



Correspondência aos Autores

¹ Roseli Alves de Moura
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ
E-mail: roselimatematica.moura@gmail.com
CV Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6534257267132676>

² Kelven Cleyton de Araujo Brandão
Centro Universitário FEI
E-mail: kelven.cleiton14@gmail.com CV Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3981813560355780>

Submetido: 13 out. 2023
Aceito: 13 mar. 2024
Publicado: 06 abr. 2024

 10.20396/riesup.v11i00.8674795
e-location: e025043

ISSN 2446-9424

Checkagem Antiplágio



Distribuído sobre



Sala de aula invertida e história da Matemática: legado de Fourier e cálculo em perspectiva

Roseli Alves de Moura¹  <https://orcid.org/0000-0002-8571-9668>

Kelven Cleyton de Araujo Brandão²  <https://orcid.org/0000-0002-3421-7094>

RESUMO

Objetivo: O presente trabalho objetiva estreitar o diálogo entre a matemática no ensino superior e a história da matemática, como forma de promover a construção de interfaces entre estes campos de saberes, elencando como temática o trabalho de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que consagrou-se em 1822 com a publicação da obra *Théorie analytique de la chaleur*. **Método:** Uma abordagem qualitativa, de cunho biográfico e com objetivos exploratórios envolvendo discentes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Engenharia em um Centro Universitário em São Paulo. Por meio de atividades e revisão de literaturas, adotamos a metodologia de ensino de Sala de Aula Invertida e uma abordagem sob o viés da “história”, ancoradas por Grattan-Guinness. **Resultados:** Consideramos o legado do personagem Fourier, tido como fundamental na discussão sobre a redefinição do conceito de função, ao extrapolar conceitos matemáticos que estavam enraizados na sociedade acadêmica nos oitocentos. O protagonismo dos estudantes e o tempo ganho em sala de aula para discussões acerca do conteúdo Séries de Fourier, revelou-se decorrente da metodologia adotada em permanente diálogo com a abordagem histórica. O arcabouço teórico trazido pelos estudantes – representados pela maioria das referências bibliográficas utilizadas neste relato, traz indícios de amadurecimento, favorecendo possibilidades de desdobramentos em experimentos didáticos futuros. **Conclusão:** Atualmente, as inúmeras aplicações dos estudos de Fourier encontram-se presentes, explícita ou implicitamente, em diversas áreas no âmbito das engenharias, alcançando as nossas vidas de forma inexorável, transcendendo muitas vezes, a mera aplicação de tecnologia.

PALAVRAS-CHAVE

Ensino superior. História da Matemática. Séries de Fourier. Sala de aula invertida. Metodologias ativas.

Flipped classroom and the history of Mathematics: Fourier's legacy and calculus in perspective

ABSTRACT

Objective: The present work aims to strengthen the dialogue between mathematics in higher education and the history of mathematics, as a way of promoting the construction of interfaces between these fields of knowledge, listing as its theme the work of Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), which was established in 1822 with the publication of the work *Théorie analytique de la chaleur*. **Method:** A qualitative approach, of a biographical nature and with exploratory objectives involving students of the Differential and Integral Calculus discipline in an Engineering course at a University Center in São Paulo. Through activities and literature review, we adopted the Flipped Classroom teaching methodology and an approach from a “history” perspective, anchored by Grattan-Guinness. **Results:** We consider the legacy of the character Fourier, considered fundamental in the discussion about the redefinition of the concept of function, by extrapolating mathematical concepts that were rooted in academic society in the 1800s. The protagonism of students and the time gained in the classroom for discussions about the Fourier Series content proved to be a result of the methodology adopted in permanent dialogue with the historical approach. The theoretical framework brought by the students – represented by the majority of bibliographic references used in this report, brings signs of maturity, favoring possibilities for developments in future didactic experiments. **Conclusion:** Currently, the countless applications of Fourier's studies are present, explicitly or implicitly, in several areas within the scope of engineering, reaching our lives in an inexorable way, often transcending the mere application of technology.

KEYWORDS

University education. History of Mathematics. Fourier series. Flipped classroom. Active methodologies.

El aula invertida y la historia de las Matemáticas: el legado de Fourier y el cálculo en perspectiva

RESUMEN

Objetivo: El presente trabajo tiene como objetivo fortalecer el diálogo entre las matemáticas en la educación superior y la historia de las matemáticas, como una forma de promover la construcción de interfaces entre estos campos del conocimiento, teniendo como tema la obra de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 -1830), que se estableció en 1822 con la publicación de la obra *Théorie analytique de la chaleur*. **Método:** Un enfoque cualitativo, de carácter biográfico y con objetivos exploratorios que involucra a estudiantes de la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de un curso de Ingeniería en un Centro Universitario de São Paulo. A través de actividades y revisión de literatura, adoptamos la metodología de enseñanza Flipped Classroom y un enfoque desde una perspectiva de “historia”, anclada en Grattan-Guinness. **Resultados:** Consideramos el legado del personaje Fourier, considerado fundamental en la discusión sobre la redefinición del concepto de función, al extrapolar conceptos matemáticos que estaban arraigados en la sociedad académica del siglo XIX. El protagonismo de los estudiantes y el tiempo ganado en el aula para discusiones sobre los contenidos de la Serie Fourier resultaron ser resultado de la metodología adoptada en diálogo permanente con el enfoque histórico. El marco teórico aportado por los estudiantes – representado por la mayoría de las referencias bibliográficas utilizadas en este informe, trae signos de madurez, favoreciendo posibilidades de desarrollo en futuras experiencias didácticas. **Conclusión:** Actualmente, las innumerables aplicaciones de los estudios de Fourier están presentes, explícita o implícitamente, en varias áreas dentro del ámbito de la ingeniería, llegando a nuestras vidas de manera inexorable, trascendiendo muchas veces a la mera aplicación de la tecnología.

PALABRAS CLAVE

Enseñanza superior. Historia de las Matemáticas. Series de Fourier. Aula invertida. Metodologías activas.

CRedit

- **Reconhecimentos:** Ao Centro Universitário FEI - Iniciação Científica
- **Financiamento:** Centro Universitário FEI - Modalidade Iniciação Científica
- **Conflitos de interesse:** Os autores certificam que não têm interesse comercial ou associativo que represente um conflito de interesses em relação ao manuscrito.
- **Aprovação ética:** Não aplicável
- **Disponibilidade de dados e material:** Não aplicável
- **Contribuições dos autores:** Conceitualização, Aquisição de financiamento, Metodologia, Administração do Projeto, Supervisão, Validação, Escrita – revisão & edição. Moura, R. A.; Curadoria de dados, Análise formal, Investigação, Visualização, Escrita - Rascunho original. Brandão, K. C. A.

1 Introdução

Nas últimas décadas o debate em torno do processo de ensino e aprendizagem de matemática tem ganhado força, sobretudo em relação à utilização de metodologias alternativas no ambiente educacional. Temos observado tentativas de aproximação entre a prática do ensino de ciências e abordagem de aspectos da história e da filosofia das ciências, por diversos professores e pesquisadores da área, com alcance não restrito ao Ensino Básico.

D'Ambrosio (2011), aludindo a Felix Klein (1908), enfatiza que a filosofia e a história, mesmo que em detrimento do aprofundamento em técnicas de compreensão de diferentes conceitos matemáticos, devem ocupar uma posição de prioridade no ensino, em razão de que, estes últimos, podem ser hoje contemplados também, pelos meios digitais. Sobre isso, o estudioso acrescenta que “a transmissão desse conhecimento por meio do ensino, no ‘presente’, depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou e quais as principais motivações para o seu desenvolvimento, o que se aprende do ‘passado’, e quais as razões de sua presença nos currículos escolares, o que se justifica pela visão de ‘futuro’” (D'Ambrosio, 2011, p. 3).

Nessa direção, também, Matthews (1995, p. 165) destaca “o mar de falta de significação que se diz ter inundado as salas de aula de ciências, onde fórmulas e equações são recitadas sem que muitos cheguem a saber o que significam”. Atento à falta de respostas, ou receitas, para a crise do ensino contemporâneo de ciências, o estudioso acrescenta que algumas dificuldades seriam minimizadas, caso alguns conceitos científicos fossem abordados de forma mais dialogada aos campos de saberes e, vinculados, à história e filosofia das ciências.

Além disso, observa-se que, ao longo de um processo de investigação histórica, delega-se, especialmente ao professor, a responsabilidade de revelar aos estudantes o caráter essencialmente humano da ciência. No caso da história da matemática e de seus conceitos, que emergem sobretudo como fruto das necessidades humanas, há de se considerar que a constituição de tais conhecimentos “passaram por um processo de ressignificação que perpassou durante vários séculos, até culminar no modo que apresentamos e reconhecemos esses conceitos matemáticos atualmente” (Godoy; Leite, 2021, p.3), na grande maioria das situações.

Frente a tais perspectivas, detendo-nos especificamente em cursos de engenharia e, ao longo do processo de construção do conhecimento do ensino acadêmico, observamos que o primeiro contato com os trabalhos de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), por exemplo, acontece principalmente com a apresentação das séries de funções, que foram primordiais para o desenvolvimento da lei de propagação do calor no século XVIII. Atualmente tais descobertas têm se mostrado de considerável importância não somente no âmbito da matemática, mas também na física moderna, devido a inúmeras possibilidades de aplicações que advêm de tais conceitos, sobrepujando a proposta inicial do estudioso, na ocasião de seu desenvolvimento. Contudo, a abordagem deste conceito matemático tão relevante e seus desdobramentos acontece, frequentemente, de forma árida em sala de aula, e desvinculada de relevantes aspectos, em relação à sua construção histórica.

Mediante tais perspectivas, apresentaremos neste trabalho, alguns resultados de uma iniciação científica de cunho teórico, que reverberou à prática de sala de aula, viabilizada a partir de algumas dinâmicas, no interstício de um período acadêmico no ano de 2018 em um Centro Universitário no estado de São Paulo. Especificamente desenvolvida em uma turma de futuros engenheiros, buscamos estabelecer um diálogo entre o ensino de matemática e a história da matemática, como forma de suscitar discussões e promover a construção de interfaces entre tais campos de saberes.

Para tanto, elencamos como temática, o trabalho de Fourier, personagem tido como fundamental na discussão sobre a redefinição do conceito de função, ao extrapolar concepções matemáticas que estavam enraizadas na sociedade acadêmica do início do século XIX, a partir da elaboração dos estudos sobre a propagação do calor. Fundamentamos este trabalho considerando que a produção de significados de conceitos matemáticos está em estreita relação com o contexto profissional do curso de engenharia, no caso e, sob esta perspectiva, atentamos em destacar a investigação de alguns cenários históricos e caminhos percorridos, tanto por Fourier quanto por outros cientistas que o sucederam, mediante a perspectiva histórico-matemática, adentrando em outras ciências que sustentaram e impulsionaram o surgimento de uma gama de aplicações. Esta primeira etapa do trabalho está relacionada ao desenvolvimento teórico, fruto da Iniciação Científica.

Na segunda etapa, evidenciaremos o experimento em sala de aula, desdobramento que decorreu da primeira etapa, que embora não tenha sido objeto de estudo específico pelos autores, sinalizou possibilidades a serem exploradas por docentes que se deparem com a necessidade de lecionar os conteúdos abordados na pesquisa inicial, e que vislumbrem a viabilidade de diálogo entre história das ciências, a partir de metodologias ativas de aprendizagem. Nossa escolha se justificou mediante o anseio de favorecer a condução e compreensão de tais conceitos, tradicionalmente vistos como complexos por um grande número de discentes.

Assim, a partir das reflexões acerca da temática, apresentamos a condução da proposta didática que partiu da prerrogativa de que as aulas que abordassem o conteúdo matemático, fossem precedidas de uma análise e reflexão histórica-matemática acerca do desenvolvimento dos estudos de Fourier sobre a propagação do calor. A seguir, abordaremos de forma detalhada, tais procedimentos.

2 Fundamentação teórica

Uma das premissas deste trabalho é aproximarmos a história das ciências ao ensino de maneira cautelosa, evitando olhar o passado de maneira distorcida, e com o propósito de nos distanciarmos do anacronismo. Como sugere Matthews (1998) “(...) é desejável que os estudantes desenvolvam uma visão menos ingênua, que contemple, ao menos em parte, a complexidade do empreendimento científico” (*apud* Schimiedecke; Porto, 2014, p. 234).

Assim, para atingirmos o objetivo proposto em nossa iniciação científica que antecedeu

ao experimento didático, etapa teórica, consideramos como *corpus* de análise os estudos de Ivor Grattan-Guinness (2004) que, enquanto historiador matemático, se destacou como estudioso do século XIX, além de ter escrito uma crítica à primeira monografia de Fourier, sobre a propagação do calor, apresentada em 1807.

Ainda, como forma de buscar motivações e melhor compreender o contexto histórico que Fourier desenvolveu seus trabalhos, e consequências destes, destacamos a relevância do trabalho de Pifer (2015). Este autor, além de ter alicerçado o trabalho teórico na primeira fase da pesquisa, foi nossa sugestão como referencial de auxílio à metodologia de ensino na segunda fase, com o uso da Metodologia Ativa SAI – Sala de Aula Invertida. O aspecto essencial da obra é apresentar uma análise das bases conceituais e epistemológicas envolvidas na construção da teoria da condução do calor, e revelados nos estudos de Fourier.

No que tange a metodologia ativa SAI, além de Bergmann e Sams(2012), Weiderpass (2003) nos auxiliou em relação ao alcance dos trabalhos de Fourier e Doria (2010), que sinalizou a gama de aplicações destes estudos, nos dias atuais, sobretudo quanto à utilização das transformadas de Fourier em estudos de sinais na área de engenharia elétrica e computação quântica.

Também nos detivemos à apresentação de uma abordagem crítica acerca do momento histórico-social em que Fourier elaborou seus estudos sobre a propagação do calor, fundamentados em Roque (2012), sem apresentar uma visão “moderna” dos fatos. Apesar de nos debruçarmos na historiografia contemporânea, também utilizamos a tradicional obra de Boyer (1996), em função de ter sido a principal fonte que os alunos recorreram em suas pesquisas individuais, visto utilizarmos a metodologia SAI.

Importante considerar que o experimento didático se vincula a uma possibilidade de abordagem de conteúdo cuja ementa da disciplina, indicava material de estudo e, no caso das Séries de Fourier, o livro de Loreto et al (2012), auxiliou no tratamento desse conteúdo matemático. Sobre a condução das aulas adentraremos em algumas especificidades abordadas em momento oportuno desta apresentação.

3 Procedimentos metodológicos

A metodologia adotada para a direção e o desenvolvimento do estudo teórico, primeira etapa que antecedeu ao experimento didático pautou-se na abordagem qualitativa, a qual, segundo Bogdan e Biklen (1994), impele que o pesquisador se debruce nos dados descritivos coletados buscando extrair elementos de análise, no contexto da pesquisa. Também, tratou-se de uma pesquisa de cunho biográfico com objetivos exploratórios, considerando o apontado por Gil (2002), que foi desenvolver o trabalho a partir de documentos previamente produzidos, de forma diferenciada da pesquisa documental, que vale-se de materiais que não receberam, ainda, um tratamento analítico. Os objetivos exploratórios vinculam-se ao propósito de examinar um tema pouco estudado, no caso, as Séries de Fourier, em seus aspectos históricos, com potencial pedagógico.

Tendo em vista as singularidades de uma pesquisa histórica, a abordagem qualitativa vinculou-se à fundamentação metodológica do historiador de matemática Grattan-Guinness (2004), que refere-se a duas abordagens para pesquisas históricas: “história”, que enfatiza a história propriamente dita e “herança”, que enfatiza herança sob a perspectiva de legado histórico, e por meio de processos cumulativos, usualmente, sendo necessário apontar tais especificidades.

Para distinguir entres os dois tipos, o estudioso parte de alguns questionamentos fundamentais. No primeiro caso, em linhas gerais busca refletir acerca de quando a “história” indaga “‘o que aconteceu no passado?’ [...] ‘por quê?’ [...] ‘o que não aconteceu no passado? e por que não?’” (Gratthan-Guinness, 2004, p. 164). Já sob o ponto de vista de “herança” o cerne do questionamento refere-se a: “‘como chegamos até aqui?’” (Gratthan-Guinness, 2004, p. 165).

Sobre tais enfoques, embora defendendo a legitimidade de ambas as abordagens, o estudioso destaca aspectos problemáticos ao confundi-las, seja tomando a “herança” como “história”, ou a “história” como “herança”. Sobre a diferença filosófica entre as duas abordagens, o estudioso destaca “A diferença filosófica é que herdeiros tendem a se concentrar no conhecimento (teoremas como tais, e assim por diante), enquanto os historiadores também procuram motivações, causas e compreensão em um sentido mais geral” (Gratthan-Guinness, 2004, p. 165). Posto isso e, frente à necessária explanação do referido método, em nosso trabalho teórico, adotamos uma abordagem predominantemente sob o viés da “história”, por considerarmos que análises sob a perspectiva da “herança”, requerem estudos mais aprofundados do tema, e que fugiriam ao nosso propósito.

Na segunda etapa do trabalho, objeto central desta apresentação, mediante a reverberação da pesquisa teórica à experiência de aula, adotamos como metodologia de ensino, a Sala de Aula Invertida (SAI), por entendermos que esta prática pedagógica favorece a formação de alunos mais autônomos e questionadores, convidando-os a (re)significar seu papel em sala de aula. Para tanto, nos fundamentamos no trabalho Bergmann e Sams (2012), que, mesmo baseado na implantação da sala de aula invertida em suas disciplinas do ensino médio americano, tem se constituído, nos últimos anos, como alternativa pedagógica em inúmeras universidades na medida que esta busca do estudante pelo conhecimento, favorece, além do exercício da liberdade, a busca pela sua identidade futura, na esfera profissional.

Além disso, tendo em vista que a experiência didática emergiu de um desdobramento do projeto de Iniciação Científica, de cunho teórico, a utilização de SAI insinuou-se mais relevante, como forma de otimização de tempo em sala de aula, fator muitas vezes impeditivo às práticas mais arrojadas. Também, evoca a necessidade de se rever as posições e responsabilidades do professor e do estudante ao longo do processo de ensino e aprendizagem, como destaca Felcher et al (2021) fazendo alusão a Bergmann e Samns (2018).

Quanto as aulas propriamente elencadas na ementa do curso, destaca-se que o experimento se deu ao longo de duas semanas com dois encontros semanais de 2 horas/aula

cada um, sendo antecedido por uma aula anterior à primeira semana, como forma de estímulo às leituras que adviriam. Em um total de 9 horas/aula visto que, na semana que antecedeu ao experimento, especificamente na segunda metade da aula, um enfoque histórico amplo acerca de todo o panorama que se instaurava no meio científico em finais do setecentos foi iniciado, indagando como dínamo algumas questões que adentraremos com mais especificidade em nossos resultados e discussões.

4 Percursos e a “matemática” de Fourier

O estudo das séries iniciou-se de forma tímida no século XVIII, principalmente a partir dos estudos de Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707- 1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782), a partir da preocupação em relação a resolução do problema das cordas vibrantes que tinham como objetivo determinar a lei matemática em um dado instante t , a partir do movimento da corda descrita. Ao longo do século XIX, a noção de função foi amplamente discutida, e Fourier se destacou sobre isso, vinculando a definição de função a um problema físico, a saber, o estudo da propagação de calor como destaca Roque (2012).

Fourier nasceu em Auxerre, França, tendo ficado órfão aos oito anos de idade. De origem humilde, chegou a ocupar a cadeira de Matemática na escola militar dirigida por beneditinos, onde foi educado. Apesar de ser indicado com uma cátedra na Escola Politécnica de Paris, em função de seu envolvimento político inclusive, escolheu acompanhar Napoleão na expedição ao Egito. Atuou, em 1798 como governador do Baixo Egito, retornando à França em 1801, tornando-se prefeito de Grenoble, período que mais se deteve às suas experiências com a condução de calor em barras, como assegura Nunes (2002).

Em 1807, Fourier enviou um trabalho sobre a propagação do calor à Academia de Ciências de Paris, no qual desenvolveu suas primeiras ideias das representações das funções por séries trigonométricas. Neste trabalho, apesar de ter buscado demonstrar que qualquer função poderia ser representada a partir da soma de uma série trigonométrica, seria somente em 1822 que o estudioso viria a apresentar a obra *Théorie analytique de la chaleur*, consagrando-se, com essa publicação como relembra Roque (2012).

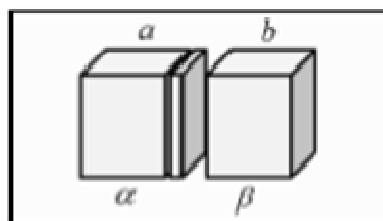
Apesar de ter sido aluno dos principais físicos-matemáticos do período; Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Gaspard Monge (1746-1818), seriam os dois primeiros, de modo enfático, que criticariam seu trabalho pela suposta falta de rigor. O cerne do pensamento de Fourier, em relação ao conceito de função de uma variável, contínua ou descontínua, é que esta poderia ser expandida em uma série de senos de múltiplos da variável. Seria Lagrange, o principal crítico da demonstração apresentada por Fourier, tendo em vista que ele próprio já se debruçara neste problema anteriormente.

Sabe-se que, a partir do século XVIII, o modelo newtoniano tornara-se referência no continente europeu, influenciando e estimulando inúmeros estudiosos pela busca por sua compreensão, implicações e o desenvolvimento de métodos de investigação matemática. É neste período, em especial e, como considera Pifer (2015), que se inicia um processo que viria

a culminar com a substituição do método da síntese geométrica pela análise algébrica, que possibilitaria a descrição dos fenômenos físicos por meio de equações diferenciais, tornando-se o instrumento de pesquisa dos fenômenos naturais. Tais discussões e preocupações acerca da redefinição do conceito de função, também, além de questões como a própria redefinição de “número”, favoreceram a emergência, no meio matemático, de um movimento que colocava em *xequê* seus próprios fundamentos, como recorda Roque (2012).

Inserido nesse contexto, e à mercê da epistemologia vigente, Fourier iniciou suas investigações acerca da propagação do calor em corpos sólidos, entre 1802 e 1803, com o objetivo de formular uma lei para a condução do calor, como destaca Pifer (2015, p.69). Mediante o propósito de obter uma lei matemática que possibilitasse indicar a relação da distribuição das temperaturas no corpo sólido em função do tempo, Fourier elaborou, em um primeiro momento, um modelo simplificado, utilizando apenas dois corpos discretos e de mesma massa m . Estes corpos estavam separados e apresentavam temperaturas iniciais diferentes a e b , e Fourier partiu da premissa de que não existia dissipação de calor para o ambiente, como salienta Pifer (2015).

Figura 1. Modelo de condução do calor entre dois corpos discretos



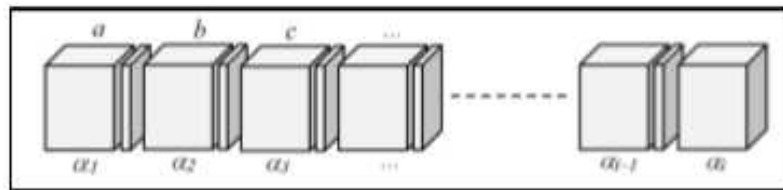
Fonte: Pifer (2015, p. 70)

Segundo Pifer (2015), a troca de calor entre esses dois corpos ocorria por meio de uma fina camada de massa dm , que deslocava do corpo mais quente a em direção ao corpo mais frio b , transmitindo-lhe calor instantaneamente. Após o contato, a camada retornava até seu corpo de origem, e essa sequência se repetia até que a temperatura entre os corpos se equilibrasse. Dessa forma, Fourier obteve as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem, sendo que a solução delas fornecia as temperaturas α e β de cada corpo, em função do tempo:

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)e^{-2\frac{k}{m}t} \quad \beta = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)e^{-2\frac{k}{m}t} \quad (4.1)$$

No entanto, seu principal objetivo era obter uma solução correspondente para os corpos contínuos através de um estudo feito anteriormente. Para tanto ele postulou que os n -corpos discretos tendessem ao infinito (Pifer, 2015):

Figura 2. Modelo contendo n corpos discretos



Fonte: Pifer (2015, p. 71)

O estudioso até conseguiu encontrar uma solução geral para a condução do calor, apresentando o cálculo da temperatura para dois e três corpos, mas não conseguiu concluir a análise fundamental, que era seu objetivo, alegando que:

A análise que empregamos pode ser usada para determinar as leis da propagação do calor em corpos de algumas dimensões. Mas essa transição da solução de um número finito de corpos para uma solução infinitesimal (se assim podemos dizer) requer cálculos complicados (Fourier, 1822 *apud* Pifer, 2015, p.72).

Em função de tais resultados, ele abandonou a abordagem em corpos discretos, mas, em seguida, já na segunda metade de 1804 e após o contato com os trabalhos de Jean Baptiste Biot (1774-1862), físico francês que influenciou Fourier através do seu trabalho sobre difusão de calor em corpos sólidos, o estudioso retomou suas investigações sobre a propagação do calor em corpos contínuos (Pifer, 2015).

A abordagem desses estudos era influenciada por Biot, pelo fato de basear-se na lei do resfriamento de Newton mediante a aplicação de diferentes coeficientes de condutividade para as propagações interna e externa do calor, acrescenta Pifer (2015). Seria a partir desses novos estudos, que Fourier chegaria a uma nova equação (4.2) que expressava a quantidade de calor transmitida entre as moléculas de um corpo sólido em três dimensões:

$$\frac{dv}{dt} = k \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) - hv \quad (4.2)$$

Na qual: hv = refere-se a esse calor cedido ao meio.

Sobre a importância desses resultados, observa-se que:

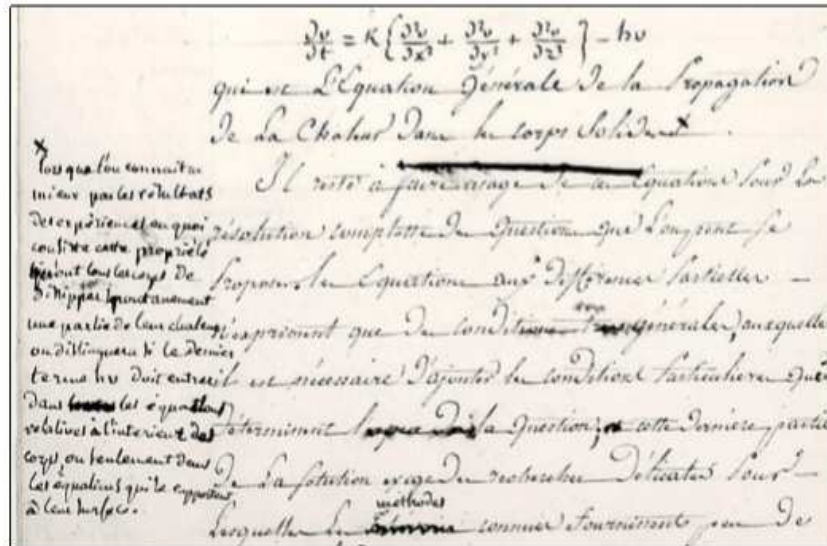
Representam a primeira tentativa de estudar a propagação do calor em um corpo contínuo de forma quantitativa. Pela primeira vez a propagação do calor foi traduzida por meio de equações diferenciais. O movimento do calor no estado não estacionário também foi estudado pela primeira vez. (Pifer, 2015, p.76)

Todavia, esses trabalhos apresentavam restrições em relação à alguns aspectos físicos e, diante desse entrave, Fourier aponta que:

Quando conhecermos melhor, a partir dos resultados experimentais, em que consiste esta propriedade na qual todos os corpos podem dissipar espontaneamente parte de seu calor, saberemos se o termo hv deve entrar nas equações relativas ao interior dos corpos ou somente nas equações relativas às suas superfícies. (Fourier, 1822 *apud* Pifer, 2015, p.76)

No manuscrito (fig. 3) Fourier aborda a equação da propagação do calor em três dimensões para o estado não estacionário e na margem esquerda, há uma nota sobre a dúvida dos estudos quanto aos resultados de sua equação. A transcrição dessa nota foi feita por Grattan-Guinness e Ravetz (1972, p. 111), segundo Pifer (2015).

Figura 3. Recorte extraído do manuscrito de 1805



Fonte: Pifer (2015, p. 7).

Outra limitação, no domínio da física, era em relação a ausência de conhecimento do fluxo de calor em algumas condições específicas, dentre outras, que impediriam um avanço dos estudos de Fourier. Sobre isso, Pifer, aludindo a Herivel, destaca que:

Essas duas primeiras abordagens para tratar do problema da propagação do calor em corpos sólidos foram registradas em uma coletânea de manuscritos, datada de 1805, e que provavelmente foi preparada com a intenção de ser publicada, a qual não aconteceu (Herivel, 1975 *apud* Pifer, 2015, p. 69).

Acrescenta ainda que, apesar de tais obstáculos, o matemático prosseguiu com sua pesquisa e através da incorporação e articulação daquelas concepções físicas, antes ausentes, conseguiu obter outros resultados, enviando, ao final de 1807, um novo trabalho intitulado *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, à Academia de Ciências do *Institut de France* em Paris.

Mediante estes novos resultados, Fourier apresentou inicialmente neste trabalho, os principais conceitos físicos utilizados no desenvolvimento da teoria, e em seguida demonstrou a determinação e a solução da equação da propagação do calor em uma barra no modo estacionário, não esquecendo de corpos com outras geometrias. Contudo, Pifer (2015) salienta que seria na aplicação de um cubo com dimensões finitas, que o estudioso mostraria o desenvolvimento da equação geral da propagação do calor, em um sólido.

A estudiosa Roque (2012, p. 318) sinaliza que, neste trabalho, “Fourier afirmava que uma função qualquer pode ser expressa como soma de uma série trigonométrica”. Assim, apresentando um estudo mais complexo com uma combinação de curvas com diferentes

comprimentos de onda, Fourier resolve a equação para cada componente da curva de senos, e adiciona tais soluções em conjunto.

Segundo ele, tal método funcionava para qualquer problema, mesmo que a temperatura subisse repentinamente. Contudo, somente Euler e Lagrange admitiam essa possibilidade e, mesmo assim, apenas para funções particulares. Mediante tal fato, seu trabalho não provocou entusiasmo por parte dos matemáticos que o avaliaram, como também foi criticado abertamente em função da suposta “falta de rigor”, como destaca Roque (2012).

Ainda, em 1810, Fourier revisou seu trabalho anterior, acrescentando apenas duas novas seções e almejando o prêmio oferecido pelo *Institut de France*, o qual, apesar de ter sido premiado, não foi publicado. Sobre esse estudo, o comitê examinador formado por Lagrange, Laplace, Etienne Louis Malus (1775-1812), René Just Haüy (1743-1822) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833), acrescentaria:

Esta obra contém as verdadeiras equações diferenciais da transmissão do calor, tanto no interior dos corpos como na superfície, e a novidade do tema, juntamente com sua importância, fez o comitê coroar esta obra, observando, no entanto, que a maneira em que o autor chega às suas equações não está isenta de dificuldades e que a sua análise para as integrar ainda deixa algo a desejar, tanto em relação à generalidade quanto ao rigor (Darboux, 1890 *apud* Pifer, 2015, p.84, grifo nosso).

Após esta rejeição, seria somente em 1822, que Fourier viria a publicar seu trabalho com a obra *Théorie analytique de la chaleur*, sustentando sua fundamentação teórica na lei de Newton sobre resfriamento. Posteriormente, com correções editoriais, o livro foi traduzido e publicado em inglês (1878) e reeditado em francês, já em 1888 (Truesdell, 1980).

O resultado de suas equações é o que denominamos hoje como *Transformadas de Fourier*, as quais, a partir de uma equação que trata um ‘sinal’ variando no tempo como a soma de uma série de componentes de curvas sinusoidais, calcula-se as suas amplitudes e frequências.

Segundo Weiderpass (2003), um sinal periódico é caracterizado pela decomposição em componentes senoidais ou cossenoidais, apresentando frequências múltiplas de uma frequência fundamental equivalente ao inverso do seu período e ainda, se existir, adiciona-se um componente contínuo. Com isso, definiu-se que o espectro de um sinal é constituído pelo conjunto do componente contínuo, do componente fundamental e dos seus harmônicos.

A partir da separação das componentes do sinal, dá-se a caracterização da análise de Fourier do sinal, ou seja, indica-se a distribuição da potência ou energia do sinal por seus componentes harmônicos, passível de ser realizada através de um computador, a partir da introdução da Transformada de Fourier discreta (Orsini *apud* Weiderpass, 2003, p.2). Dessa forma, as componentes em frequência que constitui o sinal, podem ser obtidas através da transformada de Fourier do sinal que realiza a decomposição de um sinal em funções exponenciais complexas em frequências distintas segundo a equação (4.3):

$$X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2\pi v t} dt \quad (4.3)$$

Na qual:

t = representa o tempo em (s),

v = a frequência em Hertz (HZ),

x = o sinal no tempo

X = o sinal no domínio da frequência.

Nos dias de hoje, as transformadas de Fourier se mostram presentes em nosso dia a dia de inúmeras formas, desde sua utilização para analisar o sinal vibratório produzido por um terremoto, como também na obtenção da estrutura do DNA utilizando imagens de raios X, recepção de telecomunicação, processamento de sinais. A título de ilustração apresentamos alguns exemplos, apontados pelos alunos em nossas aulas, a partir de suas pesquisas acerca das transformadas de Fourier, a saber:

No domínio do ensino de engenharia elétrica, os trabalhos de Fourier apresentam diversos alcances, principalmente na área de estudos de sinais em dispositivos eletrônicos. Uma de suas aplicabilidades é na determinação da distorção harmônica, ou distorção não-linear, ocorrida em diversos sistemas. Esse fenômeno obtido em transistores MOS corresponde à existência de sinais de frequências múltiplas à do sinal original aplicado na entrada. Isso ocorre devido a transferência não-linear do dispositivo utilizado no sistema, isto é, tal distorção apresenta uma dependência de acordo com o ponto de operação e da amplitude do sinal de entrada conforme salienta Doria (2010).

Sobre isso, Doria (2010) acrescenta que, quando é aplicado na entrada um sinal senoidal com frequência angular de $w = 2\pi f^1$ em um transistor MOS, temos que a característica de transferência não-linear resultará em um sinal de saída harmônicos com frequências múltiplas a w , que modificarão o sinal original.

Assim, através da aplicação da série de Fourier ou da transformada de Fourier é possível determinar a distorção harmônica em diversos sistemas, constatação fundamental para engenheiros de Automação e Controle, cursado pelos discentes que adentraram nas especificidades apresentadas, além dos cálculos usuais de sala de aula, descontextualizados. Em sistemas que apresentam sinais não-periódicos é necessário utilizar transformada rápida de Fourier, e quando os sinais são periódicos, são utilizadas as séries de Fourier, como destaca Doria (2010).

5 Resultados e discussões

A metodologia de Sala de Aula Invertida, segundo Felcher et al (2021), pressupõe a possibilidade de fazer em casa o que usualmente é feito na sala de aula e, em decorrência, nos deparamos com resultados de pesquisas de maior alcance, por parte de alguns alunos, em relação à temática sobre as séries de Fourier e a reverberação de seu trabalho. Apresentaremos

¹ O termo f corresponde a frequência angular do sinal.

de forma resumida as principais discussões de aula a partir de referências de textos, tanto exploradas pelos estudantes, quanto por nós sugeridas.

Como anteriormente mencionado, nos valem de dois encontros semanais com 2 horas/aula cada um, sendo antecedido por uma aula anterior à primeira semana - 1 hora/aula, como estímulo às leituras que adviriam, perfazendo um total de quatro encontros. Nesta aula introdutória, apresentamos um panorama geral acerca da história da matemática em finais do setecentos e início do século XIX, momento emblemático como mencionamos no capítulo anterior, em que suscitamos reflexões a partir das seguintes questões: Sabiam que embora tenham aprendido cálculo de funções no ensino médio e antes do cálculo integral e diferencial, tais conceitos surgiram em ordem inversa? Como entendem isto ser possível?

Além de tais questões terem despertado inquietude e incredulidade, foi a partir delas que direcionamos os demais encontros nos valendo do oferecimento de textos oriundos de nossa pesquisa teórica finalizada, cujo enfoque histórico prevaleceu, e sugerindo a pesquisa de fontes acerca das ideias preliminares sobre alguns tipos de funções e suas características.

Com relação aos procedimentos em sala de aula, no primeiro encontro posterior à solicitação de algumas leituras e pesquisas, em que usualmente seria apresentado o referido conteúdo, adentramos nesse contexto histórico que permeou o processo de desenvolvimento das séries de Fourier, em uma dinâmica de discussões acerca do amadurecimento das definições de funções, inclusive, mas de forma superficial, para melhor compreendermos os trabalhos do estudioso e consequentes implicações, a posteriori. Tal cuidado também advém do fato de que alguns alunos provavelmente teriam dificuldade em selecionar textos e/ou fontes confiáveis, para a etapa seguinte, que era nosso objetivo. Somente após este primeiro contato com a história da matemática do início do século XIX, é que os alunos buscaram trazer, a partir dos encontros seguintes, impressões de suas leituras e sugestões.

Também, considerando que nossa meta era favorecer a condução e compreensão da disciplina Cálculo III em um curso para futuros engenheiros, antes de adentrarmos nos conceitos formais do conteúdo Série de Funções, sugerimos em todas as aulas precedentes, exceto no primeiro dos quatro encontros, como apontado, que os alunos pesquisassem sobre o personagem Fourier e o alcance de seu trabalho. As constatações de nossa pesquisa inicial apresentamos na seção anterior deste relato, e os resultados referidos pelos discentes, ao longo desta seção.

Somente no segundo encontro, na segunda aula especificamente, adentramos no campo das séries de funções de Fourier e os conceitos matemáticos envolvidos, que foi favorecido pelo alinhamento do primeiro encontro, em que emergiram discussões sobre o caminho percorrido por Fourier na construção de tais conceitos, e preocupações de contemporâneos acerca do conhecimento matemático, daquele período. O livro didático utilizado no curso refere-se ao material de Loreto et al (2012), que apresenta os conteúdos relacionados à ementa do curso. Em todos os encontros as discussões foram conduzidas sob a forma de debates entre grupos de alunos, com liberdade nesta formação.

Nessas discussões, em que destacamos o terceiro e quarto encontros, foi possível investigar, a partir de maior amadurecimento dos discentes, alguns cenários históricos e caminhos percorridos tanto por Fourier quanto por outros cientistas que o sucederam, mediante a perspectiva histórico-matemática, adentrando em outras ciências que sustentaram e impulsionaram o surgimento de uma gama de aplicações, daí advindas.

Observou-se também, que os estudantes buscaram compreender implicações, quanto às dificuldades enfrentadas por Fourier no sentido de validar seu trabalho, particularmente com relação à menção do comitê que o analisou e referenciou em 1810. A rejeição do comitê ao assinalar que sua análise “deixava algo a desejar”, em função da suposta falta de rigor, nos revelou o interesse subjacente de assentarem o edifício matemático, em terrenos mais “sólidos”, já no início do século XIX. Esse processo inflaria, a partir daquele período, e eclodiria nos conceitos matemáticos, até os dias atuais.

Tais acontecimentos conduziram a reflexões, outrossim, quanto às controvérsias que os estudos em história das ciências trazem à luz; em que a história registra oportunidades perdidas, ou chegadas atrasadas e tardias de concepção ou publicação de descobertas e, na maioria das vezes, decorrentes da força da “autoridade”, segundo epistemologias vigentes.

Como salienta Grattan-Guinness, tais acontecimentos históricos, usualmente referenciados, partem do pressuposto que a história tenha passado pelas sequências usuais na construção do conhecimento (N_0, N_1, N_2, \dots), mas que poderia ser de outra forma (Grattan-Guinness, 2004). Ademais, há de se considerar que um percurso percorrido e que conduz N_0 até N_1 , por exemplo, mesmo não explicitamente enfatizado, poderia nos causar uma impressão de ter se fundamentado sob uma perspectiva determinista, com generalizações simplistas embasadas em relações de causa e consequência.

Controvérsias como estas, discutidas em aula, nos impeliu a considerar sob que circunstâncias um caminho percorrido para validação de alguma teoria ou descoberta, seria passível de ser classificado como determinado ou não, como também, se teriam se desenvolvido lentamente ou intermitentemente, posto que inúmeros fatores estão imbricados ao longo de tais processos, o que foi enriquecedor.

Com relação às devolutivas teóricas dos alunos, visto que a partir do segundo encontro eles deveriam trazer documentos que acrescentassem informações acerca da temática, o fato de um grande número de estudantes ter se pautado na historiografia tradicional da história da matemática como leitura prévia, também contribuiu de forma positiva à discussão de aula, na medida que, ao se depararem com outros posicionamentos fundamentados na historiografia contemporânea, foi possível uma reflexão mais crítica. Constataram, visto às diferenças que emergiam ao vislumbrar brevemente aspectos da historiografia das ciências, que a história é sempre passível de ser reescrita.

Tal singularidade propiciou discussões acirradas acerca do trabalho de Joseph Fourier ter surgido em um período crucial, denominado Revolução Industrial, o que para muitos estudiosos seria considerado um “divisor de águas” na história moderna, especialmente em decorrência dos inúmeros aspectos da vida cotidiana do período que foram influenciados, de alguma forma, pelas mudanças daí advindas. Alguns estudantes, referenciaram historiadores contemporâneos, que buscam reconsiderar esse movimento, a partir de diferentes perspectivas, entendendo que mudanças se dão de forma gradativa, em sua maioria, sendo um equívoco a utilização do termo “revolução”.

A despeito de tais polêmicas, basicamente de ordem historiográfica e usuais, para quem se propõe a reconsiderar percursos históricos, é notório que o final do século XVIII e início do século XIX se caracterizou pela efervescência de ideias ousadas e uma ânsia por novos mecanismos, como salienta Costa (2014), fulgurando assim, como um período representativo nos aspectos tecnológicos, econômicos e sociais, e que vinham se processando na Europa desde os séculos precedentes. Sobre isso, Pifer (2015, p. 17) ressalta que esses movimentos “Permitiram a estruturação de um novo cenário caracterizado por novos procedimentos de investigação, pela descoberta de novos fenômenos e, sobretudo, pelo desenvolvimento de novas teorias capazes de explicá-las”.

Esse debate entre tradição e modernidade, significativos ao longo dos séculos XVIII e XIX, teve amplos reflexos na matemática, sendo que o de maior relevância para o nosso trabalho, foi a gradativa substituição do método da síntese geométrica pela análise algébrica como sugere Moura (2017, p.18). Assim, seria ao longo desse processo de transição que a busca pela definição e uma sucessão de redefinições da noção de função, teria fervilhado, mediante a noção de rigor daquela época. Dessa forma, o conceito de Funções se tornaria o principal objeto de estudo na matemática, no período, em muitos aspectos, consequência do desenvolvimento do cálculo, que amadurecia desde os seiscentos.

Sobre essa mudança, Roque (2012, p. 271) aludindo a Jaques Hadamard, destaca que “O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número: passou a ser a lei de variação, a função. A matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos; foi transformada em seu objeto”.

As mudanças não ficaram restritas à matemática, mas influenciaram também a física, onde o estudo de fenômenos físicos sobre o calor, a luz, os gases, a eletricidade e o magnetismo, assumem um caráter mais sistemático e não apenas experimental (Pifer, 2015). O estudioso ainda ressalta que a previsão de fenômenos físicos, e não mais apenas a compreensão destes, foi possível a partir da utilização do que chama “elementos qualitativos”, tais como os “fluídos sutis” (Pifer, 2015, p.18). Dessa forma, o modo de descrever os fenômenos físicos foi gradativamente alterando-se nesse período, como acrescenta Pifer (2015, p.19), através do uso de equações diferenciais análogas, permitindo assim a substituição das explicações físicas pela dedução e resolução de equações que descrevem tais fenômenos, mesmo desconhecendo as suas origens.

Nesse contexto e, em meio a este burburinho, observamos que a imagem da matemática que temos hoje, forjada ao longo do século XIX, se mostra estreitamente relacionada com os acontecimentos desse período, em relação à história da análise, do cálculo infinitesimal, com destaque à noção de função, como aponta Roque (2012, p. 343). A estudiosa também salienta que seria um problema físico, na esfera da propagação do calor, o que viria a ser fundamental nas discussões acerca da noção de função naquele período. Assim, seria o trabalho de Fourier, dentre inúmeros outros, o fio condutor que dinamizaria o que adviria, sob muitos aspectos, até os dias de hoje.

Por sua vez, é imperioso observar que, como salienta Pifer (2015), a grande maioria dos trabalhos em História da Ciência que buscam trazer as obras de Fourier, são pouco explorados sob o ponto de vista da Física, o que tornou mais relevante a escolha deste trabalho, na medida que pode favorecer, também, abordagens em disciplinas relacionadas ao ensino de Física.

Além disso, sabe-se que o formalismo da física quântica a partir do século XX, também se vincula às Séries de Fourier, desenvolvidas pelo estudioso no início do século XIX, e que culmina com os estudos atuais relacionados à computação, que sob muitos aspectos, advém de seu trabalho. Com isso, as aulas de Cálculo que presumiam, a princípio, uma abordagem histórica do trabalho de Fourier, se mostrou enriquecida a partir das devolutivas dos alunos em relação à tais saberes, que emergem na ciência contemporânea, já no último encontro. Tais devolutivas que aqui se mostram alinhavadas, se deram a partir de resenhas das aulas, material proposto e trazidos pelos discentes.

Assim, condizente com nossa proposta de suscitar reflexões, enveredemos em discussões acerca das concepções mecanicistas que estavam fortemente enraizadas na sociedade científica europeia do século XIX, de tal forma que todos os fenômenos físicos da natureza eram descritos por leis que apresentavam alto grau de determinismo.

Em linhas gerais, neste último encontro, discutiu-se acerca do surgimento da teoria quântica do início do século XX, diante da contingência em explicar alguns fenômenos físicos, mormente o comportamento da radiação emitida por corpos negros, que a física clássica, até então consolidada, não conseguia esclarecer, a contento. Sobre isso, seria a partir deste período que a Mecânica Quântica começaria a ser desenvolvida, tornando-se um arcabouço matemático capaz de descrever diversos fenômenos físicos em escala atômica (Marquezino, 2006).

Esta teoria, então nova, se oporia completamente as noções de determinismo e realidade presentes na mecânica clássica, a partir de previsões em termos probabilísticos e descrições do mundo, essencialmente sob perspectivas indeterministas, como salienta Pessoa Jr. (2003). Sobre isso, as discussões enveredaram a indagações quanto a descrição sobre uma realidade não-observada, em contrapartida à visão positivista, pautada sob a premissa de que o papel da ciência se restringiria somente à descrição de fenômenos observáveis, evitando-se qualquer tipo de especulação sobre mecanismos que estariam além da comprovação experimental.

De fato, no que tange à computação quântica, devemos considerar que o seu surgimento se deu, notadamente, neste período de prevalência de uma visão positivista da ciência. Tal fato, colocou em xeque os pressupostos que sustentavam a teoria quântica, haja visto a escassez de evidências empíricas que sustentassem, dentre outros pontos, a possibilidade de existência de infinitudes de universos paralelos, inclusive. Apesar de ter emergido, nas últimas décadas, diversas tentativas de se interpretar a teoria quântica se situam, ainda, em uma perspectiva positivista.

Essas novas interpretações tiveram como estrutura principal a noção de “informação”, que de certa forma assegurou a definição de maneira não emblemática. Entretanto, a despeito da correção da teoria matemática relativa à ideia de “informação” há ainda muitos problemas, notadamente na esfera filosófica, relacionados a esse conceito, como sinaliza Pessoa Jr. (2003). Afinal que linguagem é essa? Qual a origem da computação? Questões como essa, foram suscitadas em aula levando-se em conta que talvez precisemos de uma teoria que requeira mais fundamentação.

Com relação às reflexões sobre computação quântica, aspecto a ser explorado nas intenções iniciais do trabalho teórico que reverberou em nossas dinâmicas de aula, os alunos se manifestaram de forma categórica, ao aludir que o nível de desenvolvimento computacional atingindo atualmente, se mostra estreitamente relacionado aos movimentos filosóficos surgidos nas ciências, e particularmente na matemática, no decorrer da segunda metade do século XIX. Tais considerações ratificaram a relevância de explorarmos a temática proposta.

Também, a despeito de inúmeras controvérsias, no que tange aos aspectos filosóficos e conceituais da mecânica quântica, que não era foco de nossa abordagem didática, tais embates propiciaram a consideração, por parte dos estudantes, quanto à relevância dos algoritmos quânticos para o desenvolvimento da computação, principalmente em relação ao ganho de tempo na resolução de problemas, quando comparado aos análogos clássicos. A constatação de uma maior rapidez do algoritmo quântico em relação ao clássico, que se dá em função da utilização da Transformada Quântica de Fourier (TFQ), revelou que as possibilidades de alcance dos estudos de Fourier, se mostram longe de terem se esgotado.

6 Considerações Finais

Neste breve relato de experiência, observamos que a intervenção da abordagem histórica adotada em sala de aula em um curso de engenharia na disciplina de Cálculo III atendeu ao nosso propósito, notadamente em função da escolha pela utilização da metodologia de Sala de Aula Invertida - SAI, na medida que, verificou-se o protagonismo dos estudantes e o tempo ganho em sala de aula para discussões acerca da temática elencada, que mostrou-se ampliado. Posteriormente, na condução do conteúdo matemático envolvido nas Séries de Fourier, não houve dificuldades em relação à gestão do tempo, o que consideramos decorrente, sobretudo, da motivação demonstrada pelos alunos.

Quanto ao arcabouço teórico trazido pelos estudantes – representados pela maioria das referências bibliográficas utilizadas neste artigo, tal envolvimento revelou um indício de amadurecimento dos estudantes da turma, favorecendo o futuro direcionamento à pesquisas. Todavia, é importante considerar que essa receptividade talvez tenha sido principalmente favorável em função do grupo de estudantes não pertencer aos primeiros períodos da graduação superior, visto que, esta participação ativa e autônoma, aspecto fundamental no processo, nem sempre é compreendida e assumida pelos estudantes, de forma geral.

Também, como o propósito de nossas aulas foi discorrer sobre a relevância e alcance das descobertas de Fourier, e as discussões suscitaram reflexões no âmbito da física quântica, inclusive, escolhemos discorrer sobre tal temática em sala de aula, mas buscamos não nos deter em análises e discussões filosóficas mais profundas. Sobre isso, nos valemos da ênfase dado por Bergmann e Sams (2012, p. 54-55), ao se referirem a situações em que o professor deve ser capaz de admitir quando não tem a resposta à todas perguntas dos alunos devendo estar pronto para assumir isso. Ainda, seriam essas as oportunidades do professor se revelar um aluno líder, guiando e colaborando neste mundo vasto de informações, não detentor de todas as respostas.

Por sua vez, consideramos pertinente destacar que, conquanto o tratamento dado por Fourier em seu trabalho seja do início do século XIX, seu alcance ultrapassa a barreira de tempo, visto que a teoria quântica surge praticamente após um século. Situações como essa nos permitem inferir que, muitas descobertas, no âmbito da matemática, nem sempre se verificam aplicações imediatas. Na verdade, tal fato é notório.

Em função de se tratar de um desdobramento de pesquisa, até então teórica e em nível de iniciação científica, entendemos que muito ainda há de ser acrescido a este experimento de aula, visto não ter sido programada em nível de pesquisa acadêmica. Assim, nossa apresentação, reflexões e direcionamentos sinalizam uma possibilidade a ser adaptada e contemplada com mais encontros, pesquisas teóricas, etc. Os resultados advindos de nosso experimento vislumbram a possibilidade de projetos didáticos a serem impulsionados em cursos superiores em engenharia. Daí, a utilização da metodologia SAI, sem precedentes, emerge como forma de otimizar o experimento.

Não menos importante, consideramos que na experiência em aula, as propostas de reflexões acerca de episódios que discutiram o formalismo da física quântica em relação às séries de Fourier, partindo da abordagem histórica até a interlocução com alguns aspectos da computação, favoreceu sobretudo, a possibilidade de se humanizar as ciências, aproximando-as dos interesses pessoais, éticos, culturais e políticos e, desencapsulando assim, o pensamento crítico e reflexivo do aluno.

Referências

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aarom. **Flip your classroom: reach every student in every class every day**. Eugene: ISTE, 2012.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto (Portugal): Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2.ed. trad. E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. ISBN 9788521200239

COSTA, Eli Banks Liberato. “A máquina que pensa”: Alguns aspectos das origens da computação. **História da Ciência-Tópicos Atuais 3**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação. *In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM-IACME*. Recife: Brasil, 2011.

DORIA, Rodrigo Trevisoli. **Operação analógica de transistores de múltiplas portas em função da temperatura**. 2010. 198p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

FELCHER, Carla Denize Ott; VIÇOSA, Cátia Silene Carrazoni Lopes; SOARES, Renata Godinho; FOLMER, Vanderlei. O uso da sala de aula invertida para ensinar polígonos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática, [S. l.]**, v. 12, n. 1, p. 1–18, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n1a03. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/2742>. Acesso em: 20 fev. 2024.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. ISBN 85-224-3169-8

GODOY, Kleyton Vinicyus; LEITE, Douglas Gonçalves. Regra de Cramer: uma perspectiva histórica para o ensino de sistemas lineares. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática, [S. l.]**, v. 12, n. 5, p. 1–24, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n5a25. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/2996>. Acesso em: 20 fev. 2024.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. A matemática do passado: que distinguem a sua história de nossa herança. **Historia mathematica**, v. 31, n. 2, p. 163-185, 2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086003000326>. Acesso em: 05 de out. 2021.

LORETO, Ana Célia da Costa; LORETO, Armando Pereira; PAGLIARDE, José Emílio. **Cálculo 3: Resumo e exercícios**. São Paulo: LCTE, 2012. ISBN 9788579420221

MARQUEZINO, Franklin de Lima. **A transformada de Fourier Quântica Aproximada e sua Simulação**. 2006. 118 p. Dissertação (Mestrado em modelagem de sinais) – Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2006.

MATTHEWS, Michael. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de

reaproximação. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, [S. l.], v. 12, n. 3, p. 164–214, 1995. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/7084>. Acesso em: 20 fev. 2024.

MOURA, Roseli Alves de. **Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista**. 2017. 219 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/20005>. Acesso em: 10 jul. 2018.

NUNES, Jaques. **Noções sobre as séries de Fourier**. 2002. 94 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) – Centro de ciências físicas e matemáticas. Universidade de Santa Catarina, Florianópolis. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96939>. Acesso em 14 jul. 2018.

PESSOA JR, Osvaldo. **Conceitos de Física Quântica**. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2003. ISBN 8578616332

PIFER, Anderson. **Teoria analítica do calor de Joseph Fourier: Uma análise das bases conceituais e epistemológicas**. 2015. 147 p. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática), Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012. ISBN 8537808881

SCHIMIEDECKE, Winston Gomes, PORTO, Paulo Alves. Uma abordagem da história da energia nuclear para a formação de professores de física, **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 232-241, jul/dez. 2014. Disponível em: <https://rbhciencia.emnuvens.com.br/revista/article/view/675>. Acesso em 14 jul. 2018.

TRUESDELL, Clifford Ambrose. **The tragicomical History of Thermodynamics, 1822-1854**. New York: Springer, 1980. ISSN 0172-570X

VALENTE, José Armando. A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: uma experiência com a graduação em midialogia. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. In: BACCOCH, Lilian, MORAN, José (Orgs.). Porto Alegre: Penso, 2018, p. 26-44. ISBN 978-85-8429-116-8

WEIDERPASS, H.A. **Estudos de métodos para representação conjunta espaço, tempo e frequências em sinais multidimensionais**. 2003. 114p. Dissertação (Mestrado em engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.