Transpondo obstáculos: da Aritmética para a Álgebra

Neide F. P. SantAnna[1], *Gilda de La Rocque Palis*[2] , *Maria Apparecida C. Mamede Neves*[3]

Resumo: Neste trabalho se demonstra a dificuldade dos alunos em reconhecer fração como número e indica-se como vencer essa dificuldade. Para isso, desenvolve-se uma estratégia de ensino de frações que toma como referência a reta numérica. Ao associar à fração um conceito objetivo bem determinado, rapidamente os alunos prosseguem no domínio de conceitos mais complexos. A identificação de fração como número é realizada inicialmente na medição de segmentos de reta. Da reta numérica se passa para outros contextos, em um processo de sucessivas generalizações. Este texto descreve atividades envolvendo, por exemplo, equivalência entre frações e ordem no conjunto das frações e apresenta resultados da aplicação da metodologia, avaliados do ponto de vista global e do ponto de vista de grupos diferenciados de alunos em diferentes níveis de qualificação prévia. Os resultados demonstram que a familiarização com o campo algébrico é alcançada com mais facilidade, quando o conceito de fração é trabalhado como proposto.

Palavras-chave: Fração. Fração como número. Problemas com frações. Pensamento algébrico. Ensino de Aritmética.

Overcoming obstacles: from Arithmetic to Algebra

Abstract: This work demonstrates difficulties of students on recognizing fractions as numbers and how to overcome them. For this purpose, a strategy was developed to teach fractions taking as reference the number line. By relating the fraction to a well-defined

---

1 Diretora de pesquisa e Pós-Graduação do Colégio Pedro II. neidefps@gmail.com
2 Professora Associada da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. PUC-Rio. gilda@mat.puc-rio.br
3 Professora Emérita da Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC-Rio. apmamede@gmail.com

objective concept, students proceed quickly to master more complex concepts. The identification of fractions as numbers is initially performed in the measurement of line segments. From the number line the student transposes to other contexts in a process of successive generalizations. A sequence of activities involving, e.g., equivalence between fractions and order in the set of fractions, is here described and results of this methodology application are presented. These results are evaluated from a global point of view and of groups with different levels of previous qualification. Results obtained demonstrate that familiarization with the algebraic field is more easily reached when the concept of fraction is dealt in the proposed way.

Keywords: Fraction. Fraction as a number. Problems with fractions. Algebraic reasoning. Teaching Arithmetic.

Introdução

A motivação principal deste trabalho de pesquisa foram as dificuldades encontradas pelos alunos em apreender os conceitos e os procedimentos algébricos. Alunos que apresentavam um bom desempenho enquanto trabalhavam com questões no campo aritmético, quando diante de problemas envolvendo procedimentos algébricos, não conseguiam resolver as questões propostas. Esses mesmos alunos, que, havia tão pouco tempo, resolviam com facilidade problemas aparentemente tão similares no campo aritmético, tropeçavam e não conseguiam ir adiante.

A partir dessas constatações, algumas questões se colocam:

1 - Onde se encontra a dificuldade em passar do campo aritmético para o campo algébrico?

2 - Que erros se repetem em diferentes séries, em diferentes países?

3 - Que conteúdos propiciam essa passagem?

4 - Qual o momento mais propício para explorar essa passagem?

Respostas para essas questões são encaminhadas por Hung Hsi Wu, do Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia, Berkeley. Ele há muitos anos vem propondo para o ensino de Matemática uma nova visão, em que o ensino de frações tem importância fundamental. Sua proposta inclui a ideia básica de trabalhar o conceito de fração como número, por meio da medição de comprimento de segmentos de reta. De Wu é a ideia aqui explorada de empregar o estudo de frações como uma rampa que leva o estudante suavemente da Aritmética para a Álgebra. Segundo Wu (2002), quando a abordagem de frações é defeituosa, a rampa desmorona, e os estudantes precisam escalar a parede da álgebra não com uma inclinação suave, mas como um ângulo reto.

Sua proposta básica de trabalho consiste em aproveitar o ensino do conteúdo de fração como medida de comprimento de segmento de reta, para conduzir o aluno à compreensão da fração como número e levá-lo, naturalmente, a perceber as restrições do conjunto dos números inteiros e a forma como as frações estendem o sistema numérico. Nesse processo de generalização, confia-se que o aluno vai desenvolvendo a capacidade de abstração necessária nas etapas seguintes da aprendizagem de Matemática (Wu, 2011).

Ao longo dos anos, não têm faltado tentativas da comunidade de Educação Matemática para melhorar o ensino de frações. Bons exemplos são Hart (1981), Booth (1984), Bezuk-Cramer (1989), Kieran (1992, 1995), Nunes e Bryant (1997), Lappan e Bouck (1998), Ma (1999), Romanatto (1999), Moreira (2004) e Darley (2007), entre outros.

Colhemos de Kathleen Hart[4], em 2007, este depoimento:

> Embora ainda hoje, 2007, existam muitas pesquisas sobre frações as dificuldades sobre este tópico permanecem. Isto sugere que estas dificuldades se originem antes do estudo de frações e, portanto, que uma das prováveis causa dessa situação é a transição do conjunto de números naturais para o conjunto de frações.

Segundo Wu, o primeiro momento em que o aluno realmente tem condições de compreender a computação de frações, geralmente na 5ª série e na 6ª série[5], seria a circunstância adequada, no currículo escolar, para começar

---

4 Depoimento via registro postal.

5 As séries 5ª e 6ª do Ensino Fundamental passaram a ser denominadas de 6º ano e 7º ano do Ensino Fundamental, respectivamente, segundo nova nomenclatura do MEC 2006/2007.

a enfatizar o componente abstrato matemático. Dessa maneira se estaria dando ao aluno uma vantagem na etapa correspondente à introdução à Álgebra. Para Wu, a capacidade de abstrair, essencial na Álgebra, deve começar a ser desenvolvida tão cedo quanto possível, e o ensino de frações constitui oportunidade especialmente adequada para esse fim (WU, 2002).

Diante dessas considerações, o objetivo desta pesquisa é oferecer indícios ou pistas que, por meio de uma nova abordagem do conceito de frações, que toma como referência a reta numérica, propiciem ao aluno ser capaz de vencer as dificuldades encontradas na passagem do campo aritmético para o campo algébrico. Especificamente, se enfrentam as seguintes questões:

É possível verificar que, se o aluno consegue construir o conceito de fração como número, usando a reta numérica e a generalização de padrões numéricos, então consegue dar o salto para a representação simbólica, chegando à abstração?

A introdução ao campo algébrico é realizada com mais facilidade, quando o conceito de fração é trabalhado como número, usando a reta numérica?

O trabalho de construção de fração como número, usando a reta numérica, pode influenciar positivamente no desempenho global do aluno em Matemática?

Descrevemos aqui uma estratégia de ensino, partindo da proposta de Wu, levada à prática na sala de aula para avaliar suas premissas.

Esta estratégia de ensino tem dois componentes principais:

(1º) Introduzir o conceito de fração como medida de comprimento de segmento de reta, visando a conduzir o aluno à compreensão da fração como número.

(2º) Introduzir o aluno no campo algébrico, utilizando o ensino de frações, levando-o a superar as dificuldades com a linguagem simbólica e a abstração que, de um modo geral, o atingem nesta etapa de aprendizagem.

E mais alguns objetivos finais:

desenvolver atividades para levar o aluno a reconhecer fração como número, usando como modelo a representação na reta numérica;

empregar fração como conteúdo facilitador na passagem para a Álgebra;

trabalhar padrões numéricos para atingir generalizações;

desenvolver uma proposta de ensino de matemática, dentro de um conteúdo programático regular, que inclui esta abordagem de fração.

O planejamento do experimento

Para planejar a experiência pedagógica, nos apoiamos nos princípios da avaliação iluminativa (Trow, 1970), cuja principal preocupação se prende à descrição e à interpretação, em lugar da mensuração e da predição. Este desenho metodológico afinou muito bem com a pesquisa que queríamos desenvolver, pelo fato de ela ser avaliativa de uma proposta de ensino não usual.

Um desafio consistiu em conciliar a proposta curricular do Departamento Pedagógico de Matemática, inserida no projeto político-pedagógico do Colégio[6], com a do projeto inovador, uma vez que, ao final do ano letivo, os alunos são submetidos a uma prova única, por disciplina, na unidade escolar. As atividades desenvolvidas na turma de pesquisa acompanharam o conteúdo programático regular estabelecido pelo Departamento de Matemática do Colégio, com algumas inversões na ordem dos tópicos previstos para as demais turmas do mesmo ano escolar.

O experimento docente se desenvolveu em duas fases na Unidade Escolar Centro do Colégio Pedro II. A primeira fase se realizou em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, turma 604. A escolha recaiu no 7º ano, no qual os baixos índices de aprovação estavam aliados ao fato de ser esse ano, segundo a nossa programação, onde se inicia o trabalho envolvendo

---

[6] Projeto político-pedagógico (PPP): Este documento representa a expressão de um processo democrático de discussão e elaboração, após terem sido ouvidas as vozes de todos os segmentos da comunidade do Colégio Pedro II presentes às reuniões.

termo desconhecido e os conceitos de variável e incógnita.

Logo após, foram elaboradas atividades, baseadas nos trabalhos de Darley (2005), que possibilitaram avaliar se o aluno foi capaz de atingir, ou não, as expectativas da proposta. Esta segunda fase se desenvolveu no ano seguinte, em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, turma 803, formada acrescendo 10 alunos aos da turma 604 que, no ano anterior, havia iniciado com 34 alunos e terminado com 28. Alguns dos novos alunos eram oriundos da própria unidade e outros, transferidos de outras instituições de ensino.

Ao mesmo tempo em que se desenvolviam as atividades com os alunos, se realizava a avaliação do processo. Nesse contexto, a pesquisa constituiu em planejar, implementar, registrar e analisar criticamente o que consideramos uma nova abordagem para o ensino de frações, que toma como referência a reta numérica e cujo objetivo é permitir ao aluno superar as dificuldades encontradas na passagem do campo aritmético para o campo algébrico.

Além de dois testes-diagnóstico, foram realizadas, ao longo do ano letivo, quinze outras avaliações, no total, entre elas, testes individuais, testes em dupla, trabalhos em grupo, incluindo neste total a prova institucional (PI) e a prova de avaliação final (PAF).

O desenvolvimento da experiência

A proposta contemplou dois campos, o aritmético, por meio do ensino de frações como medida de comprimento de segmento de reta; e o algébrico, por meio de atividades que levassem os alunos a identificar padrões numéricos e buscar generalizações.

> Os exercícios propostos tiveram como objetivo desenvolver no aluno o pensamento algébrico – considerando como ponto de partida o conceito de fração como medida de comprimento. Foi dada ênfase a frações equivalentes, ordenação na reta numérica e operações numéricas, empregando a definição assim formulada em cada atividade.

A ideia básica dos exercícios e problemas oferecidos em testes, provas e desafios ao longo do ano letivo foi, sempre, aproveitar o conteúdo de frações como rampa para o aluno desenvolver seu pensamento algébrico. Quando introduzidos na Álgebra, os estudantes foram chamados a perceber os aspectos em que ela generaliza a Aritmética. Dessa forma, a Álgebra aparece como uma versão mais abstrata e mais geral das operações aritméticas com números inteiros, frações e decimais. Há aí generalização, no sentido de que a Álgebra vai além do cálculo de números específicos e, em vez disso, foca nas propriedades que são comuns a todos os números em discussão, sejam eles frações positivas, números inteiros, etc.

Foi feita uma alteração na ordem do conteúdo programático respeitado pelas demais turmas da série, organizando os conteúdos de modo a colocar o ensino de frações em uma posição central. Na nova ordenação, começa-se com a conceituação de fração na reta numérica, trabalha-se esse conceito nas relações de equivalência e ordem e operações e, finalmente, desenvolvem-se diferentes formulações para o mesmo conceito.

Os quadros abaixo permitem visualizar as alterações efetuadas. O Quadro 1 mostra a ordem em que se trabalhou na aplicação da nossa proposta. O Quadro 2 apresenta a organização seguida pelas outras turmas.

Quadro 1 – Conteúdos Programáticos da 6ª série (turma 604)

1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre
• Reta numérica: conceito de fração como unidade de medida. • Unidade de medida associada à área de um quadrado unitário. • Frações equivalentes e ordem. • Porcentagem. • Operações com frações: adição e subtração. • Padrões numéricos. •Números decimais e suas operações.	• Medidas (instrumentos e unidades de medida, sistema métrico, medindo o tempo). •Números relativos e suas operações. • Proporcionalidade. •Multiplicação e divisão de números fracionários. • Uso de letras. • Equações.	• Áreas e volumes. •Geometria tridimensional.

Quadro 2 - Conteúdos programáticos da 6ª série (demais turmas)

1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre
•Números naturais. •Números decimais e frações. •Formas geométricas. •Medidas (instrumentos e unidades de medida, sistema métrico, medindo o tempo). • Proporcionalidade.	•Números positivos e negativos e suas operações. •Construções geométricas. • Uso de letras. • Equações. • Porcentagem.	• Áreas e volumes. •Geometria tridimensional.

Identificada por meio do teste-diagnóstico a situação dos alunos, o objetivo do primeiro momento do trabalho foi que o aluno conseguisse reconhecer fração como número. Para tanto, foram desenvolvidas atividades trabalhando o conceito de fração como medida de comprimento de segmento de reta. Uma característica que merece atenção nesta apresentação de fração é que frações e números inteiros são tratados em pé de igualdade. Evita-se, desse modo, uma descontinuidade conceitual perturbadora para os alunos iniciantes. O caminho natural para que essa continuidade ocorra está na ênfase na noção de frações equivalentes e na ordem no conjunto de frações. Essas considerações estão fundamentadas nas pesquisas de Hart (1981, p. 66), que verifica que a familiaridade com esses tópicos de fração serve como facilitador para a compreensão de fração como número.

Aspectos desta seção podem ser vistos em mais detalhe em Sant'Anna (2008).

Análise e resultados do experimento

A análise se concentrou na forma como os alunos respondem às questões dos testes, em busca de indicações de como se processa a aprendizagem. Procurou ainda associar padrões de respostas aos diferentes grupos de origem dos alunos.

No Colégio Pedro II, os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, para ingressarem, têm que se submeter a uma prova de seleção. A procura pelo Colégio, nestas duas fases de escolaridade, é muito grande. Chega a haver uma relação de vaga por candidato de 1/20. Para minimizar esta situação, foi instituído pela Direção Geral, desde 2004, um sistema de acesso com dois vieses: uma classificação formada por alunos oriundos de escola pública e outra, por alunos oriundos de escola particular. De um modo geral, os alunos oriundos de escola pública apresentam, nessa entrada, um desempenho inferior ao daqueles vindos de escola particular. Por isso, é interessante comparar o desempenho de alguns alunos pertencentes a esses dois grupos ao longo dos dois anos em que a pesquisa se desenvolveu. Acompanhando esse desenvolvimento, constatamos que o aluno oriundo de escola pública, apesar de entrar no Colégio com avaliação, de um modo geral, mais baixa do que o aluno oriundo de escola privada, no decorrer do curso, conseguiu superar as dificuldades iniciais. Ainda dentro do próprio ano letivo, apresenta um desempenho igual, ou superior, ao do aluno pertencente ao grupo da escola privada.

Outro aspecto a ser observado é que os erros registrados são o que se pode qualificar de "erros universais". Aconteceram na década de 1970, na Inglaterra, e continuam acontecendo. Foi possível, também, identificar, em questões envolvendo diferentes conceitos, a evolução em decorrência da aprendizagem baseada na definição de fração como número e da importância da referência à unidade de medida nessa definição.

Evolução dos desempenhos

Nesta seção se realiza a análise comparativa dos dois testes realizados, no início e no final do trabalho, utilizando exemplos de respostas de alunos, que permitem avaliar como a abordagem adotada foi elaborada por ele.

No primeiro contato com a turma, os alunos foram informados de que seria desenvolvido com eles um trabalho de pesquisa ao longo do ano. Logo após os esclarecimentos das dúvidas suscitadas, foi aplicado o teste-diagnóstico, resolvido individualmente. Este primeiro teste-diagnóstico teve como objetivo identificar o que o aluno reteve da aprendizagem das séries anteriores sobre o conteúdo de frações. Dois aspectos foram considerados:

o domínio do conceito e sua significação prática;

a familiarização com os procedimentos envolvendo operações com frações.

O teste foi elaborado tomando por base o trabalho desenvolvido por Kathleen Hart no livro *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. A análise dos resultados desse teste permitiu constatar que, embora o trabalho de Hart, publicado em 1981, tenha sido desenvolvido com crianças da Escola Secundária do Reino Unido no período de 1974-1979, os erros cometidos por eles se repetem com alunos, no Brasil, no século 21. As crianças dessa faixa etária continuam apresentando o mesmo tipo de erro.

Para a composição do teste, foram elaboradas questões sobre frações equivalentes, ordem de frações e operações com frações. O teste foi composto de seis questões, subdivididas em um total de nove itens. Cada questão está associada a, pelo menos, um aspecto conceitual ou a um aspecto procedimental. O primeiro tipo de associação, identificado aqui como conceitual ou teórico, ocorre quando a questão visa a avaliar se um determinado elemento do conceito de fração é dominado pelo aluno. O segundo tipo, denominado como procedimental ou prático, visa a identificar a presença de uma determinada atividade que pode ser usada para que o aluno adquira corretamente o conceito de fração ou para antecipar a introdução à Álgebra.

No primeiro caso, identificam-se os elementos conceituais que, de acordo com a análise de Wu, devem ser enfatizados para que o conceito de fração seja corretamente adquirido e empregado, de modo a ampliar a capacidade de abstração e generalização do aluno. Esta conceituação consiste em que fração é um número e mede uma relação a uma unidade de medida.

No segundo caso, separam-se três tipos de atividades que podem ser preferencialmente usadas na prática do ensino de frações para favorecer a realização dos objetivos de ensino do conceito de fração referidos acima: operações com frações, problemas com frações e notação de unidades de medida com letras.

A ordem das questões nos testes aplicados foi modificada. Além disso, a segunda aplicação teve mais uma questão. A segunda questão do segundo teste foi adicionada, visando a identificar mais completamente alguns atributos.

Nos quadros abaixo, podemos comparar o desempenho dos alunos, considerando os dois objetivos. Os resultados do segundo teste-diagnóstico estão apresentados nas duas colunas da direita, separando-se os alunos oriundos da turma que recebeu o tratamento no ano anterior do grupo dos alunos que ingressaram na turma no ano seguinte.

Quadro 3 - Resultados Relativos à Primeira Questão do Teste Diagnóstico

1º teste diagnóstico (1ªquestão)	2º teste diagnóstico (3ªquestão)	2º teste diagnóstico (3ªquestão)
1º objetivo (604) – 31 alunos	1º objetivo (803/604) – 28 alunos	1º objetivo (803/não 604) – 9 alunos
Sim: 15(48%) Não: 16(52%)	Sim: 19(68%) Não: 9(32%)	Sim: 4(44%) Não: 5(56%)
2º objetivo (604) – 31 alunos	2º objetivo (803/604) – 28 alunos	2º objetivo (803/não 604) – 9 alunos

Sim: 18(58%) Não: 13(42%)	Sim: 16(57%) Não: 12(43%)	Sim: 4(44%) Não: 5(56%)

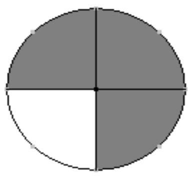
O grupo dos novos alunos apresentou suas respostas com raciocínio muito parecido aos dos alunos da antiga 604, quando se iniciou o estudo. Um deles, em resposta à pergunta: "Que fração do disco inteiro foi assinalada?", não levou em conta o tamanho das partes e juntou a divisão inicial com a nova divisão em 6 partes, chegando à resposta 1/7. Este tipo de erro foi apontado também por Hart (1981), quando analisava esta questão na sua pesquisa na Inglaterra.

Análise da Primeira Questão

Vamos lembrar um pouco?

Resolva cada exercício abaixo. Justifique sua resposta:

1. Sombrear $\frac{1}{6}$ da seção pontilhada do disco. Qual fração do disco inteiro deve ser sombreada? (Hart, 1981, p. 66)



Os objetivos visados com esta questão foram:

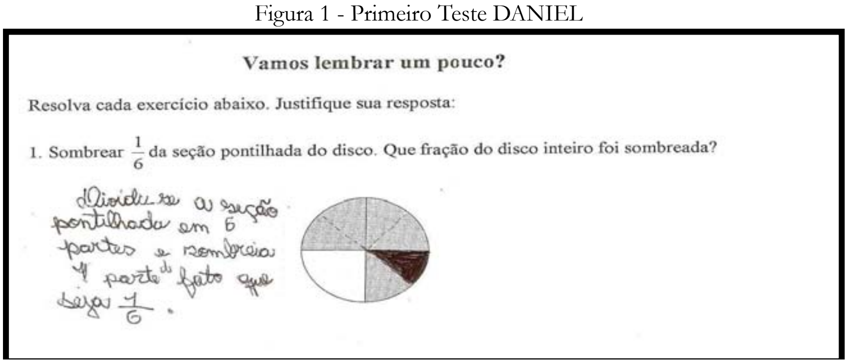
verificar como o aluno consegue resolver um problema com frações, <u>explicitando seu raciocínio ou usando figura</u>. De um modo geral, este tipo de exercício oferece dificuldades, pois o que está por trás é $\frac{1}{6} de \frac{3}{4}$.

verificar se <u>identifica a unidade</u> que está sendo considerada: que o que se deseja é $\frac{1}{6}$ da "parte da figura sombreada" e o que esta parte representa do disco inteiro.

<u>Daniel:</u> Identifica no primeiro teste a fração 1/6 corretamente, porém

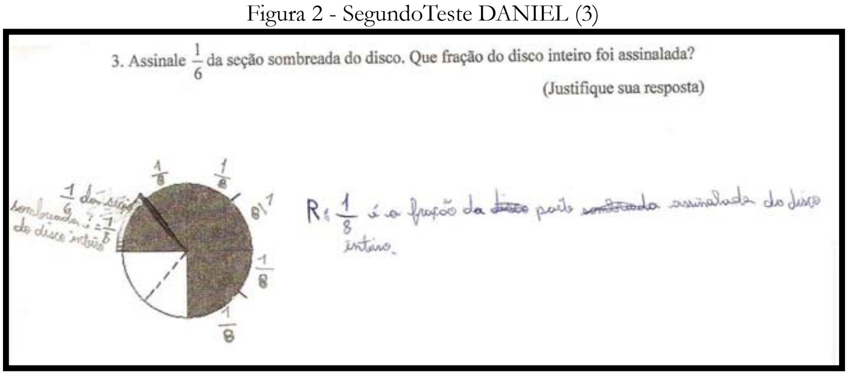
não consegue concluir em relação ao disco inteiro, como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Primeiro Teste DANIEL



Já no segundo teste, Figura 2, apresenta a solução, utilizando a forma icônica corretamente, indicando ter reconhecido as duas unidades consideradas, isto é, em relação à parte hachurada e em relação ao disco inteiro.

Figura 2 - SegundoTeste DANIEL (3)



Análise da Segunda Questão

2. Calcule 3 ÷ 5. Justifique seus cálculos.

(Hart, 1981, p. 68)

O objetivo desta questão foi verificar se o aluno consegue dividir dois inteiros, realizando os cálculos onde o dividendo é menor que o divisor, quando não precisa identificar no enunciado concreto o conceito de fração.

O índice de acerto nesta questão foi satisfatório. No primeiro ano, dos 31 alunos que participaram do teste, 9 alunos acertaram, efetuando simplesmente a conta sem comentários, 18 a efetuaram com comentários e apenas um disse: *"não dá para dividir 3 por 5"* e, por conta disso, inverteu a ordem na divisão: $5 \div 3$. Finalmente, 3 erraram. No segundo ano, os resultados também foram satisfatórios: dos 28 oriundos da turma 604, 15 acertaram somente indicando a conta; 13, efetuando a conta com comentários; nenhum deles inverteu a ordem ou errou.

Atribuímos o "não justificar o resultado" ao fato de esse cálculo estar numa posição diferente do primeiro teste. Este problema, quando proposto no primeiro teste, se encontra numa única página, enquanto, no segundo teste, aparece como último item entre quatro outros. Dessa forma, quase naturalmente, o aluno "entende" simplesmente como "fazer a conta". Dos outros dez alunos que complementaram a turma 803 (antiga 604), apenas um errou, cinco acertaram sem justificar, três justificaram e um faltou. Observando o Quadro 4, a seguir, percebemos melhor as diferenças.

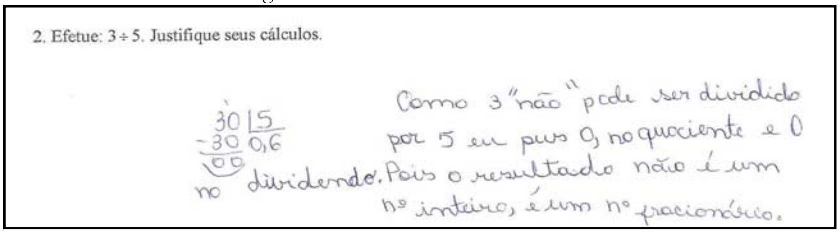
Quadro 4 - Resultados Relativos à Segunda Questão do Teste Diagnóstico

1º teste diagnóstico (2ªquestão)	2º teste diagnóstico (1ªquestão -1 d)	2º teste diagnóstico (1ªquestão -1 d)
1º objetivo (604) – 31 alunos	1º objetivo (803/604) – 28 alunos	1º objetivo (803/não 604) – 9 alunos
Sim: 27 (87%) Não: 4 (13%)	Sim: 28 (100%) Não: 0 (0%)	Sim: 8 (89%) Não: 1 (11%)
2º objetivo (604) – 31 alunos	2º objetivo (803/604) – 28 alunos	2ºobjetivo (803/não 604) – 9 alunos
Sim: 18 (58%) Não: 13 (42%)	Sim: 13 (46%) Não: 15 (54%)	Sim: 3 (33%) Não: 6 (67%)

Apresentaremos agora algumas soluções de alunos para a Questão 2, que ilustram as dificuldades encontradas e a forma como foram superadas. Inicialmente, o aluno, embora aplicando a regra, não é capaz de justificar seu procedimento. À medida que adquire maior domínio do conceito, começa a explicitar a regra.

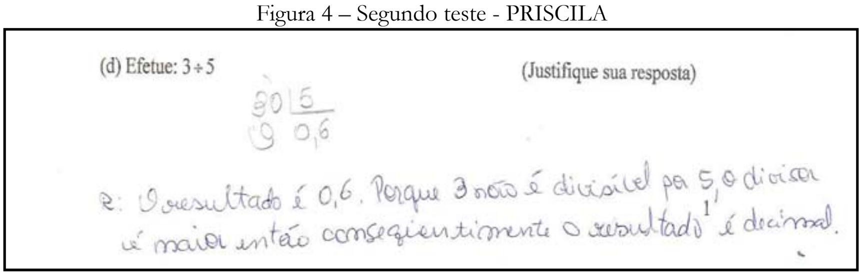
<u>Priscila</u>: Em relação ao primeiro teste, como vemos na Figura 3, a aluna responde, utilizando uma linguagem informal e conclui corretamente.

Figura 3 – Primeiro teste - PRISCILA



Já no segundo teste, Figura 4, a aluna faz a conta e explica em linguagem corrente a solução da questão. Este foi um comportamento que se repetiu na turma.

Figura 4 – Segundo teste - PRISCILA



Análise da terceira questão

A terceira questão objetivava avaliar se o aluno compreendia o significado do resto da divisão.

3. Um pedaço de fita de 17 cm tem de ser cortada em 4 pedaços iguais. Marque a resposta que você acha ser a mais certa para o comprimento de cada pedaço.

(a) 4 cm e resta 1 pedaço.

(b) 4 cm e resta 1 cm.

(c) 4 ¼ cm.

(d) 4/17 cm. (Hart, 1981, p. 68)

No primeiro ano, dos 31 alunos, foi possível constatar que quase 50% tiveram dificuldades em identificar corretamente o significado do resto. A maioria conseguiu encontrar o tamanho de cada pedaço de fita.

Examinando o Quadro 5, verificamos a dificuldade da questão e observamos que, no segundo ano, essa dificuldade diminuiu.

Quadro 5 - Resultados Relativos à Terceira Questão do Teste Diagnóstico

1º teste diagnóstico (3ª questão)	2º teste diagnóstico (4ª questão)	2º teste diagnóstico (4ª questão)
(604) – 31 alunos	(803/604) – 28 alunos	(803/não 604) – 9 alunos
Atingiram o objetivo	Atingiram o objetivo	Atingiram o objetivo
Sim: 15(48%) Não: 16(52%)	Sim: 15(54%) Não: 13(46%)	Sim: 3(33%) Não: 6(67%)

Examinado mais detalhadamente, podemos constatar, no Quadro 6, a incidência dessa dificuldade, quando vemos os alunos assinalando o item (b) com frequência, mostrando, mais uma vez, que a determinação do resto é um ponto de estrangulamento neste tópico.

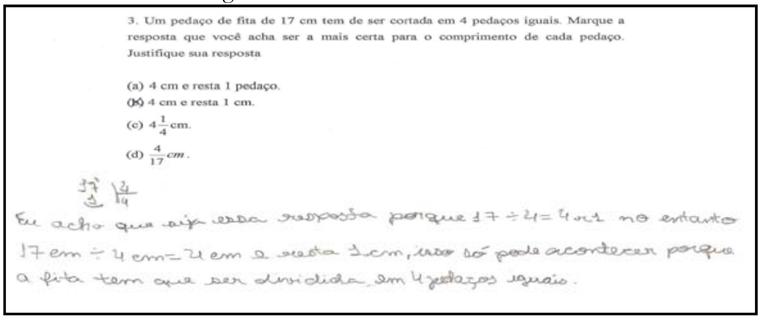
Quadro 6 - Resultados Relativos à Terceira Questão do Teste Diagnóstico

1º teste diagnóstico (3ªquestão)	2º teste diagnóstico (4ªquestão)	2º teste diagnóstico (4ªquestão)
(604) – 31 alunos	(803/604) – 28 alunos	(803/não 604) – 9 alunos
Marcaram a letra c: 15 (48%)	Marcou a letra c: 15 (54%)	Marcaram a letra c: 3 (33%)
Marcaram a letra a: 2(6,6%)	Marcou a letra a: 1 (3,5%)	Marcou a letra a: 1(11%)
Marcaram a letra b: 13(42%)	Marcaram a letra b: 9 (32%)	Marcaram a letra b: 3 (33%)
Marcou a letra d: 1(3,4%)	Marcaram a letra d: 3 (10,5%)	Marcaram a letra d: 2 (23%)

É o que revelam os exemplos a seguir.

Thayane: No primeiro teste, como vemos na Figura 5, a aluna não conseguiu identificar o significado do resto: embora tivesse efetuado corretamente a conta, não soube concluir e assinalou o item (b).

Figura 5- Primeiro teste - THAYANE



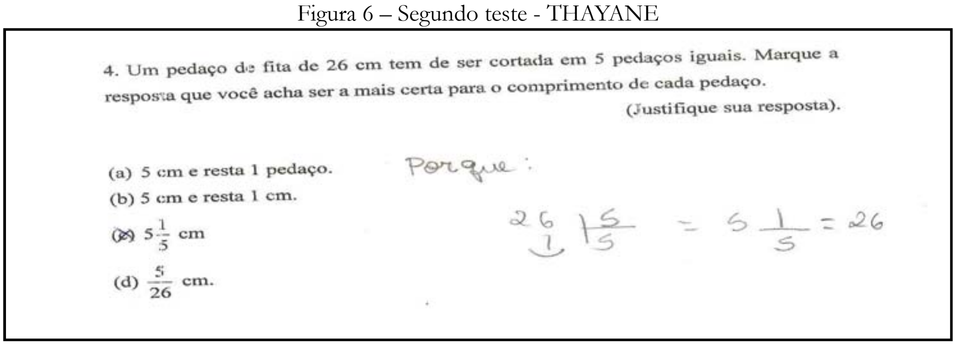
3. Um pedaço de fita de 17 cm tem de ser cortada em 4 pedaços iguais. Marque a resposta que você acha ser a mais certa para o comprimento de cada pedaço. Justifique sua resposta

(a) 4 cm e resta 1 pedaço.
(X) 4 cm e resta 1 cm.
(c) $4\frac{1}{4}$ cm.
(d) $\frac{4}{17}$ *cm*.

Eu acho que seja essa resposta porque 17 ÷ 4 = 4 e 1 no entanto 17 cm ÷ 4 cm = 4 cm e resta 1 cm, isso só pode acontecer porque a fita tem que ser dividida em 4 pedaços iguais.

No segundo teste, transcrito na Figura 6, marca a resposta certa, efetua a operação de divisão, consegue transpor o resultado para fração imprópria. Entretanto, no final, ao voltar para a representação fracionária, esquece-se de colocar o denominador.

Figura 6 – Segundo teste - THAYANE



4. Um pedaço de fita de 26 cm tem de ser cortada em 5 pedaços iguais. Marque a resposta que você acha ser a mais certa para o comprimento de cada pedaço. (Justifique sua resposta).

(a) 5 cm e resta 1 pedaço.
(b) 5 cm e resta 1 cm.
(X) $5\frac{1}{5}$ cm
(d) $\frac{5}{26}$ cm.

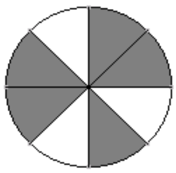
Porque:

$= 5\,\frac{1}{5} = 26$

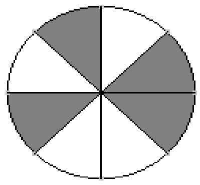
Análise da quarta questão

4. Qual fração representa a parte sombreada? Justifique sua resposta.

(a)



(b)



O objetivo desta questão foi verificar se os alunos onseguem resolver sem passar pela contagem do total e subtrair da parte hachurada. Seu desempenho no desenvolvimento desta questão foi satisfatório desde o início, como vemos no Quadro 7, demonstrando que já conseguiam resolver problemas de frações que envolviam o conceito simples de parte-todo. Esta questão passa sem exame dos desempenhos individuais porque a evolução envolve, essencialmente, a visualização geométrica.

Quadro 7 - Resultados Relativos à Quarta Questão do Teste Diagnóstico

1º teste diagnóstico (4ªquestão)	2º teste diagnóstico (5ªquestão)	2º teste diagnóstico (5ªquestão)
(604) -31 alunos	(803/604) - 28 alunos	(803/não 604) - 9 alunos
Item a	Item a	Item a
Contam o total e subtraem da parte hachurada 30 (97%)	Contam o total e subtraem da parte hachurada 28 (100%)	Contam o total e subtraem da parte hachurada 8 (89%)
Não responde 0	Não responde 0	Não responde 0
Errado 1 (3%)	Errado 0	Errado 1(11%)
Item b	Item b	Item b
Identificando a metade 11(36%)	Identificando a metade 5 (18%)	Identificando a metade 6 (67%)
Sem identificar a metade 19(61%)	Sem identificar a metade 23(82%)	Sem identificar a metade 2 (22%)
Errado 1 (3%)	Errado 0	Errado 1 (11%)

Análise da quinta questão

5. Maria e João ambos têm dinheiro para gastar em seu bolso. Maria gasta $\frac{1}{4}$ da sua quantia e João gasta $\frac{1}{2}$ da sua. Maria pode gastar mais que João? Por que você pensa assim?

Objetivo: Avaliar se o aluno consegue perceber a necessidade de identificar a unidade para resolver o problema.

Nesta questão, quando aplicada no primeiro ano, dos 31 alunos, houve apenas 6 acertos. Desse total, 13 entenderam que *Maria tinha mais para gastar, porque gastou menos.* Não consideraram a quantia que Maria e João levaram inicialmente (isto é, a unidade a ser considerada). Outros 10 desse grupo responderam *NÃO*, porque consideraram que, sendo ¼ < ½, ela não poderia ter gastado mais. Ainda desse grupo, 1 raciocinou como se ambos tivessem a mesma quantia e, finalmente, 1 não fez. Quando replicamos o teste no ano seguinte, do grupo dos alunos oriundos da turma 604, isto é, dos 28 alunos, 24 acertaram a questão. Apenas 2 entenderam que *Maria tinha mais para gastar, porque gastou menos*. Igualmente 2 responderam *NÃO*, porque, sendo ¼ < ½, ela não poderia ter gastado mais.

Dentre os novos, no Quadro 8, mais uma vez apenas 1 acertou. Desse grupo, 7 alunos entenderam que *Maria tinha mais para gastar porque gastou menos* e não levaram em conta a quantia que Maria e João levavam. Um considerou que, sendo ¼ < ½, ela não poderia ter gastado mais; e um dentre eles não fez. Houve uma ausência.

Quadro 8 - Resultados Relativos à Quinta Questão do Teste Diagnóstico

1º teste diagnóstico (5ªquestão)	2º teste diagnóstico (6ªquestão)	2º teste diagnóstico (6ªquestão)
(604) – 31 alunos	(803/604) – 28 alunos	(803/não 604) – 9 alunos
Atingiram o objetivo	Atingiram o objetivo	Atingiram o objetivo
Sim: 6(19%) Não: 25(81%)	Sim: 24(86%) Não: 4(14%)	Sim: 1(11%) Não: 8(89%)

Análise da sexta questão

6. (a) Encontre quem é Δ

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{\Delta}$$

(b) Encontre quem é: $\otimes$

$$\frac{5}{10} = \frac{\otimes}{30}$$

(c) Encontre quem são $\otimes$ e Δ:

$$\frac{2}{7} = \frac{\otimes}{14} = \frac{10}{\Delta}$$

(Hart, 1981, 71)

O objetivo primordial dessa questão é verificar o domínio, pelo aluno, do tópico de frações equivalentes, o que é de suma importância, para que ele se aproprie adequadamente do conceito de fração como número. Nos itens (a) e (b), permite verificar, ainda, se o aluno domina a noção de frações equivalentes e se trata a fração como um único objeto, e não como dois números inteiros – um na parte de cima e o outro na parte de baixo. No item (c), o objetivo é verificar se usa a propriedade transitiva.

Os resultados desta questão são muito satisfatórios, em relação tanto ao item (a) como ao item (b). No primeiro ano, dos 31 alunos, 30 acertaram e apenas 1 não fez. No ano seguinte, <u>todos os 28 alunos</u> oriundos da turma 604 acertaram os dois itens. Sobre a primeira parte do item c, nesse grupo, 26 acertaram, 3 erraram e 2 não fizeram. No ano seguinte, <u>todos</u> acertaram esta parte. Na segunda parte, no primeiro ano, 15 acertaram, quando trabalharam este item usando fração equivalente ou a propriedade transitiva. Dentre eles, 12 erraram e 4 não fizeram. No ano seguinte, houve 21 acertos, contra 7 erros.

No grupo dos alunos não oriundos da turma 604, 7 desses alunos acertaram tanto o item a quanto o item b. Em cada um desses itens, 1 errou e 1 não fez. Em relação à primeira parte do item c, houve 3 acertos, 5 erros e 1 não fez. Por outro lado, na segunda parte, houve 4 acertos, 2 erros e 3 não fizeram.

O desempenho dos alunos no desenvolvimento desta questão foi satisfatório desde o início, mostrando que os alunos já possuíam a habilidade operatória envolvida, como expõe o Quadro 9.

Quadro 9 - Resultados Relativos à Sexta Questão do Teste Diagnóstico

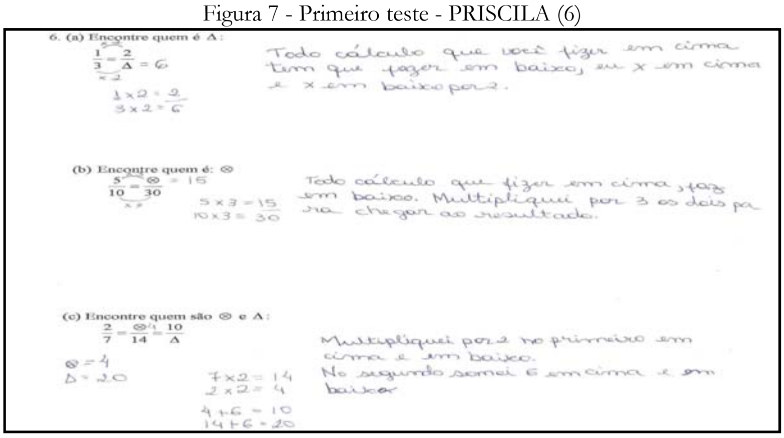
1º teste diagnóstico (6ªquestão)	2º teste diagnóstico (1ªquestão)	2º teste diagnóstico (1ªquestão)
(604) - 31 alunos	(803/604) - 28 alunos	(803/não 604) - 9 alunos
Item a	Item a	Item a

Certo usando fração equivalente: 30 (97%)	Certo usando fração equivalente: 28 (100%)	Certo usando fração equivalente: 7 (78%)
Errado 0	Errado 0	Errado/ outros 0 / 1(11%)
Não fez 1 (3%)	Não fez 0	Não fez 1 (11%)
Item b	Item b	Item b
Certo usando fração equivalente: 30 (97%)	Certo usando fração equivalente: 28(100%)	Certo usando fração equivalente: 7 (78%)
Errado 0	Errado 0	Errado/ outros 0 / 1 (11%)
Não fez 1(3%)	Não fez 0	Não fez 1(11%)
Item c_1	Item c_1	Item c_1
Certo usando fração equivalente: 26 (84%)	Certo usando fração equivalente: 28 (100%)	Certo usando fração equivalente: 3 (33%)
Errado 3 (10%)	Errado 0	Errado/ outros 2 / 3 (56%)
Não fez 2 (6%)	Não fez 0	Não fez 1(11%)
Item c_2	Item c_2	Item c_2
Certo usando fração equiv. ou prop. transitiva: 12 (38%)	Certo usando fração equiv. ou prop. transitiva: 15 (54%)	Certo usando fração equiv. ou prop. transitiva: 3 (33,5%)
Certo usando parte da prop. transitiva: 3 (10%)	Certo usando parte da prop. transitiva: 6 (21,5%)	Certo usando parte da prop. transitiva: 1(11%)
Errado (resposta o nº. 20): 8(27%)	Errado (resposta o nº. 20): 0	Errado(resposta o nº. 20): 0
Errado (resposta o nº. 21): 2 (6%)	Errado (resposta o nº. 21): 2(7%)	Errado (resposta o nº. 21): 1(11%)
Errado (resposta o nº. 22): 0	Errado (resposta o nº. 22): 1(3,5%)	Errado (resposta. o nº. 22): 0
Errado (resposta o nº. 28): 2 (6%)	Errado (resposta o nº. 28): 0	Errado (resposta o nº. 28): 1(11%)
Errado (resposta o nº. 30): 0	Errado (resposta o nº. 30): 2 (7%)	Errado (resposta o nº. 30): 0
Errado completamente: 0	Errado completamente 2 (7%)	Errado completamente: 0
Não fez 4 (13%)	Não fez 0	Não fez 3 (33,5 %)

Alguns exemplos, a seguir, indicam a evolução do desenvolvimento dos alunos nesta questão.

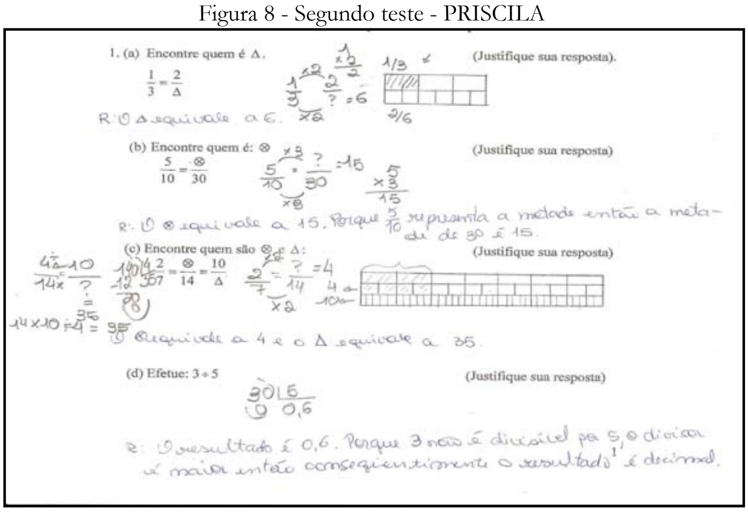
<u>Priscila:</u> Neste primeiro teste, Figura 7, a aluna consegue resolver corretamente os dois primeiros itens. Entretanto, na segunda etapa do item (c) não consegue concluir, confundindo o raciocínio multiplicativo com o raciocínio aditivo.

Figura 7 - Primeiro teste - PRISCILA (6)



Na Figura 8, observamos, no item (a), que a aluna passou a dominar com segurança o conceito de fração equivalente, utilizando também, para justificar sua solução, a forma icônica. Já no item (b), utilizou o conceito de metade, embora também indique, neste mesmo item, o domínio do conceito fração equivalente. No item (c), tanto na primeira etapa quanto na segunda, utilizou cálculos e a forma icônica para justificar seu raciocínio.

Figura 8 - Segundo teste - PRISCILA



Para que pudéssemos verificar a validade do emprego da nova proposta metodológica, era necessário avaliar se, depois de decorrido um prazo mais longo, tinha-se consolidado a aprendizagem de frações. Ao mesmo tempo, visávamos verificar até que ponto a abordagem adotada viria a facilitar, mais adiante, a aprendizagem dos conceitos algébricos.

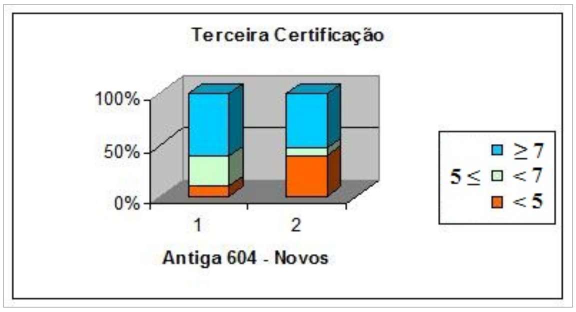
Nessa perspectiva, a proposta adotada foi complementada, acrescentando-se, ao conteúdo programático do 8º ano, na turma 803, uma sequência de 13 aulas que tinham como finalidade rever as operações com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão), fazendo um paralelo com as expressões algébricas. Sintetizando, a análise comparativa do desempenho dos alunos no primeiro teste aplicado e na sua repetição permitiu perceber sua evolução na compreensão do conceito de fração como número.

Os gráficos abaixo representam os resultados dos desenvolvimentos dos alunos no decorrer do segundo ano.

No Gráfico 1, podemos observar os percentuais das médias referentes ao terceiro trimestre. Vemos aí, comparativamente, o melhor desempenho dos alunos oriundos da turma 604 em relação aos novos dessa turma. As médias – tanto as que estão abaixo de 5 (11% contra 40%), quanto as acima de 7 (64% contra 40%) – mostram claramente este resultado.

Gráfico 1 - Comparativo do Desempenho do terceiro trimestre da turma 803: antigos alunos da turma 604 x novos alunos.

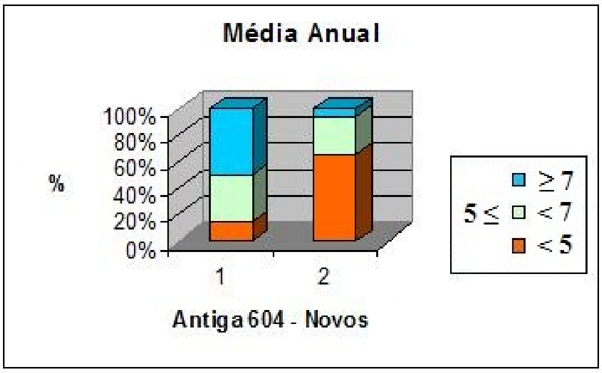
A média anual aponta os alunos que, por alcançarem média sete (7,0)



durante o ano, são aprovados, encerrando seu período letivo nesse momento.

Gráfico 2 - Comparativo do Desempenho Anual da turma 803:
antigos alunos da turma 604 x novos alunos.

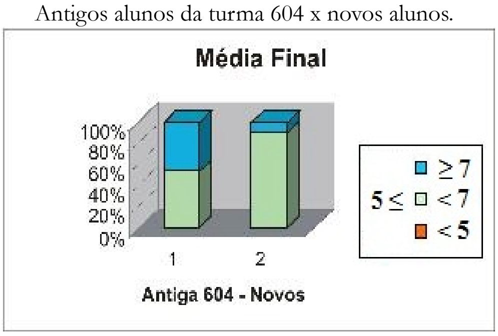
Em dezembro, o segundo grupo, dos alunos que não atingiram a média sete, submeteu-se a uma nova avaliação, isto é, a Prova de Avaliação Final (PAF). Os alunos que



alcançaram média cinco (5,0) nesta avaliação foram promovidos à série seguinte.

Os resultados, representados no Gráfico 3, mostram o bom desempenho tanto do grupo que representa os antigos alunos da turma 604 como dos novos, que passaram a compor a 803. É importante ressaltar, nesta análise, este ponto: após um ano de trabalho com o objetivo de elevar o nível dos alunos da turma 803, principalmente em relação aos alunos não oriundos da 604, que vinham apresentando inicialmente um desempenho insatisfatório, comparativamente ao grupo da turma 604, tivemos como consequência um crescimento em ambos os grupos.

Gráfico 3 - Comparativo do Desempenho Final da turma 803:
Antigos alunos da turma 604 x novos alunos.



O crescimento dos dois grupos, representado nesse gráfico, nos reporta à Teoria de van Hiele (1957). A tese de doutorado de Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, em 1957, com as aplicações didáticas de sua esposa, Dina van Hiele-Geoldof, sugere que os alunos progridem por meio de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão, enquanto aprendem Geometria; e que a linguagem, o *insight* e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papéis especiais nesse desenvolvimento. Em artigos subsequentes, os van Hiele afirmam que os níveis podem servir para orientar o ensino e a aprendizagem de outros tópicos de Matemática. Esse estudo serviu como suporte teórico para a tese de doutorado de Lílian Nasser (1993) – que trata do desenvolvimento do aluno segundo os níveis de van Hiele –, bem como para a dissertação de mestrado de Sant'Anna (2001) no tópico de funções.

De acordo com esta teoria:

Os níveis formam uma hierarquia;

O que está implícito num nível torna-se explícito no nível seguinte;

Cada nível tem símbolos linguísticos próprios e um conjunto de relações características, interligando-os.

Duas pessoas, raciocinando em níveis distintos, não podem compreender uma a outra. Este desnível ocorre, quando o professor tenta comunicar-se com seus alunos em seu próprio nível.

O progresso de um nível para o seguinte depende mais da experiência de atividades adequadas do que da idade ou da maturação.

Os resultados da presente pesquisa permitem verificar, mais uma vez, que é possível atuar no sentido de elevar o nível do aluno, dentro das proposições de van Hiele. Além de observarmos a acentuada diferença entre o desempenho dos alunos do grupo oriundo da turma 604 e o do grupo não oriundo da 604, podemos também verificar o inegável valor agregado, mesmo para esses alunos.

Os resultados apresentados demonstram que o baixo rendimento apresentado pelo grupo de alunos não oriundos da turma 604, paulatinamente, foi se modificando, culminando com o seu aproveitamento total. É evidente também, observando os gráficos e o desempenho individual dos alunos, que a melhora foi gradativa e seus efeitos foram surgindo mais para o final do segundo semestre, o que confirma a hipótese de que, em educação, os comportamentos não se modificam abruptamente, mas de forma lenta e gradativa.

A análise global dos resultados demonstra também que o trabalho de construção de fração como número, usando a reta numérica, influenciou positivamente no desempenho global do aluno: o grupo de alunos estudado revelou, no ano seguinte, maior facilidade em lidar com a representação simbólica.

Os excelentes resultados dos alunos no segundo ano também demonstram claramente que a familiarização com o campo algébrico é alcançada com mais facilidade, quando o conceito de fração é trabalhado como proposto nesta tese.

Conclusão

Muitas soluções de natureza pedagógica para antecipar o desenvolvimento da abstração têm sido propostas. Wu defende que, a despeito de não importar o quanto se introduz do "pensamento algébrico" nas séries iniciais e a despeito de quais méritos tais exercícios possam ter, a taxa de fracasso em álgebra continuará sendo alta, a menos que radicalmente mudemos o ensino de frações e números decimais.

Neste trabalho demonstramos a dificuldade dos alunos em reconhecer fração como um número e a maneira como, ao vencer essa dificuldade e associar à fração um conceito objetivo bem determinado, rapidamente eles prosseguem no domínio de conceitos mais complexos. Para a criança atingir esse conhecimento, foi desenvolvida uma série de atividades, envolvendo, por exemplo, equivalência entre frações e ordem no conjunto das frações.

Ao longo do trabalho, foi possível identificar como o êxito nessas atividades refletiu o domínio da conceituação de fração como número. Quer na aprendizagem de frações, quer nas atividades propostas na introdução à Álgebra, os alunos que obtiveram melhor desempenho no campo algébrico foram aqueles que reconheciam fração como número, identificando sua representação na reta numérica. Sobre essa base, operavam facilmente com frações equivalentes e assimilavam muito bem o conceito de proporcionalidade, mesmo envolvendo expressões mais gerais.

As atividades propostas utilizando o conceito de fração visaram a facilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. Ao analisar os resultados, constatamos que um dos principais obstáculos ao desenvolvimento das operações algébricas situava-se na falta de uma preparação adequada. A que preparação adequada nos estamos referindo? A análise dos resultados coletados nos apontou que um dos possíveis caminhos de uma preparação adequada seria aquele sobre o qual se desenvolveu este estudo: o conceito de fração, quando colocado como medida de comprimento de segmento de reta, facilita a passagem dos números inteiros para os números fracionários, permitindo trabalhar a generalidade. Desse modo, se vai desenvolvendo no aluno a capacidade de abstração.

Agradecimentos.

As autoras agradecem aos revisores da revista pelas sugestões recebidas, sem com isto pretender eximir-se da responsabilidade por quaisquer incorreções.

Referências

BEZUK, N.; CRAMER, K. Teaching about fractions: what, when and how? In: TRAFTON, P. *New Directions for Elementary School Mathematics*. Reston VA: NCTM, 1989. p. 156-167.

BOOTH, L. R. *Algebra:* Children's Strategies and errors. Windsor, Berkshire: NEFR-NELSON, 1984.

DARLEY, J. W. *Ninth Graders' Interpretations and Use of Contextualized Models of Fractions and Algebraic Properties:* a Classroom-Based Approach. Tese (Doutorado)–University of South Carolina, Columbia, 2005.

DARLEY, J. W. Understanding Fractions as Numbers and Connections to Algebraic Properties. Reston, VA: NCTM, 2007.

HART, K. Children's Understanding of Mathematics: 11-16. London: John Murray, 1981.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORDF, A. F.; SHUTLE, A. P. *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. p. 104-110.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In: GROUWS, D. A. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, 1992. p. 390-419.

LAPPAN, G.; BOUCK, M. K. Developing algorithms for adding and subtracting fractions. In: MOROW, L. J.; KENNY, M. J. (Ed.). *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998. p. 183-197.

MA, L. *Knowing and teaching elementary mathematics:* teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.

MOREIRA, P. C. *O conhecimento matemático do professor:* formação na licenciatura e prática docente na Escola Básica. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

NASSER, L. *Using the Van Hiele Theory to improve secondary school geometry in Brazil.* Tese (Doutorado em Educação)–King's College, University of London, Reino Unido, 1993.

NUNES, T.; BRYANT, P. Compreendendo números racionais. In: NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática.* Porto Alegre: Artmed, 1997. p. 191-217.

ROMANATTO, M. C. Número racional: uma teia de relações. *Zetetiké*, Campinas, v. 7, n. 12, p. 37- 49,1999.

SANT'ANNA, N. F. P. *Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no Ensino Médio do Colégio Pedro II.* Dissertação (Mestrado em Matemática)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SANT'ANNA, N. F. P. *Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra.* Tese (Doutorado em Educação)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

TROW, M. A. Methodological problems in evaluation of innovation. In: WITTROCK, M. C.; WILEY, D. E. (Ed.). *The evaluation of instruction.* New York: Holt, Rinchart and Winston, 1970. p. 289-305.

VAN HIELE, P. *The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School.* Tese (Doutorado)–Universidade de Utrecht, Utrecht, 1957.

WU, H. *Chapter 2*: *Fractions (Draft)* University of California, Berkeley. June 20, 2001. Revised September 6, 2002. Disponível em http://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf. Acesso em: 7 set. 2011.

WU, H. *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2011.

Submetido à publicação em 09 de Agosto de 2011

Aprovado em 03 de Abril de 2013