A riqueza nos currículos de Matemática do Ensino Médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos

Marcio Antonio da Silva[*] *e Célia Maria Carolino Pires*[**]

Resumo: O principal objetivo da pesquisa que originou este texto é contribuir para a discussão curricular, por meio de critérios que sirvam como referência para determinar, incluir e excluir temas matemáticos no Ensino Médio. Este artigo faz um recorte dos oito princípios propostos por Silva para compor o currículo de Matemática no Ensino Médio e esmiúça um deles: a riqueza. Aborda também a adoção de padrões matemáticos e assinala a necessidade de ampliar a discussão, no Ensino Médio, sobre atividades que contemplem modelos matemáticos, principalmente geométricos. Aponta os fractais como tema potencialmente importante para identificação e construção de padrões e o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e da investigação matemática como estratégias metodológicas apropriadas para esse tipo de situação.

Palavras-chave: Educação Matemática. Currículos de Matemática. Ensino Médio. Seleção e organização de conteúdos. Riqueza.

The richness in the High School Mathematics Curriculum: searching a criteria for selection and organization of subjects

Abstract: The main purpose of this text's prior research is to contribute to the

* Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Líder do GP100 (GPCEM – Grupo de Pesquisa Currículo e Educação Matemática). marcio.silva@ufms.br

** Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Líder do Grupo de Pesquisa Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores. celia@pucsp.br

discussion about Mathematics curriculum, by establishing criteria that may serve as reference for determination, inclusion and exclusion of mathematical topics in high school. In this article, eight principles listed in Silva (2009) were put together, one of them being thoroughly studied: the richness. It was investigated that Doll Jr. (1997), when referring to the richness of Mathematics curricula, is influenced by a motion of mathematics experts who widely defend the slogan: "Mathematics and the science of the patterns". On the other hand, little discussion was found in high school about activities that contemplate mathematical models, mainly geometrical ones. Fractals were chosen as a potentially important topic for identification and construction of patterns, as well as the use of Information and Communication Technologies (ICT) and mathematical investigation as proper methodological strategies for this type of situation.

Key words: Mathematics Education. Mathematics curriculum. High school. Subject selection and organization. Richness.

Introdução

Com a publicação da Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional (1996), o Ensino Médio Brasileiro passou a ter objetivos distintos, que devem ser contemplados concomitantemente: (i) aprofundar os conhecimentos construídos no Ensino Fundamental e preparar para estudos posteriores; (ii) preparar para o mercado de trabalho; (iii) formar um indivíduo ético para o exercício da cidadania; (iv) fornecer uma formação científica, a qual podemos compreender como uma preocupação do Estado com o avanço tecnológico do País e, consequentemente, com a necessidade de produzir mão de obra capacitada para concretizar esse progresso.

Essa variedade de objetivos acabou por provocar a indefinição de uma identidade para essa etapa final da Educação Básica. Desde então, busca-se formar os estudantes para o trabalho e para a continuação dos seus estudos; fazer deles cidadãos éticos; e capacitá-los ao uso e à criação de novos recursos tecnológicos. Tal diversidade torna ainda mais complexa a missão de estabelecer qual a matemática a ser ensinada nesse período da vida escolar dos estudantes brasileiros.

Em termos de currículos oficiais, para essa etapa da escolaridade, foi publicada uma diversidade de documentos pelo Ministério da Educação, em um curto período de tempo: os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 1999), os PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006).

Embora essas orientações enfatizem a necessidade de desenvolver competências e habilidades nos estudantes, o fato é que, de modo geral, nos documentes recentes, o foco maior refere-se à abordagem dos conteúdos. "Contextualização" e "interdisciplinaridade" são termos muito utilizados. Contudo, sobre a seleção de conteúdos, há pouco debate, e a organização linear dos temas ainda é predominante. Uma rara reflexão a respeito disso pode ser encontrada no excerto a seguir:

> Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (2006, p. 69).

Este artigo traz um recorte de nossa tese de doutoramento (Silva, 2009), na qual defendemos que é necessário estabelecer critérios claros para escolha e seleção de conteúdos matemáticos no Ensino Médio Brasileiro. Para tanto, buscamos responder à questão: quais os critérios para a seleção e a organização de conteúdos de Matemática no Ensino Médio, considerando que, para selecioná-los e organizá-los, devemos levar em conta os aspectos organizacionais, metodológicos, sociais e culturais envolvidos no processo?

Os três Rs do modernismo

As três grandes revoluções do século XVIII – industrial, americana e francesa – mudaram o cenário mundial e trouxeram implicações para a educação. Entre elas, podemos destacar a preocupação pós-revolução industrial com a educação para o treinamento de recursos humanos especializados; pós-revolução americana, com a educação para a produção local, com a finalidade de obter mão de obra específica na área de mineração e agricultura; e pós-revolução francesa, com a educação para a igualdade de oportunidades para todos alcançarem cargos burocráticos e administrativos. O conceito de trabalho e as ideologias relacionadas à igualdade entre os homens provocaram mudanças contundentes na forma como a sociedade pensa e no modo de pensar sobre ela.

Com a chamada segunda onda da revolução industrial, uma série de invenções marcou a transição do século XIX para o XX: a luz elétrica, o telefone e os automóveis representaram grandes inovações desse período; os processos industriais, como o taylorismo e o fordismo, implicaram o aumento da produção e o barateamento dos custos de fabricação. Esses fatos impulsionaram e influenciaram a educação da época. Isso porque, historicamente, um dos objetivos da escola foi (e ainda é) preparar para o mundo do trabalho. A época à qual nos estamos referindo foi notadamente marcada por uma grande oferta de empregos, porém por uma escassez de profissionais com qualificação para ocupar os postos oferecidos.

Dessa forma, nas escolas estadunidenses do início do século passado, o objetivo era formar mão de obra de maneira rápida e eficaz. Por eficácia no ensino entendia-se saber ler, escrever e realizar as operações aritméticas básicas. Esse foi o currículo conhecido como "três Rs", menção feita à pronúncia das três palavras que marcaram a ênfase dos programas de ensino daquela época (*reading, writing and arithmetic*).

Na Matemática, o século XIX ficou conhecido como o século de ouro, por seu desenvolvimento, rigor e fundamentação. Entre outros grandes matemáticos que se destacaram naquele período, Cauchy e Weierstrass contribuíram para a formalização da Matemática, por intermédio de uma nova definição para o conceito de continuidade de uma função; Lobachevski e Bolyai desenvolveram geometrias não-euclidianas; Peano criou uma teoria axiomática para os números naturais, construindo-os a partir de princípios rigorosos; Cantor produziu uma aritmética dos conjuntos infinitos. Essa busca pela formalização e unificação das ciências provocou a construção de teorias cada vez mais sofisticadas e, ao mesmo tempo, tornou-as ininteligíveis para a maioria das pessoas.

Esse paradigma científico, denominado de "modernista" por Doll Jr. (1997), tem sua gênese nos pensamentos de Descartes e Newton. Esses grandes filósofos marcaram o século XVII, com seus tratados, buscando ordem, justificativas para os mais diversos fenômenos e soluções para uma variedade de problemas. Essa tendência influenciou as propostas curriculares da primeira metade do século XX. Além da busca pela maior eficácia, ou seja, formar o maior número de pessoas no menor tempo possível, o currículo moderno possui características como o sequenciamento linear dos temas e conteúdos; as relações de causa e efeito; o modelo conhecido como "racionalidade técnica"; e a ênfase no binômio "máquina e produtividade", caracterizado pela construção de tarefas, pela manutenção de turmas alinhadas e pela produção de resultados (Pires, 2004).

Os quatro Rs do pós-modernismo

Como vimos, o período denominado "modernismo" foi caracterizado, segundo Doll Jr., pela excessiva busca do método ideal para a ciência e pela supervalorização do formalismo, fundamentado na crença de que tudo pode ser provado e de que, se alguma proposição matemática ainda não houvesse sido demonstrada, era apenas uma questão de tempo, para que surgisse algum gênio para alargar as fronteiras do conhecimento científico.

Voltando nosso olhar para a Matemática, ainda na primeira metade do século XX, constatamos uma grande mudança na crença dos cientistas da época sobre o papel das ciências, vinculado à explicação de todos os fenômenos existentes. Da sistematização modernista, passamos para o caos pós-moderno que, na Matemática, pode ser simbolizado por um fato impactante, até para os dias atuais: nem tudo na Matemática pode ser demonstrado, ou seja, a Matemática é "incompleta". A demonstração, em 1931, do teorema da incompletude, feita pelo matemático austro-húngaro Kurt Gödel, mexeu com as estruturas, até então inabaláveis, das perspectivas da Matemática para o futuro. Desde então, várias conjecturas, como as de Goldbach e a hipótese do contínuo de Cantor, não dependem apenas do brilhantismo de algum grande pesquisador para serem refutadas ou demonstradas. Podem, simplesmente, não ser "explicadas" pelos sistemas axiomáticos existentes.

Essa aparente involução, ocorrida não só na Matemática, mas em outras ciências, mudou o paradigma modernista que imperava:

> De muitas maneiras, o século XX foi um século de desilusão, uma época de incerteza e ansiedade. No início do século, Werner Heisenberg e outros defensores da "interpretação de Copenhague" da física quântica mostraram que a certeza não existe e não pode existir no micromundo do subatômico (Gribbin, 1984)[1]. Alguns anos mais tarde, Kurt Gödel demonstrou que os fundamentos da Matemática não podiam ser provados em termos de consistência e completeza. Qualquer sistema matemático, especialmente aritmético, depende de suposições básicas que parecem intuitivamente corretas mas são logicamente improváveis (Kline, 1980[2]; Gödel, 1931/1963[3]). Nos níveis social e político, o holocausto de duas guerras nos mostrou que os doces sonhos de razão não nos levaram a uma sociedade melhor, mais justa ou mais moral. Aconteceu exatamente o oposto! (Doll Jr., 1997, p. 76).

O autor continua, enfatizando o sentimento que parece existir até hoje (ou, pelo menos, até a conclusão de sua obra, na década de 1990), relacionado à incerteza e à necessidade de tomar decisões de acordo com o tempo e o lugar, deixando clara a importância de adaptar-se constantemente a novas situações:

> Finalmente, nesta década de 1990 somos perseguidos pelas decisões econômicas, pessoais, políticas e sociais tomadas na década de 1980. Coisas que pareciam ter pouca importância na época, decisões tomadas de uma maneira quase descuidada, transformaram-se em

---

[1] GRIBBIN, J. *In search of Schrödingers cat.* New York: Bantam Books, 1984.
[2] KLINE, M. *Mathematics: the loss of certainty.* New York: Oxford University Press, 1980.
[3] GÖDEL, K. Uber formal unentscheidbare satz der principia mathematici unter verwandte systeme I. In: BRAITHEWAITE, R. B. (Ed.). *On formally undecidable propositions in "principia mathematica" and related systems.* New York: Basic Books, 1963. p. 173-198. Reimpressão de *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, 1931, v. 38.

> problemas monstruosos. Nós estamos diante do século XXI, do terceiro milênio, dominados por fortes elementos de dúvida e medo. Se temos alguma fé, e eu espero que sim, é uma fé baseada na dúvida, não na certeza. O que fazemos – e precisamos fazer –, fazemos sabendo que pode estar errado; não temos mais o sentimento de certeza e correção, no sentido universal e metafísico proposto pelos modernistas. Tal correção (ou verdade) absoluta não existe. Em vez disso, tomamos determinadas decisões que esperamos serem as corretas para este momento, para esta época e lugar (Doll Jr., 1997, p. 76).

No campo educacional, essas novas ideias podem ser associadas à valorização de organizações curriculares não lineares e não sequenciais; a programas e temas que não tenham início, nem fim, mas fronteiras e pontos de interseção ou focos, sempre abertos a reformulações e redefinições de metas e objetivos. Essa concepção de currículo vem ao encontro das metáforas de hipertexto (Lévy, 1993), aplicadas à organização curricular da disciplina "Matemática" na Educação Básica (Machado, 1994; Pires, 2000).

A partir dessa nova configuração pós-moderna, Doll Jr. (1997) estabelece quatro critérios para um currículo destinado a superar a visão modernista: riqueza, recursão, relações e rigor. Em nossa pesquisa de doutoramento (Silva, 2009) e em artigos publicados posteriormente (Pires; Silva, 2011; Silva, 2012, 2013; Silva; Pires, 2013), apropriamo-nos desses critérios, adaptando-os aos currículos de Matemática do Ensino Médio, e ainda construímos outros quatro: reflexão, realidade, responsabilidade e ressignificação.

Os oito Rs

Os critérios que enunciamos foram delineados a partir de contribuições de diversos campos: Filosofia, Educação, Antropologia e, é claro, da própria Educação Matemática. Nesta, aliás, nos inspiramos para propor uma educação pela Matemática, objetivando a promoção da igualdade social por intermédio de uma formação crítica de cidadãos que busquem uma transformação profunda na realidade que vivenciamos atualmente, marcada por desigualdade, intolerância e individualismo.

Para atingir essa meta, fomos influenciados grandemente pelas principais ideias da Educação Crítica e, mais especificamente, da Educação Matemática Crítica. Embora, nesta corrente da Educação Matemática, a discussão curricular não seja o grande mote, encontramos em Skovsmose (2001, p. 19) critérios para definir o que seria um currículo crítico:

> (1) A aplicabilidade do assunto: quem o usa? Onde é usado? Que tipos de qualificação são desenvolvidos na Educação Matemática? (2) Os interesses por detrás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto? (3) Os pressupostos por detrás do assunto: que questões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na Matemática? Que contextos têm promovido e controlado o desenvolvimento? (4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderia ter o assunto? Essa questão não se remete primariamente às aplicações possíveis, mas à função implícita em uma Educação Matemática nas atitudes relacionadas a questões tecnológicas, nas atitudes dos estudantes em relação a suas próprias capacidades, etc. (5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância?

A leitura desse excerto nos estimulou (ainda que este estímulo tenha durado pouco tempo) a propor um currículo de Matemática para o Ensino Médio, levando em conta somente esses aspectos enunciados pelo pesquisador. Porém, a partir de uma análise mais cuidadosa em cada uma das cinco "categorias" elencadas por ele, concluímos tratar-se de um "crivo pragmático" que poderia, inclusive, colocar em xeque a própria existência da Matemática como disciplina do Ensino Médio.

Quais conteúdos passariam incólumes por essa bateria de questionamentos? Provavelmente poucos. Talvez nenhum dos tradicionais conteúdos dos livros didáticos adotados nessa etapa de ensino.

Portanto, achamos que um currículo de Matemática deveria atender, concomitantemente, a duas dimensões distintas, que justificariam sua importância por diferentes aspectos: uma dimensão crítica, em que a escolha do conteúdo ficaria submetida à utilização ou não em projetos que visariam à transformação da sociedade; uma dimensão puramente matemática, voltada muito mais a questões organizacionais, em que a importância dos conteúdos se justificaria pela variedade de conexões temáticas. Para a dimensão crítica, propusemos quatro critérios: reflexão, realidade, responsabilidade e ressignificação. Já, para contemplar a dimensão puramente matemática, adaptamos os critérios de Doll Jr. (1997) – riqueza, recursão, rigor, relações – à Educação Matemática, uma vez que o pesquisador não tratou especificamente de nenhuma disciplina escolar, embora tivesse esboçado alguns exemplos.

Esses oito critérios foram divididos em dois grandes blocos, sendo o primeiro deles relacionado à seleção dos conteúdos – riqueza, reflexão, realidade e responsabilidade – e o segundo, referente à organização curricular – recursão, relações, rigor e ressignificação. Embora alguns desses critérios pudessem apresentar caráter tanto seletivo quanto organizacional, fizemos essa opção, levando em conta as principais características de cada um.

Neste artigo, trataremos apenas do critério "riqueza" e pretendemos detalhá-lo e justificar sua importância como referência para selecionar conteúdos matemáticos para o Ensino Médio. Além do aspecto relacionado à seleção de temas, faremos considerações metodológicas sobre o que compreendemos como opções que aperfeiçoem o trabalho do professor, ao estabelecer relações significativas entre tópicos aparentemente desconexos.

A riqueza

Doll Jr. (1997, p. 192) refere-se ao seu critério "riqueza", manifestando a profundidade e, ao mesmo tempo, a abertura que uma proposta curricular deve ter e as negociações feitas entre professores e alunos:

> Este termo [riqueza] se refere à profundidade do currículo, a suas camadas de significado, a suas múltiplas possibilidades ou interpretações. Para que os alunos e professores transformem e sejam transformados, um currículo precisa ter a "quantidade certa" de indeterminância, anomalia, ineficiência, caos, desequilíbrio, dissipação, experiência vivida.

O autor também menciona que a riqueza de um currículo está intimamente ligada às "problemáticas, perturbações e possibilidades" (Doll Jr, p. 192-193) inerentes a ele. Parece-nos que tal posição caracteriza uma negação à ideia de currículo como uma camisa de força que limita as possibilidades de criação e combinação dos temas.

Ao buscarmos critérios, estamos norteando, dirigindo a imensa gama de possibilidades para uma adaptação a cada situação, e não descartando conteúdos, *a priori*, sem uma ponderação sobre as potencialidades de sua adequação às múltiplas práticas escolares possíveis, incluindo projetos que atendam à especificidade e à demanda de determinada comunidade.

Dessa maneira, interpretamos que a expressão "quantidade certa", mencionada por Doll Jr., refere-se à necessidade de estabelecer proporções apropriadas entre a Matemática Crítica e uma Matemática que não dependa exclusivamente de questões ligadas à aplicabilidade para ganhar uma importância maior; ou seja, devemos dosar projetos que utilizem os conteúdos matemáticos como ferramentas de resolução de problemas ligados à realidade social, mas, ao mesmo tempo, devemos valorizar os conteúdos puramente matemáticos, que despertem nos alunos o interesse por investigar, de maneira teórica, a ciência Matemática, de forma similar ao trabalho dos próprios matemáticos que, contrariamente ao que os estudantes possam imaginar, são extremamente criativos em busca de novas construções, que conduzam a novas teorias.

A dose de "indeterminância, anomalia, ineficiência, caos, desequilíbrio, dissipação, experiência vivida", citada por Doll Jr., possui, a nosso ver, duas dimensões, quando pensamos nos currículos de Matemática: uma vinculada com a aplicabilidade crítica da Matemática e outra relacionada à própria ciência de referência.

Na primeira dimensão, ligada à aplicabilidade crítica da Matemática, os conteúdos estariam a serviço da problemática envolvida para solucionar determinada questão. Portanto, não poderiam ser selecionados antes da própria determinação das situações que seriam estudadas. E mais: durante o processo de resolução, outros conteúdos poderiam ser abordados ou deixados de lado, desde que fique clara sua aplicabilidade – ou não. Nessa dimensão, o termo "crítico", que utilizamos, refere-se às características que Skovsmose (2001) descreveu, ao definir um currículo crítico.

Na segunda dimensão, ligada diretamente à ciência de referência, os conteúdos, os temas e os eixos podem ser escolhidos de maneira tal, que apresentem a Matemática por completo, ou seja, a riqueza da própria Matemática, em toda a sua pluralidade: relações entre seus vários campos de pesquisa, falibilidade e abertura a novas construções. Portanto, não seria contraditório com aquilo que descrevemos até aqui – escolher conteúdos universais –, pois o objetivo seria mostrar o sentido da ciência de referência nas ligações existentes entre os diversos conteúdos matemáticos apresentados.

Mas onde estariam a indeterminância, a anomalia, a ineficiência, o caos, o desequilíbrio, a dissipação e a experiência vivida, mencionados por Doll Jr.? Mesmo determinando eixos universais, caberia a cada escola e, mais especificamente, a cada professor de Matemática, escolher a profundidade com que abordaria e apresentaria a ciência Matemática aos seus alunos.

Matemática: a ciência dos padrões

Exemplificando como o critério "riqueza" poderia emergir nas diversas disciplinas, Doll Jr. (1997, p. 193) refere-se à Matemática, abordando somente a questão da exploração e da busca por padrões, utilizando os computadores como possibilidade para atingir esse objetivo:

> A Matemática – um assunto em que a aritmética computacional desempenha apenas um pequeno papel – adquire sua forma de riqueza ao "brincar com padrões". Obviamente, isso pode ser feito *par excellence* com os computadores – instrumentos que qualquer currículo matematicamente rico deveria possuir – mas os computadores não são uma condição *sine qua non*. Podemos ver padrões, desenvolvê-los e brincar com eles em simples combinações numéricas (como nas séries de Fibonacci) ou na geometria euclidiana ou fractal. Separar um quadrado em triângulos retos é um exemplo do primeiro; o triângulo de Sierpinski é um exemplo do último. Em todos os níveis, do jardim de infância à Universidade, a Matemática pode ser tratada significativamente como "brincar com padrões".

Essa conexão entre Matemática e padrões não é uma novidade. Alguns anos antes de Doll Jr. publicar seu livro (o original, em inglês, foi publicado em 1993), o matemático estadunidense Lynn Arthur Steen publicou na Revista *Science* um artigo que provocaria grandes repercussões na Educação

Matemática. No seu texto, Steen descreve a ciência matemática do século XX, ressaltando seus progressos e as linhas científicas que mais se destacavam. Na conclusão, o pesquisador define a Matemática como "a ciência dos padrões":

> A matemática é a ciência dos padrões. O matemático procura padrões em números, no espaço, na ciência, nos computadores, e na imaginação. [...] Aplicações da Matemática usam esses padrões para "explicar" e prever fenômenos naturais que se encaixam nos padrões. Padrões podem implicar outros padrões, muitas vezes gerando padrões de padrões. Desta forma, a matemática segue sua própria lógica [...] (Steen, 1988, p. 240, tradução nossa).

Talvez esse ensaio publicado por Steen tenha tido maior repercussão pelo fato de, na época, ele ocupar a presidência da *Conference Board of the Mathematical Sciences*, uma organização que abrange 17 sociedades científicas, entre elas a *American Mathematical Society* (AMS), a *Association of Mathematics Teacher Educators* (AMTE), o *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM) e o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Essa última sociedade foi responsável pela publicação de duas diretrizes curriculares que orientaram os assuntos e a forma de abordar os conteúdos nas escolas dos Estados Unidos nas últimas décadas: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) e *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Os *Standards*, como ficaram conhecidos internacionalmente, trazem o estudo de padrões como uma ação recorrente nos documentos publicados.

O mais recente (NCTM, 2000) divide os conteúdos a serem trabalhados, durante os 12 anos da educação básica estadunidense, em 5 blocos: (i) números e operações; (ii) álgebra; (iii) geometria; (iv) medidas; (v) análise de dados e probabilidade. Em todos esses blocos, encontramos referência ao estudo de padrões. No entanto, parece-nos que o bloco algébrico dá a eles maior ênfase, pois encontramos, entre os próprios objetivos para o ensino deste assunto: compreender padrões, relações e funções.

Na etapa equivalente ao Ensino Médio Brasileiro (*Grade 9-12*), os autores dos *Standards* propõem a generalização de padrões, abordando assuntos como funções e enfatizando o caráter recursivo de algumas delas

(NCTM, 2000, p. 296).

Os pesquisadores salientam que a Geometria também é um bloco no qual o estudo de padrões pode enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem. Para tanto, os estudantes devem descobrir padrões e formular conjecturas sobre eles. O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica serviria como catalisador nesse processo (NCTM, 2000, p. 309-310). O documento ainda enfatiza a importância de utilizar os padrões para produção de provas, bem como a necessidade de explorar diferentes representações para a análise de modelos, sejam eles numéricos, figurais, gráficos ou algébricos.

Antes mesmo da publicação da versão mais recente dos *Standards*, alguns pesquisadores também difundiram, em obras que se tornaram clássicas, como Devlin (1994) e Resnik (1997), a importância dos padrões matemáticos. Aliás, o filósofo da Matemática, Michael Resnik, professor da *University of North Carolina at Chapel Hill*, talvez tenha sido o grande inspirador da ideia de descrever a Matemática como a ciência dos padrões, pois, em seu artigo publicado em 1981, encontramos fortes indícios dessa relação, a começar pelo próprio título: "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference".

O objetivo de Resnik (1981) não era provocar discussões curriculares sobre os conteúdos matemáticos a serem abordados na educação básica, mas, sim, defender seu ponto de vista filosófico realista, no qual busca olhar para a Matemática com seu caráter ontológico. Embora o pesquisador enfatize sua crença em uma corrente filosófica que entrou em crise já no século XV, tendo sido confrontada com o idealismo cartesiano (Meneghetti, 2003, p. 137), ele ressalta que sua proposta é "uma forma de realismo matemático" (Resnik, 1997, p. 10, tradução nossa). Neste artigo, não entraremos em discussões filosóficas, bem como não assumiremos a postura realista de conceber a Matemática como uma ciência formada por objetos que existem independentemente dos sujeitos e da consciência (Chaui, 2000, p. 306).

Orton (1999, p. vii-viii) menciona vários outros pesquisadores que também citam a importância de estudar a Matemática por intermédio das generalizações oferecidas pelos padrões:

> Matemáticos e educadores há muito se entusiasmam com a importância do padrão em matemática. Sawyer (1955, p.

> 12)[4] afirma que "a matemática é a classificação e estudo de todos os padrões possíveis". Williams e Shuard (1982, p. 330)[5] sugeriram que "a busca de [...] ordem e padrão é uma das forças motrizes de todo o trabalho matemático com as crianças". Biggs e Shaw (1985, p. 1)[6] escreveram: "[...] A matemática pode ser pensada como uma busca por padrões e relações". Mottershead (1985, p. vii)[7] descreveu a matemática simplesmente como "o estudo dos padrões".

Alguns grupos também foram constituídos para investigar essa estreita relação entre os padrões e a possibilidade de explorar situações que tornem a Matemática mais atrativa aos alunos da educação básica.

Na Inglaterra, o grupo de pesquisa "padrão em Matemática" foi criado na Faculdade de Educação da Universidade de Leeds, no início de 1992, com o objetivo de "fornecer estrutura e suporte aos estudos de desenvolvimento da percepção das crianças, concepção e utilização de padrões na aprendizagem da matemática" (Orton, 1993, p. 39, tradução nossa).

No realizando uma busca simples, no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[8], por dissertações e teses que possuíssem as palavras "padrões", "educação" e "Matemática" no seu título ou resumo, encontramos sete trabalhos. Quatro dessas pesquisas foram orientadas pela professora doutora Silvia Dias Alcântara Machado, do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Essa pequena investigação revela a concentração de estudos sobre o tema em um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e em poucos pesquisadores Brasileiros. Também demonstra que as investigações envolvem, predominantemente, os padrões como forma de tratar aspectos algébricos abordados na educação básica.

---

4 SAWYER, W. W. *Prelude to Mathematics*. Harmondsworth: Penguin, 1955.
5 WILLIAMS, E.; SHUARD, H. *Primary Mathematics Today*. Harlow: Longman Group Limited, 1982.
6 BIGGS, E.; SHAW, K. *Maths Alive!* London: Cassell, 1985.
7 MOTTERSHEAD, L. *Investigations in Mathematics*. Oxford: Basil Blackwell, 1985.
8 Disponível em: http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/Teses.do

Em Portugal, a professora Isabel Vale coordena, desde 2006, o projeto "Matemática e padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores", que tem por objetivo "estudar o alcance de uma abordagem curricular centrada no estudo de padrões, no desenvolvimento do conhecimento matemático dos estudantes da escolaridade básica (JI-9)[9] e na formação de professores" (Vale et al., 2008, p. 1).

Isabel Vale e seus colegas reiteram a observação de outros autores quanto à inexistência de uma definição que caracterize padrão como um conceito matemático. No entanto, alguns termos nos dão indícios de que determinada atividade, sequência didática, problema ou investigação pode tratar-se de uma proposta que prevê a análise e a construção de padrões por parte dos estudantes: "regularidade, sequência, sucessão, repetição, lei de formação, regra, ordem, generalização, fórmula, variável, invariante, configuração, disposição, ritmo, motivo, friso, pavimentação" (Vale et al., 2008, p. 3).

Isso nos leva a refletir sobre qual ênfase deve ser dada na escolha de conteúdos: devem-se priorizar os próprios conteúdos *per se* ou atividades que explorem a riqueza da Matemática, utililizando-se dos conteúdos? Parece-nos razoável chamar de "conteúdos matemáticos" apenas e tão somente os objetos matemáticos passíveis de definição, ou seja, conceitos matemáticos. Padrão não é um conceito matemático, mas pode ser uma característica estrutural de vários conceitos.

Usando essa nova *lente*, podemos justificar conteúdos tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio, não pela importância intrínseca do tema, mas pela forma como ele é trabalhado. Por essa perspectiva, a metodologia e a organização dos assuntos têm um papel fundamental na justificativa da inserção ou da exclusão de um tópico do rol de matérias abordadas nessa etapa da educação básica.

---

9 Etapa escolar portuguesa equivalente ao Ensino Fundamental Brasileiro.

Conteúdos explorados por intermédio de padrões

A partir das reflexões feitas até aqui, podemos analisar as possibilidades de abordar, na perspectiva do estudo e da construção de possíveis padrões matemáticos, alguns dos conteúdos tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio.

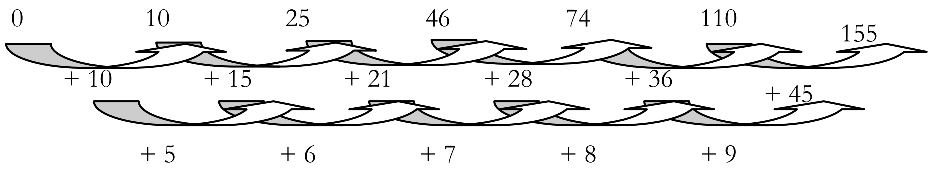
As progressões aritméticas e geométricas são temas quase obrigatórios já no primeiro ano do Ensino Médio. Embora esses conteúdos tenham sua essência ligada à exploração de padrões numéricos, ao delimitar os casos possíveis de sequências a apenas duas possíveis regras de formação (uma ligada à adição e outra à multiplicação), as possibilidades de investigação dessas sucessões ficam extremamente limitadas.

A nosso ver, ao explorarmos padrões numéricos, o aspecto mais importante seria abordar sua construção, bem como descrevê-los matematicamente, por exemplo, por intermédio da lei que define o termo geral, mas não só isso: também valorizando sua descrição oral e escrita, sem a simbologia matemática, apenas por intermédio do uso da língua materna. Isso já é feito no Ensino Fundamental, quando há a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico – a chamada "pré-álgebra". No entanto, parece que o enfoque muda completamente, quando são trabalhadas as ideias de sequências numéricas no Ensino Médio. Aliás, as sequências não são exploradas, pois, como já dissemos, limitam-se a dois casos: P.A. e P.G.

A ideia de explorar padrões dentro de padrões gera inúmeras possibilidades. Por exemplo, ao analisarmos a sequência "0, 10, 25, 46, 74, 110, 155, ...", podemos recorrer a um processo iterativo de análise para investigar as relações existentes. Dessa forma, teríamos, como revelado na Figura 1.

Essa mesma proposta poderia ser feita, utilizando outras operações, bem como termos algébricos, ao invés de números. Neste caso, a obtenção dos próximos termos é bem mais simples do que a descrição matemática do termo geral. Verificar quando é possível escrever o termo geral, em função do primeiro, e quando precisamos descrevê-lo, em função de mais de um termo (os dois antecessores, por exemplo), é uma discussão pertinente – que não existe, quando tratamos apenas de P.A. e P.G., pois elas são sempre descritas em função do primeiro termo e suas respectivas razões.

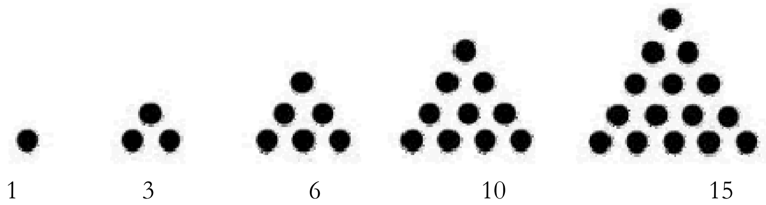
Figura 1 – Padrão aditivo obtido por processo iterativo.



Fonte: Produção dos autores

Atividades que envolvam sequências geométricas também são possibilidades de examinar padrões, proporcionando situações de contextualização dentro da própria Matemática. Situações que tratem dos números triangulares (Figura 2), quadrados perfeitos, pentagonais, entre outros, assim chamados pela forma obtida a partir da disposição de um certo número de pontos, dão aos estudantes a oportunidade de relacionar aritmética, geometria e álgebra. Esta última, por intermédio do estudo do termo geral da sequência.

Figura 2 – Sequência de números triangulares



Fonte: Produção dos autores

No Ensino Médio, as séries são abordadas somente quando se faz referência à soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão, em módulo menor que um. Curioso notar que a demonstração dessa fórmula usa o conceito de limite de uma sequência, tema que não é usualmente abordado no Ensino Médio. A nosso ver, essa é, na organização curricular da Matemática no Ensino Médio, uma falha que deve ser discutida, porém esse não é o foco deste artigo.

O que pretendemos é suscitar uma discussão sobre a possibilidade de incluir o estudo da convergência ou da divergência de algumas séries, já no Ensino Médio, porém não da forma como é atualmente abordada em alguns cursos no Ensino Superior. Defendemos que esse tipo de enfoque de séries (classificando-as como convergentes ou não) é uma maneira de levar os estudantes a levantar conjecturas, validando-as ou refutando-as por intermédio da linguagem matemática disponível. Em geral, a ênfase atual está em encontrar a soma da série (no caso do Ensino Médio, apenas a P.G. com infinitos termos e razão, em módulo menor que um), sem que haja uma discussão sobre os porquês da convergência desta série.

Séries como a harmônica, com as várias demonstrações apresentadas ao longo da história e sua relação com os padrões musicais, bem como alguns números racionais que podem ser expressos na forma de série, são assuntos matemáticos ignorados no Ensino Médio. A questão principal é que os padrões não podem ser revelados, quando analisamos exemplos pontuais, e, a nosso ver, progressões aritméticas e progressões geométricas são casos particulares de outros que não são tratados: sequências e séries, respectivamente.

O tema "função", um dos principais assuntos matemáticos abordados no Ensino Médio, também pode ser tratado, levando em consideração o estudo de padrões. O próprio conceito de função está ligado à ideia de padrão. Isso porque temos uma relação entre dois conjuntos, que segue uma lei de formação, além do fato de que todo elemento de um conjunto deve ter um único correspondente no outro. Essa lei de formação estabelece diferentes padrões, e o estudo das características de cada padrão determinado por essas leis é o objeto de estudo a ser ensinado.

Além da própria definição de função, que pode nos conduzir à interpretação deste conceito como um padrão matemático, vislumbramos, nas representações gráficas das funções, uma grande oportunidade para identificar, classificar e investigar padrões, bem como a possibilidade de integrar diferentes representações no estudo deste tema.

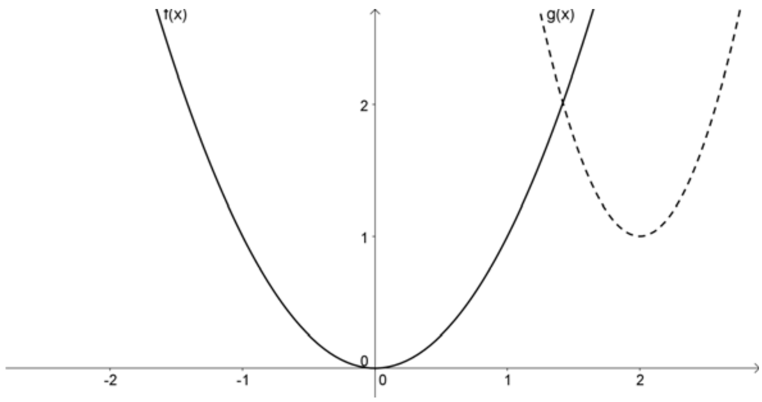
Por exemplo, o estudo da representação gráfica da função quadrática pode ser feito a partir da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais e $a \neq 0$. Mas também pode ser feito por intermédio da forma canônica $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Afirmamos que a segunda forma, ainda que pouco abordada nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, quando comparada à primeira, é a mais recomendável, se pretendemos investigar os padrões gráficos gerados a partir de uma família de funções quadráticas. Isto pelo fato de a forma canônica apresentar explicitamente as coordenadas do vértice da parábola: $V = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

Assim, basta estudar graficamente as funções quadráticas da forma $y = k(x+m)^2 + n$ e analisar as mudanças ocorridas, no gráfico da parábola, quando variamos k, m e n (Gravina; Santarosa, 1999, p. 85).

A Figura 3 mostra quais as transformações que geram a função $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$ (linha tracejada), a partir da função $f(x) = x^2$ (linha contínua). O coeficiente k determina o quanto o gráfico da parábola ficará "mais fechado" ou "mais aberto". Já os valores de m e n estão relacionados, respectivamente, às translações do gráfico na horizontal e vertical:

Figura 3 – Gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$.



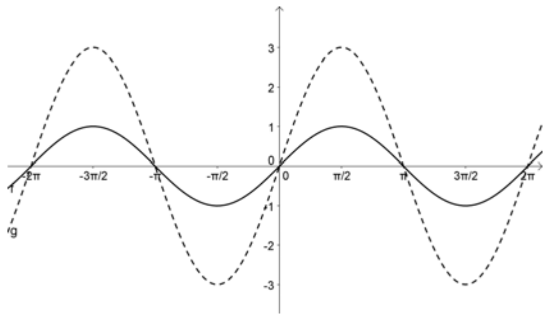
Fonte: Produção dos autores

Do mesmo modo, parte da abordagem das funções trigonométricas ocorreria por intermédio do estudo das transformações gráficas. Tomando como exemplo a função seno, bastaria compreender os significados de a, b, c e d contidos nas funções trigonométricas descritas pela forma

$y = a \cdot \text{sen}(bx + c) + d$.

Na Figura 4, a função $f(x) = \text{sen}\, x$ é comparada a $g(x) = 3\text{sen}\, x$, triplicando a amplitude da função e evidenciando o papel do coeficiente a na representação gráfica.

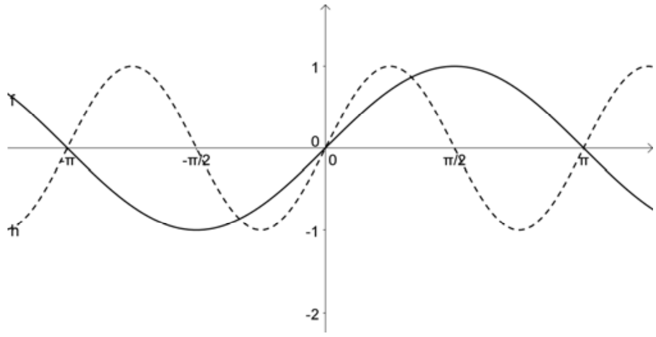
Figura 4 – Gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = 3\text{sen}\, x$.



Fonte: Produção dos autores

Já na Figura 5, comparamos duas funções na forma $y = \text{sen}(bx)$, para $b = 1$ e $b = 2$. Neste caso, os estudantes investigariam que a variação de b produz padrões gráficos que possuem períodos variados. Dobrando-se o valor de b, o período da função fica reduzido à metade.

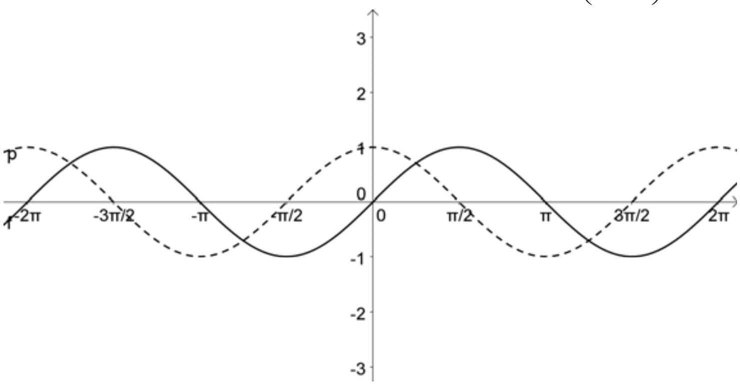
Figura 5 – Gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $h(x) = \text{sen}\, 2x$.



Fonte: Produção dos autores

Em funções do tipo $y = \text{sen}(x + c)$, o "significado" gráfico de c está associado à translação do gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ para a direita ou para esquerda. Na Figura 6, $c = \frac{\pi}{2}$, produzindo uma translação para a esquerda do gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$:

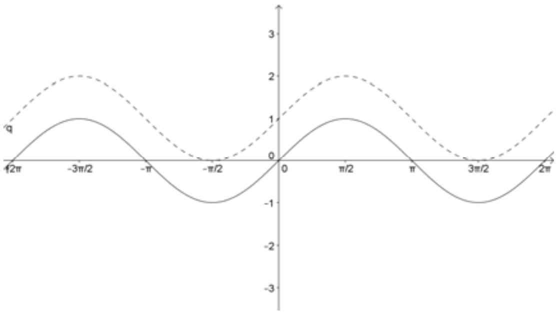
Figura 6 – Gráficos de $f(x) = \text{sen}\, x$ e $p(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



Fonte: Produção dos autores

Finalmente, para funções $y = \text{sen}\, x + d$, o valor numérico de d corresponderia à translação do gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ para cima ou para baixo. No caso da Figura 7, $d = 1$ produz uma translação para cima do gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$:

Figura 7 – Gráficos de $f(x) = \text{sen}\, x$ e $q(x) = \text{sen}\, x + 1$.



Fonte: Produção dos autores

No aspecto organizacional, embora compreendamos que o critério "riqueza" seja predominantemente seletivo, podemos conjecturar que algumas configurações facilitam mais que outras a identificação de padrões. Como já vimos neste artigo, é possível explorar padrões gráficos em funções quadráticas, por intermédio do estudo da forma canônica dessa função. O mesmo pode ser feito com os gráficos de funções afins. No entanto, o estudo das funções afins e quadráticas como casos particulares de funções polinomiais acaba limitando a investigação de suas representações gráficas.

O estudo de sinais, a identificação de pontos de máximos e mínimos, bem como a determinação dos "zeros" da função e sua relação com os pontos de intersecção da curva da função com o eixo das abscissas, seriam otimizados, se fossem investigados de maneira integrada, sem obedecer a maneira linear, como é feito atualmente. Nossa proposta é, ao invés de os livros didáticos dedicarem capítulos específicos para o estudo de cada um desses casos particulares de funções polinomiais, apresentar, de uma só vez, os tópicos citados no início deste parágrafo.

Não temos a intenção de fazer uma apologia do uso do Cálculo Diferencial no Ensino Médio, mas o uso de técnicas de cálculo de derivadas facilitaria o trabalho de identificação de máximos e mínimos.

Da mesma forma, o tema "polinômios", usualmente trabalhado apenas no último ano do Ensino Médio, serviria como suporte para discussão de raízes de funções polinomiais de grau maior ou igual a três. Isso implica um novo desenho para o currículo de Matemática do Ensino Médio: sairia a divisão, em casos particulares de funções (afim e quadrática), e entraria o estudo dos padrões de crescimento, descrescimento, sinais e raízes dessas funções.

O uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC)

É evidente que o estudo gráfico das funções apresentadas até aqui só seria possível com uso de *softwares*. Nós utilizamos o *GeoGebra*, mas poderíamos escolher vários outros programas livres, disponíveis para *download* na internet, ou até mesmo utilizar calculadoras gráficas. Seria enfadonho para os alunos construir esses gráficos com lápis e papel. Mas a justificativa para o uso deste recurso nos parece clara e não está simplesmente relacionada à praticidade:

> Calculadoras gráficas e *softwares* que possibilitam o traçado de gráficos de funções têm sido utilizados de forma acentuada ao longo dos anos [referindo-se à experiência do primeiro autor com uma turma de graduação em Biologia]. Praticamente todos os tópicos são iniciados a partir de atividades com a calculadora. As atividades, além de naturalmente trazer *a visualização* para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: *a experimentação*. As novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física (Borba; Penteado, 2005, p. 37, grifos nossos).

O fato de proporcionar aos estudantes a possibilidade de visualização e experimentação – estabelecendo conjecturas e podendo refutá-las ou validá-las – faz com que os aprendizes atuem como protagonistas da atividade matemática.

É claro que o papel do professor é fundamental, porém não mais como protagonista, mas como mediador do processo de construção do conhecimento do seu alunado. O docente deve arquitetar situações de aprendizagem de tal maneira que os alunos possam explorar as mais variadas estratégias de investigação. Sobre a tarefa do professor em atividades que visam à padronização algébrica, Oliveira (2008, p. 299) afirma:

> A relação entre tecnologias e generalização de padrões em álgebra não ocorre sem intencionalidade, ou seja, a composição do uso de TICs nesse âmbito deve ocorrer através de uma estratégia que preveja o trabalho do professor em tarefas de transposição [de uma noção intuitiva de padrão em direção à manipulação algébrica das propostas de solução para determinado problema], nas quais as TICs podem ter importante papel.

Na mesma perspectiva construtivista, Valente (1993, p. 24) distingue dois tipos de paradigmas pedagógicos – instrucionista e construcionista:

> Uma maneira [de usar o computador na educação] é

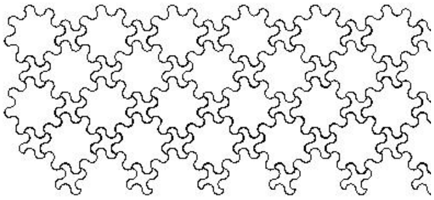
> informatizando os métodos tradicionais de instrução. Do ponto de vista pedagógico, esse seria o paradigma instrucionista. No entanto, o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu conhecimento. Nesse caso, o conhecimento não é passado para o aluno. O aluno não é mais instruído, ensinado, mas é o construtor do seu próprio conhecimento. Esse é o paradigma construcionista onde a ênfase está na aprendizagem ao invés de estar no ensino; na construção do conhecimento e não na instrução.

Valente (1997) defende que alguns *softwares* que usam linguagens de programação contribuem para a construção do conhecimento dos alunos. Com o uso desses programas, entre eles o LOGO, o estudante ensina o computador, não o contrário.

A linguagem LOGO, criada por Seymour Papert, na década de 1960, proporciona uma maneira adequada para explorar a riqueza dos padrões geométricos e, concomitantemente, propicia situações de ensino e de aprendizagem que coloquem os aprendizes em condições de construir conhecimento matemático com a mediação adequada do professor.

O *software* SuperLogo possui o comando "aprenda", que possibilita uma série de criações por parte dos alunos. A título ilustrativo, podemos citar a construção do "mosaico de Escher[10]", que explora belíssimos padrões geométricos, como mostra a Figura 8:

Figura 8 - Mosaico de Escher

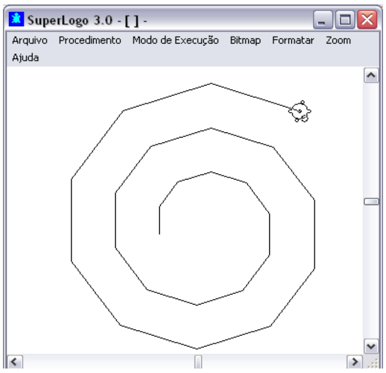


[10] Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) foi um artista holandês cujas obras são amplamente citadas por educadores matemáticos por possuírem complexas simetrias, bem como representações que podem ser exploradas nas aulas de geometria, sinalizando uma relação estreita entre a arte e a matemática.

Fonte: Nascimento e Peres, 2011, p. 5.

Outro exemplo de utilização deste potencial criativo do *software* está na exploração do comando "espiral" (Rapkiewicz; Barcelos; Batista, 2003, p. 6-7), aqui ilustrado na Figura 9. Este procedimento requer do usuário a definição de dois parâmetros: o comprimento de cada segmento (incrementado regularmente por um valor predefinido) e a rotação realizada pela tartaruga no sentido horário. Dessa forma, uma espiral com comprimento inicial igual a 30 e rotação de 36°, no sentido horário, resultaria na seguinte figura:

Figura 9 – Utilização do comando "espiral" para rotação de 36° no sentido horário.

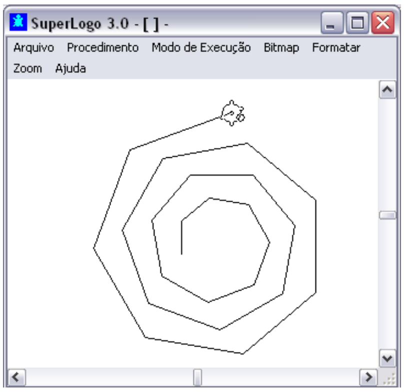


Fonte: Produção dos autores

Esse padrão de segmentos paralelos só é formado porque 36 é um divisor de 360 (volta completa). Isso já não ocorrerá, se escolhermos, por exemplo, o ângulo 50° (Figura 10). Contudo, o padrão continua sendo utilizado, porém após cinco "voltas" completas da tartaruga. Isso porque o menor múltiplo comum entre 50 e 360 é 1.800. Portanto, após um giro de 1.800° (5 voltas), a tartaruga estaria posicionada novamente na mesma direção e no mesmo sentido da posição inicial, reiniciando o padrão de 5 voltas.

Essa similaridade entre parte e todo, existente nas formas geométricas mostradas até aqui, permite-nos defini-las como fractais. Para Feder (1988 apud Barbosa, 2005, p. 18), "um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos". Os fractais seriam um tema potencialmente importante para explorar a riqueza dos padrões, não só em termos de conteúdo, como em atitudes e procedimentos dos estudantes.

Figura 10 – Utilização do comando “espiral” para rotação de 50° no sentido horário.



Fonte: Produção dos autores

Barbosa (2005, p. 19-20) apresenta uma série de atividades para serem exploradas em sala de aula. Também relaciona justificativas para a inserção deste tema nos currículos da educação básica; entre elas, a possibilidade de conexões com várias ciências, o uso de tecnologias e a beleza das formas geradas. No entanto, a grande justificativa está na condição, proporcionada com o estudo do tema, de levar o estudante ao estabelecimento de conjecturas, por intermédio da análise e da construção de fractais. Isso implica a adoção de uma metodologia singular, que pode ser a mais adequada para trabalhar com esses tipos de situações: a investigação matemática.

A investigação matemática

A metodologia de investigação matemática está presente nos currículos prescritos de vários países, destacando a possibilidade de participação dos estudantes em situações similares ao trabalho criativo do próprio matemático. Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 10) trazem algumas características importantes dessa metodologia:

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é o estilo de

conjectura – teste – demonstração.

Para isso, são apresentadas situações abertas que propiciem uma atitude investigativa por parte dos estudantes. Neste ponto reside uma das principais diferenças entre a situação-problema e a investigação matemática: na primeira, a resposta é única e conhecida antecipadamente pelo professor; na segunda, não existe resposta previamente definida, pois a situação pode levar a vários encaminhamentos, dependendo das conjecturas levantadas pelos estudantes.

Essa "abertura" presente no enunciado de uma atividade de investigação, propiciando aos alunos o estabelecimento das mais variadas suposições, requer do professor uma "reflexão-matemática-durante-a-ação", validando ou refutando as hipóteses levantadas, o que torna esta metodologia extremamente complexa de ser implementada, pois implica a existência de um conhecimento matemático e pedagógico profundo por parte do docente.

Contudo, entendemos que esse leque de possibilidades de abordagem oferece condições para o estabelecimento de conexões entre diversos conteúdos, embora nem sempre seja possível controlar tais conexões, pois esse controle está muito mais nas mãos do aluno que do professor. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p. 140): "a riqueza de explorações que as investigações proporcionam facilita o estabelecimento de conexões entre temas matemáticos, aspecto que, por vezes, é descurado na prática em virtude das dificuldades de concretização".

Os pesquisadores portugueses destacam-se mundialmente por suas contribuições à Educação Matemática envolvendo este tipo de metodologia. João Pedro da Ponte contribuiu grandemente para a divulgação e a implementação dessas estratégias metodológicas e é também um dos responsáveis pela atual reformulação nos currículos de Matemática da educação básica portuguesa.

Entendemos que essa discussão também deva ser amplamente realizada no não só do ponto de vista metodológico, mas também por intermédio de pesquisas relacionadas às questões curriculares, bem como à formação de professores.

Considerações finais

Fizemos uma breve descrição histórica dos motivos que nos levaram a formular os oito critérios para seleção e organização de conteúdos matemáticos no Ensino Médio. Dos três Rs que configuravam o currículo estadunidense no início do século XX, reflexo da grande demanda por mão de obra pouco qualificada, passamos pelos quatro Rs pós-modernos, enunciados por Doll Jr., em contraposição ao modelo modernista, vigente até a primeira metade do século passado.

A partir dessas reflexões, relacionamos oito Rs, buscando aliar perspectivas aparentemente antagônicas: de um lado, a necessidade de comunicar a Matemática construída ao longo de séculos, por várias civilizações e de diversas formas; de outro, a perspectiva influenciada pela educação crítica, estabelecendo formas de educar pela Matemática e construindo-a de tal maneira que promova um impacto social considerável, por intermédio da busca pela igualdade social.

Neste artigo, optamos por apresentar um dos critérios: a riqueza. Salientamos que não pretendemos justificar a inclusão ou a exclusão de determinado tema somente por este critério ou por todos os argumentos expostos até aqui. Uma das conclusões de nosso estudo é a impossibilidade de analisar temas estanques, sem investigá-los em um contexto curricular, ainda que hipotético. Em outras palavras, não é possível escolher um conteúdo e construir um crivo que adote nosso modelo, verificando se cumpre ou não cada um deles. Isso até pode ser feito, desde que tenhamos uma configuração de temas organizados *a priori*. Somente desta forma poderíamos verificar as conexões e a potencialidade do currículo construído.

Dirigindo nossa lente apenas para o critério "riqueza", poderíamos concluir que os temas potencialmente importantes são aqueles que podem explorar padrões matemáticos nas mais variadas representações: numérica, gráfica, geométrica, entre outras. Mas não só isso: a riqueza em um currículo de Matemática deve explorar esta ciência em suas várias possibilidades, incluindo os campos temáticos que a constituem (Álgebra, Teoria dos Números, Álgebra Linear, Análise, Estatística e Probabilidade, Geometria, Lógica, entre outros), bem como abordar os aspectos utilitários, especulativos e "puramente" matemáticos. Essencialmente, procuramos mostrar que, atualmente, apresentamos um retrato muito pobre da Matemática aos alunos do Ensino Médio.

Portanto, salientamos que a busca por padrões não pode ser um critério único, como já dissemos, pois poderíamos dar à Matemática um caráter estruturalista que busca nas generalizações e na identificação de modelos sua principal meta. Também precisamos dar importância à variedade, olhando para os diversos sistemas axiomáticos da Matemática: as diferentes geometrias, as diferentes lógicas, entre outros campos.

Além das alternativas apresentadas até aqui, acreditamos que o critério "riqueza" pode ser explorado por intermédio de características matemáticas que se repetem em vários assuntos. Assim, a existência de "inversos" pode ser explorada nos números, nas funções e nas matrizes, por exemplo, produzindo analogias e analisando as consequências desse fato para enunciar propriedades, conjecturas que podem ou não se tornar teoremas.

A simetria também poderia ser tratada como um bloco que não ficaria reduzido simplesmente à Geometria, mas exploraria, por exemplo, o estudo de matrizes quadradas e o cálculo de determinantes. A própria relação de simetria existente entre o gráfico de determinada função e sua inversa já produz uma riqueza de interconexões dos conteúdos que justificaria, em parte, sua importância para o ensino. Por exemplo, as funções exponenciais e logarítmicas que são inversas e cujos gráficos são simétricos em relação ao eixo das bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Ainda abordando esse critério, os teoremas podem representar uma fonte que explorará a riqueza de suas formulações. As diferenças existentes entre as linguagens proposicionais "... e ...", "... ou ...", "não...", "se ... então ...", "... se, e somente se, ...", "... sempre que ...", "... equivalente a ...", "... portanto ...", podem ser estudadas e esmiuçadas. É interessante notar que, em alguns casos, parece haver um vício, ao explorar o teorema enunciado na forma "... se, e somente se, ..." em apenas um sentido. Aqui, novamente, buscamos a variedade e não a unicidade. Essas expressões usadas na linguagem materna e na linguagem matemática podem ter sentidos diferentes, e sua comparação mostraria uma outra *riqueza*.

Uma constatação, feita a partir da análise de várias pesquisas que serviram de referência para a escrita deste artigo, é a excessiva discussão, no Ensino Fundamental, de questões ligadas às investigações matemáticas, ao estudo e à formulação de sequências de ensino que envolvam a exploração de padrões, e a quase inexistência de abordagens envolvendo esses aspectos no Ensino Médio.

Da mesma forma, encontramos um número significativo de propostas envolvendo padrões algébricos, principalmente na chamada "pré-algebra", ou seja, a transição da aritmética para a álgebra, por intermédio da identificação de padrões sequenciais e termos gerais.

Esse resultado traz novas perspectivas de investigação, não só no campo curricular, mas também nas linhas relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática: desenvolver atividades, principalmente geométricas, que explorem aspectos relativos às investigações e aos padrões com conteúdos tradicionalmente ensinados na etapa final da educação básica, bem como verificar a possibilidade de inserção de novos temas, como os fractais.

O critério "riqueza" está essencialmente ligado à Matemática como ciência de referência, pois os próprios matemáticos referem-se a ela como "a ciência dos padrões". Portanto, isso suscita uma discussão cada vez mais recorrente: a contextualização da Matemática dentro dela própria. Nesta perspectiva, o apego à interpretação de contextualização como algo relativo ao cotidiano dos estudantes fica num plano secundário.

Por fim, enfatizamos que a metodologia de investigação matemática parece-nos a mais harmoniosa para tratar conteúdos que atendam ao critério "riqueza". A perspectiva de construir situações investigativas e exploratórias que levem os estudantes a estabelecer conjecturas e validá-las ou refutá-las proporciona uma nova forma de trabalhar Matemática em sala de aula. Contudo, é imprescindível formar professores que estejam preparados para lidar com variáveis tão complexas e, ao mesmo tempo, enriquecedoras.

O desafio está posto: criar hipotéticos currículos de Matemática e investigar a viabilidade de sua implementação, aliando boas metodologias com boas situações de ensino e de aprendizagem e, sobretudo, conteúdos que enalteçam a riqueza da Matemática.

Referências

ALMEIDA, M. M. M. Estratégias de generalização de padrões de alunos do ensino fundamental do ponto de vista de seus professores. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ANDREZZO, K. L. Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra por alunos sem acuidade visual. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ARCHILIA, S. Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BARBOSA, R. M. Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. 3. ed., 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

CHAUI, M. Convite à Filosofia. São Paulo: Ática, 2000.

DEVLIN, K. Mathematics: The Science of Patterns. New York, NY: W. H. Freeman, 1994.

DOLL Jr., W. E. Currículo: uma perspectiva pós-moderna. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

FEDER, J. Fractals. New York: Plenum Press, 1988.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. Informática na Educação: teoria & prática, Porto Alegre, v. 2, n. 1, maio 1999.

LÉVY, P. As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: Editora 34, 1993.

MACHADO, N. J. Epistemologia e didática: a alegoria como norma e o conhecimento como rede. Tese de Livre-Docência, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo-USP, São Paulo, 1994.

MENEGUETTI, R. C. G. O conhecimento matemático no realismo e no idealismo: compreensão e reflexão. Episteme, Porto Alegre, n. 16, p. 137-149, jan./jun. 2003.

MODANEZ, L. Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

NAKAMURA, O. Y. A. Generalização de padrões geométricos: caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

NASCIMENTO, M. C.; PERES, G. B. Mosaicos com o Superlogo. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Logo/ERMAC.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2011.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author, 2000.

OLIVEIRA, G. P. Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 295-312, 2008.

ORTON, A. Pattern in mathematics. In: WAIN, G. (Ed.). British Congress on Mathematical Education 1993 Research Papers. Leeds: The University of Leeds, 1993.

ORTON, A. (Ed.). Pattern in the teaching and learning of mathematics. Londres: Cassell, 1999.

PEREZ, E. P. Z. Alunos do ensino médio e a generalização de padrão. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PIRES, C. M. C. Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, C. M. C. Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da matemática no currículo visando à superação do binômio máquina e produtividade. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 6, p. 29-61, 2004.

PIRES, C. M. C.; SILVA, M. A. Desenvolvimento curricular em Matemática no Brasil: trajetórias e desafios. Quadrante, Lisboa, v. 20, p. 57-80, 2011.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RAPKIEWICZ, C. E.; BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F. Geo-Logo: trabalhando geometria no ambiente LOGO. Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET) de Campos dos Goytacazes, 2003. Disponível em: <http://www.es.iff.edu.br/softmat/download/atividades/SLOGO.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2011.

RESNIK, M. D. Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. Noûs, Oxford, v. 15, n. 4 (Número especial sobre Filosofia da Matemática), p. 529-550. Oxford: Blackwell Publishing, 1981.

RESNIK, M. D. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon, 1997.

SANTOS, J. G. Observação e generalização de padrões: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática. 138p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA, M. A. Contribuições contemporâneas para as discussões curriculares em Educação Matemática: a teoria crítica pós-moderna. Alexandria, Florianópolis, v. 6, p. 205-233, 2013.

SILVA, M. A. Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos. 248p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SILVA, M. A. Práticas sociais híbridas: contribuições para os estudos curriculares em Educação Matemática. Horizontes – EDUSF, Itatiba, v. 30, p. 95-102, 2012.

SILVA, M. A.; PIRES, C. M. C. Organização curricular da Matemática no Ensino Médio: a recursão como critério. Ciência & Educação, Bauru, v. 19, n. 2, p. 249-266, 2013.

SKOVSMOSE, O. Educação Matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

STEEN, L. A. The Science of Patterns. Science, Washington, D.C., v. 240, p. 611-616, 29 abr. 1988.

VALE, I. et al. Padrões no currículo de Matemática: presente e futuro. In: GONZÁLEZ, R.; ALFONSO, B.; MACHÍN, M.; NIETO, L. (Org.). Investigación en Educación. Badajoz: SEIEM; SPCE; APM, 2008. p. 477-493.

VALENTE, J. A. O uso inteligente do computador na educação. Pátio, Porto Alegre, ano 1, n. 1, p. 19-21, maio/jul. 1997.

VALENTE, J. A. Por que o computador na Educação? In: VALENTE, J. A. (Org.). Computadores e conhecimento: repensando a educação. Campinas: Gráfica da Unicamp, 1993. p. 24-44.

Submetido à publicação em 30 de abril de 2011

Aprovado em 18 de março de 2013