que expressa o tamanho dos conjuntos infinitos e *enumeráveis*, isto é, conjuntos infinitos que podem ser bijetivamente relacionados aos números naturais.

Estruturalmente, $\aleph_0$ é um conjunto de "unidades ou posições abstratas" entre as quais as relações de ordem foram eliminadas ou abstraídas. Assim sendo, a diferenciação entre as unidades ou posições abstratas não se faz por meio da relações de ordem, dado que essas “desapareceram”, mas sim através de interrelações posicionais: o cardinal $\aleph_0$, portanto, se assemelha a um espaço infinito e discreto, em que seus pontos são as unidades ou posições abstratas relacionadas entre si por meio de um “especial tipo de relação espaço”[7]; chamemos essa de *xLy*.

Assim, considerado somente sob o ponto de vista da cardinalidade, o conjunto dos números naturais se reduz às suas configurações espacias *xLy*, as quais apontam, *idealmente*, a todas as configurações posicionais possíveis entre *x* e *y* (ver nota 6). Dessa forma, podemos afirmar o seguinte:

$$\mathbb{N}^{**} = Card\,(\mathbb{N}) = \aleph_0 \leftrightarrow u_1 L\, u_2\, L\, u_3 \ldots u_m L\, u_{m+1} \ldots$$

Dessa maneira, podemos considerar o cardinal $\aleph_0$ como um espaço composto de uma quantidade enumerável de posições, e nesse espaço estão dadas potencialmente todas as interrelações entre elas: é como se o cardinal em questão compusesse, em sentido leibniziano, um espaço *metafísico* de relações.

As leis que regem o comportamento de $\aleph_0$ também não se coadunam com o que é esperado no âmbito do finito. De fato, para os cardinais transfinitos, cujo primeiro termo da sequência $\aleph_0$, a adição de uma unidade não gera um número diferente, como é o caso da adição com números finitos. Por exemplo, se adicionarmos a unidade a $\aleph_0$, então o resultado será $\aleph_0$, isto é:

$$\aleph_0 + 1 = 1 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Fica claro, pelo o que foi expresso acima, que quando tratamos de conjuntos infinitos há uma diferença aritmética e operacional entre os

7 A concepção de espaço subjacente à noção de número cardinal não é física, mas metafísica, e se assemelha com a visão de Leibniz de que o espaço é um sistema de relações que nos dá as possibilidades posicionais dos objetos. Ver ARTHUR R.T.W (2013). https://www.humanities.mcmaster.ca/~rarthur/papers/Leibniz.Space6.pdf

infinitos ordinal e cardinal. No caso dos números naturais $\mathbb{N}$, o seu representante ordinal ω_0 não obedece à lei da comutatividade, posto que

$$\omega_0 + m \neq m + \omega_0,$$

Ao passo que o representante cardinal dos números naturais, $\aleph_0$, satisfaz a tal lei, dado que:

$$\aleph_0 + m = m + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Assim, a distinção entre ordinalidade e cardinalidade, que na esfera dos conjuntos finitos não se mostra de forma efetiva, é patente na aritmética dos conjuntos infinitos.

2) Aspectos filosóficos da teoria cantoriana de conjuntos: conjuntos bem-ordenados e a metafísica tomista.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ são um exemplo de conjunto bem ordenado, isto é, conjuntos em que todo subconjunto tem um primeiro elemento. Sendo assim, podemos dizer que tal propriedade dos conjuntos bem ordenados são a *forma* desses conjuntos, e podemos dizer que essa propriedade[8], que denominaremos de λxDx, é a essência da boa ordenação ou, conforme a terminologia da Ontologia de Santo Tomás de Aquino, constitui a *forma substancial da boa ordenação*[9].

Consideremos agora o quadro referencial da Ontologia Tomista e como ela pode se relacionar com os números naturais entendidos à luz da teoria cantoriana dos conjuntos.

[8] Formalmente, um conjunto S é bem ordenado caso satisfaça à seguinte condição:

$$(\forall X)[\,(X \subset S \wedge X \neq \varnothing) \rightarrow (\exists! y_{\in S})(y \in X \wedge (\forall z_{\in S})(z \in X \rightarrow y \leq z))]$$

A formula acima nos diz, em linguagem lógica, que todo subconjunto não-vazio de S tem um menor elemento.

[9] Sobre a ontologia de Santo Tomás de Aquino, ver HUGHES, P. (1993). *Aquina´s Principle of Individuation*. https://digitalcommons.denison.edu/episteme/vol2/iss1/7/

Em Santo Tomás de Aquino, as formas substanciais são as propriedades comuns a vários indivíduos da mesma espécie ou tipo. Os indivíduos, por sua vez, se diferenciem uns dos outros dentro de seus domínios específicos por força do princípio de individuação que Santo Tomás de Aquino identifica com a matéria assinalada (*materia signata*)[10]. Cabe então agora a seguinte questão: se admitirmos que a ontologia tomista e suas distinções conceituais se aplicam à aritmética cantoriana, que conceito dessa teoria fará o papel de princípio de individuação ou de matéria assinalada?

Primeiramente, para responder a essa questão, assumamos a tese de que os agregados com suas configurações de ordem, na teoria dos conjuntos de Cantor, desempenham o papel de indivíduos ou de substâncias primeiras na metafísica tomista. Sendo assim, um agregado infinito e enumerável K**,** *bem ordenado*, é um *indivíduo* composto de elementos k, de forma substancial λxDx e de matéria assinalada σ_K,

$$K = < \lambda xDx \,;\; \sigma_K \,;\; k >$$

Uma vez que sabemos que K é composto dos elementos k e é bem ordenado, para que determinemos K como um indivíduo, devemos determinar que tipo de boa ordem possui K, e a especificação dessa boa ordem nos dará a matéria assinalada σ_K. De fato, na teoria de Cantor, um conjunto bem ordenado, infinito e enumerável pode ter números ordinais dos mais variados tipos, tais como:

ω_0;

$\omega_0 + n, \;\; n \in \mathbb{N}$;

$\omega_0 . 2$;

$\omega_0 . 2 + n, \; n \in \mathbb{N}$;

.

$\omega_0{}^2$;

.etc

[10] Ver HUGHES, (1993), p.56

Portanto, enquanto não especificamos que número ordinal transfinito é associado ao conjunto *K*, esse não está individuado, o que é equivalente à tese de que a matéria assinalada de *K* é seu número ordinal, isto é:

$$\sigma_K = Ord\,(K).$$

Por conseguinte, ao realizarmos a primeira abstração sobre *K*, obteremos a matéria assinalada de *K* ou o seu número ordinal $K^* = Ord\,(K)$, princípio de individuação de *K*.

Se realizarmos agora sobre *K* uma segunda abstração, obteremos o número cardinal $K^{**} = Card\,(K)$, que na metafísica tomista pode ser relacionado à *matéria não-assinalada* de *K*. Isso porque, segundo a ontologia tomista, as substâncias primeiras ou os indivíduos possuem a matéria assinalada que permite a diferenciação ou a individuação dos termos de uma espécie. Além da matéria assinalada, enquanto partícipes de uma espécie ou tipo também possuem a matéria não-assinalada (*matéria communis*), que é o elemento material comum a todos os membros desse conjunto específico. Assim, todo conjunto bem ordenado, infinito e enumerável possui número cardinal igual a $\aleph_0$, *a matéria comum a tais conjuntos.* Denominando a matéria não assinalada do conjunto *K* de Σ_k, temos que:

$$K^{**} = \sigma_K{}^* = Card\,(K) = \Sigma_k, = \aleph_0$$

Entretanto, a ontologia tomista não para nos conceitos de matéria assinalada e não assinalada: há também a matéria prima (*matéria prima*), matéria comum a todos os indivíduos, e que não possui nenhuma determinação e que só existe em pura potência, mas não em ato. Cabe então a pergunta: qual número da teoria cantoriana, *se é que exista algum*, poderia ser associado a essa matéria prima, a essa pura potência ontológica?

Se partirmos da intuição fundamental de que a operação de abstração gradativamente aplicada aos conjuntos, entes matemáticos individuados, nos leva do mais determinado ao menos determinado, do mais individuado ao menos individuados, então a matéria prima estará relacionada a uma terceira operação de abstração aplicada aos conjuntos. Assim, em relação ao supracitado conjunto K, a matéria prima desse conjunto será obtida pela operação K^{***}: nesse novo conjunto, *nenhuma relação estrutural existe* e, como tal, nenhuma unidade abstrata pode ser identificada em K^{***}. Denominando K^{***} de $\oplus(K)$, temos então:

$$K^{***} = Card\,(K)^{*} = Ord\,(K)^{**} = \aleph_0{}^{*} = \omega_0{}^{*} = \oplus(K)$$

Obviamente, $K^{***} = \oplus(K)$ *não é* um cardinal transfinito e nem um ordinal transfinito. Em outras palavras: o número $\oplus(K)$, apesar de ser definido com os instrumentos da aritmética transfinita de Cantor, não é um número transfinito. Fato análogo ocorre com a unidade imaginária complexa $i = \sqrt{-1}$: a unidade imaginária é definida com operações definidas nos números reais, mas não é um número real, mas sim um número complexo, um novo campo numérico aberto pela introdução *consistente* dessa unidade imaginária no âmbito dos números reais.

$\oplus(K)$, portanto, transcende o campo dos números transfinitos e, para encontrarmos qual número admite ser relacionado a $\oplus(K)$, temos de sair da aritmética transfinita e buscar uma outra aritmética em que haja algo análogo ou equivalente a $\oplus(K)$. Uma vez que $\oplus(K)$ é caracterizado com um conjunto não-finito em que não há nenhuma relação estrutural entre seus elementos, o que implica na não-presença de unidades internas separáveis por qualquer tipo de relação, o candidato provável a ser o representante matemático da matéria prima tomista deve ser um número que, vista sob o ponto de vista conjuntístico, se assemelha a um todo indiferenciado de elementos; e esse número existe na aritmética transreal, criada pelo cientista da computação inglês James A.D.W. Anderson, e se chama “nullity”; seu símbolo é Φ e é definido *de maneira extravagante c*omo 0/0.

3) O número transreal “nullity” como representante matemático da matéria prima tomista.

Os números transreais $\mathbb{R}^T$ foram criados por James A.D.W. Anderson, cientista da computação inglês, por volta de 1997[11]. Tais números consistem em uma extensão dos números reais $\mathbb{R}$ na qual é permitida a divisão por zero. Tal divisão, interditada no âmbito dos números reais, permite a introdução de três novos números, a saber:

a) 1/0 = ∞;

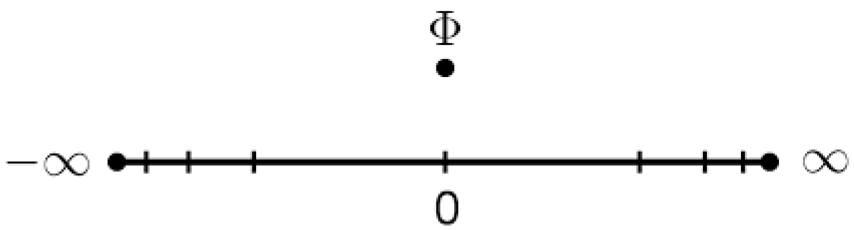
b) -1/0 = -∞;

c) 0/0 = Φ.

Dessa forma, os números transreais $\mathbb{R}^T$ podem ser definido da forma seguinte:

$$\mathbb{R}^T = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty, \Phi\},$$

e sua representação pictórica é a seguinte:



Na representação acima, a linha dividida por zero no centro médio representa os números reais , os quais se estendem à esquerda para -∞ e à direita para ∞; por sua vez, “nullity”, 0/0, não está posicionado na reta, o que indica o tipo de relação de ordem presente nos transreais. De fato, para qualquer número real r, as relações

$$(r < \infty) \text{ e } (-\infty < r)$$

se verificam.

[11] Sobre os números transreais, ver ANDERSON, J, GOMIDE, W. & DOS REIS, T (2016). "Construction of the Transreal Numbers and Algebraic Transfields" IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol. 46, no. 1, pp. 11-23, 2016.

Obviamente, a relação $-\infty < \infty$ também é verdadeira em $\mathbb{R}^T$.

No caso de "nullity" Φ, como sugerido pela figura acima, valem os seguintes enunciados:

d) para qualquer número transreal *t*, temos que $(t \nless \Phi)$ e $(t \ngtr \Phi)$.

Isto é, "nullity" é um número não comparável quanto à grandeza com nenhum número transreal. Dito de outro modo, podemos afirmar que "nullity" *não tem tamanho* e, por conta disso, não *tem também um número cardinal bem definido.*

Alguns resultados da aritmética transreal indicam a similaridade do infinito positivo com $\aleph_0$ e o comportamento peculiar de "nullity", um comportamento que faz com que tal número possa ser identificado com as situações que a aritmética dos números reais costuma denominar de *indeterminadas.* Vejamos:

e) $\infty + n, n \in \mathbb{N} = \infty$;

f) $\infty + \infty = \infty$;

g) $\infty/\infty = \Phi$;

h) $\infty - \infty = \Phi$;

i) $\Phi + n, n \in \mathbb{N} = \Phi$

j) $\Phi + \infty = \Phi$;

k) $\Phi - \infty = \Phi$;

l) $\Phi - \Phi = \Phi$.

De fato, nullity pode ser associado ao indeterminado uma vez que admite ser compreendido como a *superposição indiferenciada* de todos os números reais. Como é sabido, a expressão 0/0 é indeterminada nos números reais. Isso porque, se admitirmos a existência de um número real ε tal que

m) $\varepsilon = 0/0$,

então se segue que

n) $\varepsilon . 0 = 0$.

Mas qualquer número real *r* satisfaz a equação acima, o que implica que ε pode ser qualquer número real, sendo, portanto, um *número matemático indeterminado*, o que quebra o esperado comportamento funcional da divisão em $\mathbb{R}$. Por quebrar o caráter funcional da divisão nos reais, a hipótese de haver um número real que seja o resultado de 0/0 está interditada, uma vez que tal hipótese leva a uma contradição com o comportamento da divisão com os números reais.

Para que a divisão com denominador nulo pudesse ser introduzida sem contradição nos transreais, o conceito de divisão foi redefinido de tal forma que, quando aplicada a números reais, um subconjunto de $\mathbb{R}^T$, o seu significado seja o usual e, com isso, nenhuma inconsistência é obtida. Uma situação análoga acontece nos números complexos $\mathbb{C}$: o conceito de radiação é redefinido de tal forma a permitir a existência de raízes quadradas de números negativos, sem que, com isso, qualquer contradição seja obtida entre esse novo sentido de radiação e o antigo válido nos reais, um subconjunto de $\mathbb{C}$, em que é interditado a radiação de números negativos.

Dessa maneira, sem nenhuma contradição nos números transreais, podemos falar de números perfeitamente bem definidos a partir de frações com denominadores nulos, e “nullity” é um desses números. Entretanto, o contexto de origem de “nullity” foi o dos números reais, onde ele representa o indeterminado, o que tem referência equívoca. De fato, a expressão 0/0 *aponta* para todos os números reais simultaneamente e, como tal, não existe como número real bem definido. Entretanto, nos transreais, 0/0 *é* um número bem definido, e podemos considerá-lo como a s*uperposição* de todos os números reais, em que a superposição pode ser vista como uma operação conjuntística que gera conjuntos infinitos cujos elementos não *estão diferenciados uns dos outros*[12].

[12] A operação de superposição é pensada de tal forma que, de conjuntos bem definidos, geramos agregados em que a relação de discernibilidade entre seus elementos não se

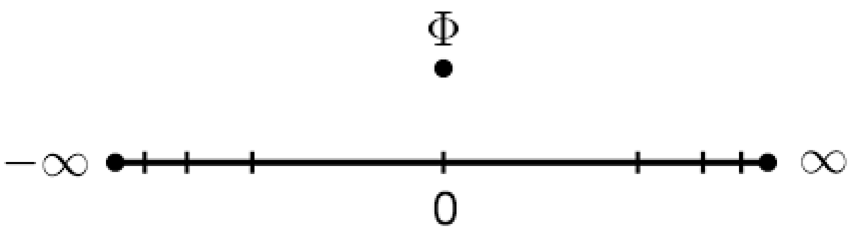
Denominando a operação de superposição de Θ, então temos:

o) $\Phi = 0/0 = \Theta\mathbb{R}$

E, assim, “nullity” não seria um número comum no sentido de sua grandeza: pelo fato de não possuir unidades separadas, posto que é a superposição de todos os números reais, “nullity” não pode ser comparado quanto ao seu tamanho, uma vez que a comparação quanto ao tamanho pressupõe a operação de bijeção entre os conjuntos comparados, e esse operação se fundamenta na existência de unidades separadas que possam ser “emparelhadas”; tal possibilidade de emparelhamento de unidades está descartada para nullity.

Tomando nullity como superposição de todos os números reais, na representação pictórica dos números transreais, o ponto em nullity, situado acima da reta dos reais extendidos $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, se identifica com o *colapso* de todos os números reais: todos os números reais estão indiferenciados e amalgamados em *nullity*:

$$\boldsymbol{\Phi = \Theta\mathbb{R}}$$



Cabe agora fazer a pergunta: qual a estrutura interna do conjunto **Φ = ΘR**? Sendo um todo indiferenciado de elementos, de números reais, o conjunto relacionado a nullity não tem nem um número ordinal e nem um

verifique necessariamente. Uma teoria de conjuntos onde isso é possível é a teoria dos quase-conjuntos, criada pelos lógicos brasileiros Décio Krause e Newton da Costa. Ver DA COSTA, N.C.A e KRAUSE, D: *Logical and Philosophical Remarks On Quasi Set Theory.* IN: http://philsci-archive.pitt.edu/3274/1/CosKra_LogicQsets.pdf número cardinal bem definidos, uma vez considerando que os conceitos de ordinalidade e de cardinalidade se esgotam na teoria cantoriana dos números transfinitos. Dito de outro modo: nenhum número ordinal ou cardinal definido na teoria dos números transfinitos pode ser associado a “nullity”. Entretanto, a idéia de que uma terceira abstração pode ser introduzida no âmbito da teoria cantoriana dos conjuntos, a qual foi relacionada com a *matéria prima* dos conjuntos enumeráveis e bem ordenados, sugere que “nullity” possa ser relacionada a uma terceira abstração sobre os números reais $\mathbb{R}$, isto é:

$$\mathbb{R}^* = Ord(\mathbb{R});\ \mathbb{R}^{**} = Ord(\mathbb{R})^* = c;\ \mathbb{R}^{***} = c^* = \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Theta}\mathbb{R} = \oplus\mathbb{R}$$

Na expressão acima, *Ord* ($\mathbb{R}$) é o *tipo ordinal do contínuo*, denominado de λ, e c é o cardinal do contínuo, o qual é igual a $2^{\aleph_0}$.

Considerando agora um conjunto bem ordenado K, com número ordinal igual a σ_K (a matéria assinalada de K, segundo a metafísica tomista) e número cardinal igual a $\aleph_0$ (matéria não-assinalada de K), temos o seguinte:

$$K^* = Ord(K);\ K^{**} = Ord(K)^* = \aleph_0;\ K^{***} = \aleph_0^* = \Phi^1 = \Theta\mathbb{N} = \oplus\mathbb{N}$$

Assim, a *matéria prima* de K é igual a $\Phi^1 = \Theta\mathbb{N} = \oplus\mathbb{N}$.

Portanto, o conceito tomista de matéria prima encontra eco na matemática através da noção de *conjunto infinito em superposição*, cujo arquétipo matemático é o número transreal “nullity” $\Phi = 0/0$.

Para uma melhor definição do que seja um conjunto infinito em superposição, é necessária uma teoria dos conjuntos que lide com conjuntos infinitos com termos indistinguíveis; e tal teoria, como apontada na nota11, pode se identificar com a teoria dos *quasi*-conjuntos. E uma vez bem definida a operação de superposição, pode-se então responder a perguntas tais como se há uma identidade entre Φ e Φ^1.

Guiando-nos por intuições metafísicas decorrentes da avaliação do que é a matéria prima tomista, a resposta é sim: a matéria prima infinita é representada matematicamente por único conjunto; admitir que assim não o seja é postular que há duas matérias primas distintas, o que soa estranho ontologicamente.

Mas isso é assunto para uma outra oportunidade. Por enquanto, basta mostrar como conceitos metafísicos tradicionais, com a matéria na visão tomista, podem ser mapeados na matemática por meio da teoria dos números transfinitos e dos números transreais.

Referências Bibliográficas:

ANDERSON, J & DOS REIS, T. Construction of the Transcomplex numbers from the Complex Numbers. In *World Congress on Engineering and Computer Science 2014*, San Francisco, USA, 22-24 October 2014.

ANDERSON, J & DOS REIS, T. Transreal Calculus, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, v. 45, n. 1, p. 51-63, 2015.

ANDERSON, J. & DOS REIS, T. Transdifferential and Transintegral Calculus. *World Congress on Engineering and Computer Science 2014*, San Francisco, USA,22-24 October 2014, vol 1, pp. 92-96.

ANDERSON, J & DOS REIS, T. Transreal Limits and Elementary Functions. In Haeng Kon Kim; Mahyar A. Amouzegar; Sio-long Ao. Transactions on Engineering Technologies, *World Congress on Engineering and Computer Science 2014*. London: Springer, pp. 209-225, 2015.

ANDERSON & DOS REIS, T. Transreal Newtonian Physics Operates at Singularities. *Synesis*, vol. 7, no. 2, 2014.

ANDERSON, J & DOS REIS, T., Transreal Limits Expose Category Errors in IEEE 754 Floating-Point Arithmetic and in Mathematics. In *World Congress on Engineering and Computer Science 2014*, San Francisco, USA, 22-24 October 2014, vol 1, pp. 86-91.

ANDERSON, J, GOMIDE, W. & DOS REIS, T. Construction of the Transreal Numbers and Algebraic Transfields. *IAENG International Journal of Applied Mathematics,* vol. 46, no. 1, pp. 11-23, 2016.

ANDERSON, J & GOMIDE, W. Transreal Arithmetic as a Consistent Basis for Paraconsistent Logics. In *World Congress on Engineering and Computer Science 2014*, San Francisco, USA, 22-24 October 2014, vol 1, pp. 103-108.

ANDERSON, J, GOMIDE, W & DOS REIS, T. Transreal Logical Space of All Propositions. In Haeng Kon Kim; Mahyar A. Amouzegar; Sio-long Ao. Transactions on Engineering Technologies, *World Congress on Engineering and Computer Science 2014*. London: Springer, pp. 227-242, 2015.

ANDERSON, J, GOMIDE, W. & DOS REIS, T. Transreal Proof of the Existence of Universal Possible Worlds. Abstract in Handbook of the *5th World Congress and School on Universal Logic,* Instanbul, Turkey, pp. 324-324, June 25-30, 2015.

ARTHUR. R.T.W (2013). Disponível em. https://www.humanities.mcmaster.ca/~rarthur/papers/Leibniz.Space6.pdf

CANTOR, G. Beiträge zur Begrundung der Transfiniten Lehre. *Contributions to the Founding of Transfinite Numbers I.* Dover Publications, New York, 1941.

CANTOR, G. Cantor´s *Grundlagen*. In: EWALD, W. ed. *From Kant to Hilbert. ASource Book in the Foundations of Mathematics.* Volume I, Clarendon Press University, 1999.

CLEGG, B : *A Brief History of Infinite. The Quest to Think the Unthinkable.* Robinson, London, 2003.

DA COSTA, N.C.A e KRAUSE, D. *Logical and Philosophical Remarks On Quasi Set Theory. 2006*. Disponível em: http://philsci-archive.pitt.edu/3274/1/CosKra_LogicQsets.pdf

GOMIDE, W. *O Infinito Contado por Deus. Uma interpretação Dedekindiana do Conceito de Número Ordinal Transfinito de Cantor.* PUC-Rio, Rio de Janeiro. 2006.

HUGHES, P. *Aquina´s Principle of Individuation*. 1993. Disponível em, https://digitalcommons.denison.edu/episteme/vol2/iss1/7/

PARKER, M. *Philosophical Method and Galileo´s Paradox. 2008*. Disponível em http://philsci-archive.pitt.edu/4276/

Submetido em: 15/01/2018
Aceito em: 15/02/2018
Publicado em: 04/04/2018