

## Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio

*José Marcos Lopes\*, João Vitor Teodoro e Josiane de Carvalho Rezende\*\**

**Resumo:** No presente artigo relatamos os resultados de uma investigação que procurou determinar se o uso de jogos, associado à metodologia de resolução de problemas, pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de conceitos básicos de probabilidade. A investigação ocorreu em quatro salas do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do estado de São Paulo. Os resultados indicam que a utilização dessa proposta de ensino pode favorecer a aprendizagem e torna as aulas mais prazerosas e participativas para os alunos. Estes se tornam ativos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento.

**Palavras-chave:** Probabilidade, jogos, ensino, resolução de problemas.

### A proposal for the study of Probability concepts at high school

**Abstract:** This paper reports the results of an investigation that examined whether the use of games associated to the problem solving methodology can contribute to the teaching and learning of basic probability concepts. The research was carried out in four classrooms of the second year of high school at a public school from the countryside of the state of São Paulo. The results indicate that the use of this teaching proposal can help the learning process and make lessons more pleasant and participative for the students. The students in turn become active participants in the development of their own knowledge.

**Key words:** Probability, games, education, problem solving.

### Introdução

Os resultados da investigação aqui descritos fazem parte do projeto de pesquisa “Jogos com Resolução de Problemas para o Estudo de Probabilidade no Ensino Médio”, o qual está sendo desenvolvido desde 2007, com a participação de três professoras efetivas da rede estadual de ensino de uma cidade do interior paulista. O objetivo principal desse projeto é apresentar uma nova proposta para o ensino de probabilidade, fazendo uso de um jogo de dados associado à resolução de problemas. Esta é utilizada para a construção dos conceitos matemáticos. Assim, com esse jogo, formulamos vários problemas, cujas soluções, mediante a adequada intervenção do professor, induzem os alunos à construção e à reconstrução de todos os conceitos básicos de probabilidade.

---

\* Professor adjunto do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia da Unesp de Ilha Solteira. [jmlopes@mat.feis.unesp.br](mailto:jmlopes@mat.feis.unesp.br)

\*\* Licenciados em Matemática pela Faculdade de Engenharia da Unesp de Ilha Solteira. [joao.magda@gmail.com](mailto:joao.magda@gmail.com); [xyjosixy@hotmail.com](mailto:xyjosixy@hotmail.com).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997) estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade

é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (Brasil, 1997, p. 56).

Sobre a natureza da probabilidade e as finalidades de seu ensino na educação obrigatória, Batanero (2006) destaca que a probabilidade é parte da matemática e base de outras disciplinas e é essencial para preparar os estudantes, visto que o acaso e os fenômenos aleatórios estão presentes em nossas vidas.

Utilizamos neste trabalho a definição de probabilidade segundo Laplace. Esta é conhecida como a concepção clássica (teórica) de probabilidade e depende de técnicas combinatórias. Nesta concepção, a probabilidade de um evento  $A$  é definida como o quociente  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ , onde  $n(\Omega)$  denota o número total de resultados

possíveis do Experimento Aleatório e  $n(A)$  denota o número de resultados que conduzem à ocorrência do evento  $A$ .

Cada elemento do Espaço Amostral  $\Omega$  é chamado de Evento Elementar. A definição de probabilidade de Laplace é válida somente quando o Espaço Amostral possui um número finito de elementos e os Eventos Elementares são equiprováveis, ou seja, todos possuem a mesma probabilidade de ocorrência. De acordo com Piaget e Inhelder (1951), se o sujeito não possuir capacidade combinatória, não será capaz de usar esta ideia de probabilidade, exceto em casos de Experimentos Aleatórios muito elementares (Piaget; Inhelder, 1951, apud Batanero et al., 1997).

Os Standards (NCTM, 1989) recomendam o seguinte procedimento combinatório para que os alunos compreendam matematicamente a origem desta definição laplaciana de probabilidade: construir uma tabela ou diagrama de árvore, fazer uma lista e usar um simples procedimento de contagem.

Outra concepção de probabilidade que pode e deve ser trabalhada no Ensino Médio é a *frequentista*, isto é, a definição de probabilidade obtida por um processo de experimentação e simulação. O leitor interessado nas diferentes concepções de probabilidade pode consultar, por exemplo, as seguintes referências: Batanero (2005), Carvalho e Oliveira (2002), Godino et al. (1996) e Van de Walle (2009).

Muitos professores do Ensino Médio sentem-se inseguros quando precisam abordar conteúdos de probabilidade. Conforme o *Caderno do professor*, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo: “os conteúdos pertinentes à Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores” (São Paulo, 2008, p. 9).

Carvalho e Oliveira (2002) afirmam que é frequente os conceitos probabilísticos não serem estudados no Ensino Fundamental e Médio e, quando são considerados, sua abordagem reduz-se à resolução mecânica de exercícios padrões. Na maioria das vezes é suficiente aplicar uma fórmula.

Originalmente o cálculo de probabilidades era voltado para a previsão das chances de vitória em alguns jogos de azar e/ou de baralho. Nos dias atuais, a teoria de probabilidade possui aplicações importantes nos mais diversos ramos da atividade humana, por exemplo: na Economia, na Política, na Medicina, etc. Ainda, a teoria de probabilidades é o fundamento matemático que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística.

#### Segundo Trompler,

o ensino de probabilidade em ciclos anteriores à graduação é de fundamental relevância porque representa uma maneira de pensar, desconhecida em outros ramos da matemática, embora subjacente em todas as ciências experimentais. Confronta o estudante com resultados menos absolutos do que este está acostumado, mostra que ele pode conduzir um rigoroso raciocínio mesmo sabendo que está cometendo erros e o ensina a como enfrentar tais erros. Humaniza a matemática pela ligação a problemas do cotidiano, já que relaciona ciências experimentais, naturais, econômicas e sociais de todos os tipos, como ferramentas de trabalho, à matemática (Trompler, 1982, apud Hurtado; Costa, 1999).

Mais do que saber ler as informações que circulam na mídia, espera-se do aluno do Ensino Médio uma reflexão mais crítica sobre seus significados. Godino et al. (1998) apontam uma razão do tipo social para defender a educação da intuição probabilística na Educação Básica: tornar os alunos conscientes da natureza probabilística de distintos jogos de azar (loterias, máquinas caça-níqueis, bingos, etc.), jogos que são magníficos negócios para os que os promovem e, para quem aposta, um risco desproporcional de perder dinheiro (Godino et al., 1998, apud Lopes, 2006).

Batanero (2006) destaca a importância do ensino de probabilidade para educar o raciocínio probabilístico necessário ao enfrentar o acaso na vida cotidiana e melhorar as intuições dos estudantes. Os alunos devem construir seus conhecimentos mediante um processo gradual, a partir de seus erros e esforços. Se o professor de matemática, que deve ensinar probabilidade a seus alunos, não for consciente dessa problemática, dificilmente poderá compreender algumas dificuldades destes.

Um enfoque experimental puro para o ensino de probabilidade não é suficiente. A probabilidade deve ser apresentada desde suas diferentes perspectivas, que estão dialeticamente ligadas, cada uma das quais traz uma parte da compreensão global do conceito (ibidem).

Coutinho (2001) mostrou a importância de trabalhar com a dualidade dos enfoques – combinatório x frequentista – para a noção de probabilidade, ou seja, a

autora sugere oferecer aos alunos situações didáticas que envolvam problemas que devem ser resolvidos experimentalmente (simulação) e validados pelo cálculo *a priori* de uma probabilidade, pela definição laplaciana. Assim, os alunos podem construir passo a passo o conceito de probabilidade.

Corbalán (2002) considera que, como os conteúdos de probabilidade são de grande dificuldade para o alunado do Ensino Médio, por motivos intrínsecos e porque, em geral, ainda não estudaram probabilidade até essa idade, deveria ser feito um grande esforço para apresentar esses temas de forma lúdica.

Vários jogos que utilizam roletas, cubos numéricos, moedas e cubos retirados de um saco probabilístico, os quais podem auxiliar os alunos a fazerem previsões sobre a probabilidade de um evento, podem ser encontrados em Van de Walle (2009). Esse mesmo autor destaca também a importância do estudo da probabilidade teórica *versus* a probabilidade experimental.

#### O uso de jogos e da resolução de problemas no ensino de Matemática

O principal objetivo desta proposta didático-pedagógica é ensinar matemática por meio da resolução de problemas. Os PCN elegem a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução; e, para isso, os desafios devem ser reais (Brasil, 1997).

Van de Walle (2009) afirma que a resolução de problemas é um veículo poderoso e eficaz para a aprendizagem. Os conceitos e os procedimentos matemáticos, em sua maioria – senão todos –, podem ser mais bem ensinados por meio da resolução de problemas,

os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa (Van de Walle, 2009, p. 57).

Ainda segundo Van de Walle (2009, p. 74), “enquanto os estudantes descrevem e avaliam as resoluções para as tarefas [...] compartilham abordagens e fazem conjecturas [...] começam a ser autores de idéias e a desenvolver uma sensação de poder dar significado às idéias matemáticas”.

Não existe dúvida de que ensinar por resolução de problemas é difícil e dá mais trabalho ao professor. Entretanto, Van de Walle (2009) nos apresenta sete razões para tentarmos prosseguir nesse esforço:

a resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre idéias e em dar sentido às mesmas;

- a resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido;
- a resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter um bom desempenho e manter os pais informados;
- a resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos;
- uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes, de modo que ocorrem menos problemas de disciplina;
- a resolução de problemas desenvolve o “potencial matemático” e é muito divertido! Os professores que ensinam deste modo nunca retornam a um método de ensinar por exposição de regras (e receitas) (Van de Walle, 2009, p. 59).

Moura (1992, p. 50) considera que a resolução de problemas e o jogo, se utilizados como objetos de desenvolvimento, possuem algumas semelhanças que os aproximam enquanto estratégias de ensino. A primeira semelhança seria encontrada no sujeito que executa a ação. Só existirá jogo se o sujeito tiver vontade de jogar e, da mesma forma, só existe problema se o indivíduo se sentir desestruturado (psicologicamente); “o problema só é problema se ele é do indivíduo”. A segunda semelhança estaria nas fases como eles se desenvolvem. No problema distinguem-se as fases: problema desencadeador; construção do conceito; e aplicação do conceito. E, no jogo, as fases: jogo desencadeador; reinvenção do jogo; e descoberta de estruturas.

A concepção de jogo que utilizamos neste trabalho considera que

o jogo será conteúdo assumido com a finalidade de desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, possibilitando ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir determinados objetivos, a executar jogadas segundo este plano e a avaliar a eficácia destas jogadas nos resultados. Desta maneira, o jogo aproxima-se da Matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas (Moura, 1994, p. 21).

Ainda segundo Moura (1992), quanto à resolução de problemas e ao ato de jogar, algumas semelhanças também são encontradas. Na resolução de problemas, as etapas –originalmente definidas por Polya (1978) – seriam: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano; e retrospecto. E, no jogo, estas são as etapas definidas: compreensão do jogo, estabelecimento de estratégia, execução das jogadas e avaliação do jogo.

A atividade de jogar desempenha papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, dedutivo e indutivo; da linguagem; da criatividade; da atenção e da concentração, essenciais para o aprendizado em Matemática. Durante a realização do jogo, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo (Borin, 2004).

É necessário ao professor “entender que a justificativa da utilização de jogos na sala de aula não pode restringir-se ao caráter motivacional, mas que depende de uma ação intencional, planejada, executada, registrada, avaliada e compartilhada pelos alunos e professores” (Grando, 2007, p. 49).

Para Van de Walle (2009, p. 84) “é o pensamento reflexivo que causa o desenvolvimento”. O jogo pode não se parecer com um problema, mas pode, entretanto, estar fundamentado em um problema. Se o jogo faz os alunos refletirem sobre as ideias que eles ainda não formularam muito bem, então ele se ajusta à definição de uma tarefa baseada em resolução de problemas.

O jogo pode ser trabalhado associado à resolução de problemas,

a união entre o jogo e a resolução de problemas está intimamente vinculada à intencionalidade do professor, que é um dos arquitetos do projeto pedagógico do trabalho coletivo da escola. Este projeto tem começo – a cultura primeira – e um fim – a cultura elaborada, sendo ambos móveis; trata-se do conhecimento em movimento. Aquele conhecimento que é síntese de um processo passa a ser começo de outros, num movimento crescente. [...] combinar jogo e resolução de problemas [...] é muito mais que uma simples atitude, é uma postura que deve ser assumida na condução do ensino. [...] fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, à Educação Matemática. (Moura, 1992, p. 51-52).

A literatura sobre jogos e resolução de problemas para o Ensino Fundamental é razoavelmente extensa. Já para o Ensino Médio, é bastante escassa. Neste artigo apresentamos um novo jogo, inspirado em “Game of Kasje” (Schuh, 1968, p. 181).

## O jogo

Este jogo utiliza dois dados e é disputado por dois jogadores, João e Maria. São considerados lances vencedores:

(4; 1) ou (1; 4) vale um ponto;	(4; 2) ou (2; 4) vale dois pontos;
(4; 3) ou (3; 4) vale três pontos;	(4; 4) vale quatro pontos;
(4; 5) ou (5; 4) vale cinco pontos;	(4; 6) ou (6; 4) vale seis pontos.

Cada jogador poderá efetuar até dois lançamentos. Se não conseguir nenhuma face 4 no primeiro lançamento, efetuará o segundo lançamento com os dois dados. Se conseguir pelo menos uma face 4 no primeiro lançamento, reservará esse dado e decidirá se lança ou não o outro dado mais uma vez. Vencerá o jogo quem obtiver a maior pontuação. Se os dois jogadores obtiverem a mesma pontuação, o procedimento todo será repetido.

Estamos supondo para este jogo a utilização de dados com faces equiprováveis. Se o jogador conseguir (4; 1) ou (1; 4), ou seja, um ponto no primeiro lançamento, é conveniente lançar o segundo dado mais uma vez. Não existe, neste caso, possibilidade de piorar sua pontuação. Agora, se o jogador obtiver três pontos

(4; 3) ou (3; 4) no primeiro lançamento e decidir lançar o segundo dado mais uma vez, então ele terá uma chance em seis de permanecer com a mesma pontuação, duas chances em seis de piorar sua pontuação, ou seja, de obter a face 1 ou a face 2 no lançamento do segundo dado; e possuirá três chances em seis (faces 4, 5 ou 6) de melhorar sua pontuação.

O jogador poderá não marcar pontos ou ter pontuação zero; tal fato ocorrerá se, nos seus dois possíveis lançamentos, ele não conseguir obter nenhuma face 4.

#### As professoras participantes e a proposta de ensino de probabilidade

Essa proposta de ensino foi aplicada por três professoras em quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio, no terceiro bimestre de 2008, em uma escola pública de uma pequena cidade do noroeste paulista. Uma das professoras era responsável por duas turmas, enquanto as outras duas eram responsáveis por uma turma cada uma.

O contato inicial com essas professoras ocorreu no início do ano de 2007. Durante todo aquele ano reunimo-nos com elas várias vezes, discutindo e apresentando a forma como entendíamos que os conteúdos de probabilidade deveriam ser abordados, mediante o uso do jogo e da metodologia de resolução de problemas. Nos encontros iniciais procuramos superar possíveis dificuldades e deficiências das professoras sobre o tema Probabilidade, discutimos o jogo e realizamos com elas várias rodadas. Nos encontros seguintes apresentamos e resolvemos os problemas elaborados para as atividades em sala de aula, contemplando todos os conceitos básicos de probabilidade.

Formulamos vários problemas (mais de vinte) - todos envolvendo situações de jogo, para cuja solução os alunos trabalhavam o conteúdo probabilístico antes da sua sistematização pelo professor. No ensino tradicional, os professores *jogam* a fórmula e resolvem exercícios aplicando essa fórmula. Os alunos não compreendem de onde ela apareceu, não entendem o seu significado e acabam mistificando a Matemática como um conjunto de regras e fórmulas que aparecem sem justificativa, de utilidade duvidosa - ciência para poucos cérebros privilegiados.

Inicialmente, nossa intenção era aplicar o projeto já no ano de 2007, o que ocorreu apenas de maneira parcial, pois uma das professoras não estava ministrando aula para o segundo ano do Ensino Médio naquele momento e probabilidade era o último conteúdo do ano letivo. Uma outra docente conseguiu apenas iniciar a aplicação da proposta, que acabou sendo utilizada por apenas uma das professoras em uma turma.

No ano de 2008, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo efetivou mudanças na grade curricular e elaborou propostas para o trabalho em sala de aula. Os conteúdos de Probabilidade passaram a ser estudados no terceiro bimestre do segundo ano do Ensino Médio, e foram elaborados os chamados *Cadernos do professor*,

que oferecem orientações aos professores quanto à forma de introduzir os conceitos matemáticos e priorizar “a principal metodologia para o tratamento de conteúdos matemáticos: a da resolução de problemas” (São Paulo, 2008, p. 25).

Da mesma forma que na nossa proposta, a Situação de Aprendizagem 1, no *Caderno do professor*, para o estudo de Probabilidade, é iniciada com um jogo de dois dados. No nosso entendimento, poderia ter sido utilizado um jogo mais simples. Além disso, nenhum dos problemas apresentados na atividade envolve situações do jogo considerado. O jogo fica, assim, *perdido* no contexto da situação de aprendizagem.

### Metodologia

Para analisar a adequação e a viabilidade desta proposta de ensino de Probabilidade, utilizamos todas as quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio oferecidas pela escola. Os sujeitos desta investigação eram 103 alunos, dispostos em duas turmas no período noturno, uma no período matutino e outra no período vespertino.

Elaboramos um questionário com doze questões de múltipla escolha, envolvendo conceitos básicos de probabilidade. Optamos por questões de múltipla escolha, por favorecerem uma análise mais objetiva dos resultados do teste aplicado e facilitarem a comparação entre porcentagens de acertos; e ainda por envolverem grande número de sujeitos. O número de alternativas em cada questão varia de três a cinco, sendo uma delas “não sei”. Para a elaboração de algumas questões, baseamos-nos naquelas utilizadas por Lopes (2003, p. 267-268).

As questões foram organizadas num nível crescente de dificuldades: as primeiras apresentam noções básicas de probabilidade; a de número 7 envolve o conceito presente na distribuição binomial; as questões 8 e 11 trabalham o conceito de probabilidade condicional; e a última é uma questão conceitual (Questionário anexo).

Antes do trabalho com os conteúdos de probabilidade, as professoras aplicaram o questionário que havíamos elaborado (pré-teste). Foi explicado aos alunos – 88, no total – que se tratava de um projeto de pesquisa e seria importante que respondessem com atenção, mas não era necessário se identificar. Além de utilizar os resultados do pré-teste como forma de análise da metodologia aplicada, nosso objetivo foi também verificar os conhecimentos prévios e a intuição dos alunos em relação a problemas de probabilidade. Em muitos problemas desse tipo, nossa intuição geralmente falha.

Após a aplicação do pré-teste, foram desenvolvidas as aulas, sempre com as professoras titulares das turmas. As aulas semanais de Matemática para as turmas do período noturno são quatro, e para as do período diurno são cinco aulas semanais. As professoras utilizaram em torno de 30 horas-aula para o desenvolvimento dos conteúdos básicos de probabilidade.



Durante o período das aulas, foi solicitado aos alunos que relatassem por escrito suas percepções sobre a nova metodologia de ensino, provavelmente inédita para eles. Após o término das aulas referentes à aplicação do projeto, as professoras reaplicaram o mesmo questionário (pós-teste), que foi respondido por 59 alunos, pois seu preenchimento não era obrigatório e foi grande o número de faltas.

No final do ano letivo, praticamente dois meses após a aplicação do projeto, a escola promoveu uma Feira de Ciências. Um dos ambientes organizados foi a Sala de Jogos, preparada pelas professoras em conjunto com os alunos, que utilizaram e apresentaram o jogo trabalhado em sala de aula - tanto em sua forma convencional, com o lançamento manual dos dados, como também em forma de *software*, programado em linguagem Delphi (Pascal). Durante a Feira de Ciências gravamos em vídeo o depoimento espontâneo de alguns alunos sobre as atividades desenvolvidas em sala de aula.

#### Desenvolvimento das aulas

No primeiro semestre de 2008, antes da aplicação da proposta de ensino em sala de aula, realizamos alguns encontros com as professoras para rediscutir o jogo, os problemas que seriam utilizados e, também, o questionário que seria aplicado. Elas estavam mais seguras quanto aos conteúdos que deveriam trabalhar nas suas turmas. A aplicação do pré-teste foi a primeira atividade. Em seguida, as professoras iniciaram as aulas com a realização do jogo. Os alunos foram divididos em duplas e foi estipulado que realizassem algumas rodadas, pois, como este é um jogo de estratégia, é preciso fazer com que os alunos tenham pleno conhecimento e domínio de suas regras. Isso é de fundamental importância quando da resolução dos problemas.

Cada dupla recebeu dois dados e um copo (caneca). Solicitamos que anotassem os resultados de cada rodada, como forma de verificar jogadas erradas e determinar a melhor estratégia para conseguir a vitória no jogo. Os vencedores foram premiados com bombons.

Depois de realizado o jogo, as professoras fizeram os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

O segundo jogador possui maior possibilidade de vencer o jogo?

Primeiramente, João efetua um ou dois lançamentos, posteriormente é a vez de Maria efetuar o seu jogo. Assim, Maria está numa posição melhor para decidir se aproveita ou não o seu segundo lançamento, pois já conhece a pontuação obtida por João. Para tornar o jogo mais justo, deve existir uma alternância entre João e Maria para ser o primeiro a jogar.

As professoras utilizaram as notas de aulas, conforme havíamos preparado. Como exemplos, o problema: “Considerando-se apenas o primeiro lançamento dos dois dados, João terá maior chance em conseguir um ponto ou seis pontos? Justificar

sua resposta.” foi um dos utilizados para a sistematização dos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento; e o problema: “Qual a probabilidade de João marcar cinco pontos neste jogo?” foi proposto para trabalhar com soma e produto de probabilidade. Geralmente os alunos apresentam muitas dificuldades em saber quando devem somar ou multiplicar probabilidades. Para introduzir o importante conceito de probabilidade condicional, utilizamos o problema: “Considerando-se apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de João marcar três pontos, sabendo-se que ele obteve em pelo menos um dos dois dados uma face 4?”.

Após a sistematização dos conceitos, outros problemas envolvendo situações do jogo e também problemas diversos foram resolvidos, utilizando as fórmulas e as propriedades do conceito probabilístico estudado, como forma de reter o conceito matemático estudado.

#### Análise dos dados

Como o número de alunos que responderam o pré e o pós-teste não foi igual, utilizamos, na sequência, as porcentagens de acertos por questão. As Figuras 1, 2, 3 e 4 apresentam os índices de acertos no pré e no pós-teste para cada uma das doze questões das turmas *A*, *B*, *C* e *D*, respectivamente.

Como resultado da aplicação do pré-teste, podemos inferir que os alunos já possuíam noções básicas de probabilidade. Algumas das questões elaboradas eram simples e podiam ser respondidas pela intuição, o que parece justificar o índice médio de acertos no pré-teste: 52,7%, 44,1%, 61,9% e 61,8%, respectivamente, nas turmas *A*, *B*, *C* e *D*.

Para o pós-teste, o índice médio de acertos foi de 52,3%, 66,1%, 65,9% e 57,8%, respectivamente, para as turmas *A*, *B*, *C* e *D*. A turma *A* manteve o índice, a turma *B* apresentou um aumento significativo, a turma *C* revelou um pequeno aumento e a turma *D* sofreu decréscimo no índice de acertos. A turma *B* foi a que apresentou a maior diferença entre os índices de acertos nos dois momentos de aplicação do questionário.

Figura 1 - Índice de acertos no pré e no pós-teste para a turma A

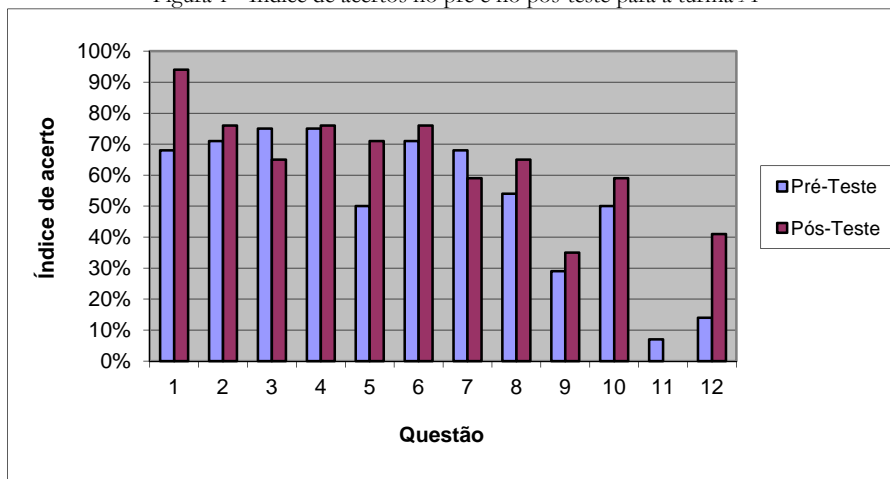
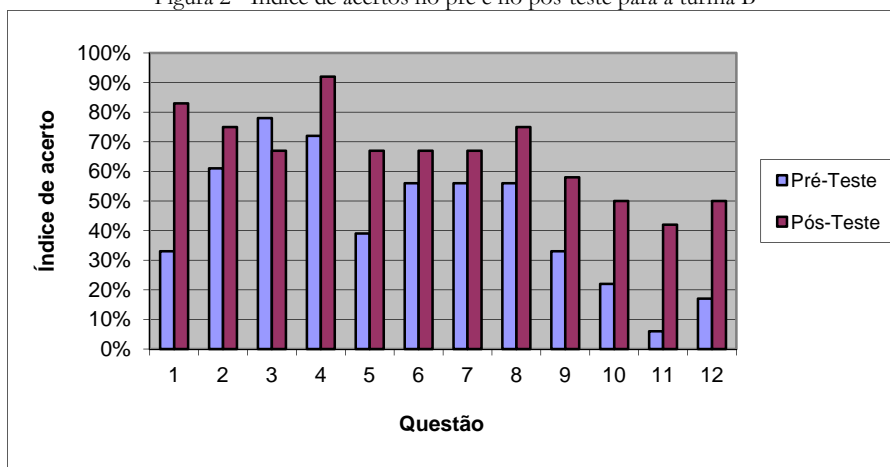


Figura 2 - Índice de acertos no pré e no pós-teste para a turma B



Os resultados da questão 3, de certa forma, nos surpreendeu. Com exceção da turma D, em que os índices de acertos foram praticamente iguais, nas outras três turmas o índice de acerto foi maior no pré do que no pós-teste. Nesse caso, e talvez essa seja a dificuldade, os alunos deveriam comparar as frações  $1/2$  e  $1/6$ .

A maior diferença positiva no índice de acertos ocorreu na questão 1 da turma B, com 33% de índice de acertos no pré-teste e 83% no pós-teste. A maior diferença negativa ocorreu na questão 3 da turma C: passou de 57% de índice de acertos no pré-teste para 0% no pós-teste.

Figura 3 - Índice de acertos no pré e no pós-teste para a turma C

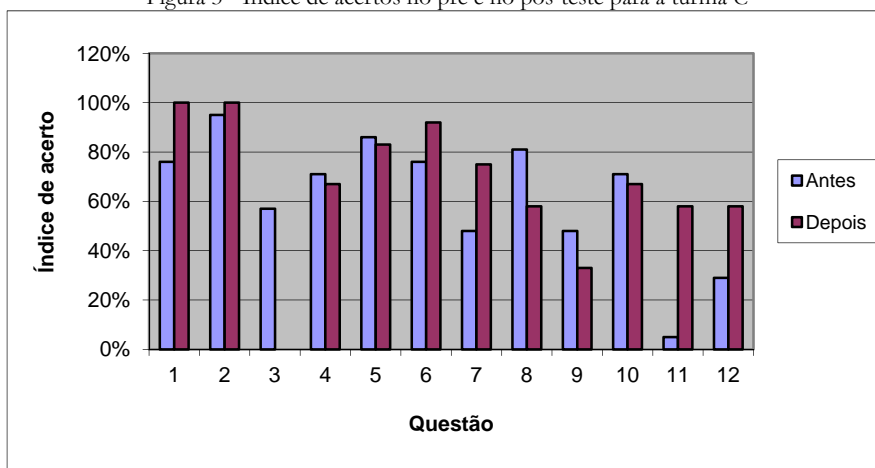
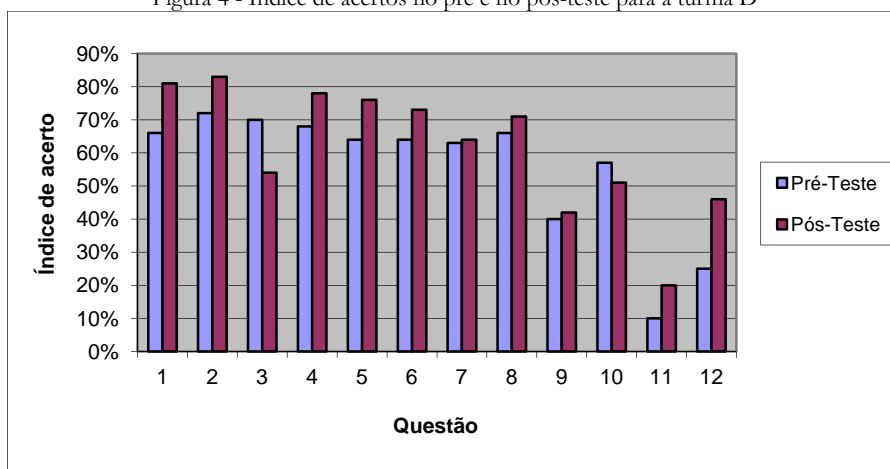


Figura 4 - Índice de acertos no pré e no pós-teste para a turma D



As questões 1 e 2 do pós-teste da turma C apresentaram o índice de 100% de acertos. No pré-teste o menor índice de acertos ocorreu para a questão 11 da turma C, com 5%. Porém, para o pós-teste, a questão 3 da turma C e a questão 11 das turmas A e D apresentaram 0% de acerto.

Tanto no pré como no pós-teste, a questão 11 apresentou baixo índice de acertos para as quatro turmas. Isso, de certa forma, já era esperado, pelo fato de a questão envolver o conceito de probabilidade condicional. Muitos alunos responderam que a probabilidade, nesse caso, seria  $1/2$ , mas a resposta correta é  $1/3$ .

A alternativa “não sei” apresentou decréscimo em todas as turmas. No pré-teste ocorreu com uma média de 8,1%, 23,2%, 3,8% e 4,9%, respectivamente, nas turmas A, B, C e D. Zetetiké – FE/Unicamp – v. 19, n. 36 – jul/dez 2011

turmas *A*, *B*, *C* e *D*; e, no pós-teste, com uma média de 7%, 4,2%, 0,7% e 4,8%. O maior índice foi de 61% e ocorreu na questão 10 da turma *B* no pré-teste.

Apresentamos a seguir alguns resultados de testes estatísticos realizados com os dados em questão.

Apesar de termos indicado, no início do questionário, que a identificação não seria necessária, alguns alunos das turmas *C* e *D* colocaram seus nomes no pré e no pós-teste. Dessa forma, identificamos 5 alunos da turma *C* e 15 alunos da turma *D* com essas características, e para estes sujeitos utilizamos o Teste *t* pareado, considerando a variável número de acertos no pré e no pós-teste para cada um dos alunos identificados. Para os sujeitos da turma *C* foi obtido o *p*-valor 0,0447. Assim, para um nível de significância  $\alpha = 5\%$ , rejeitamos a hipótese de igualdade das médias de acerto, admitindo, no caso, o melhor desempenho no pós-teste. Já para os sujeitos da turma *D* foi obtido o *p*-valor 0,2964, mas neste caso não houve evidência para rejeitar o mesmo desempenho no pré e no pós-teste.

No pré-teste, através da análise de variância, mais especificamente com a técnica de contraste, para a variável número de acertos por alunos, foi identificada uma diferença estatística (*p*-valor < 0,0001) entre o grupo formado pelas turmas *C* e *D* (noturno) e o grupo formado pelas turmas *A* e *B* (diurno), evidenciando um melhor desempenho do grupo formado pelas turmas *C* e *D*. Na análise dos dados utilizamos a planilha Excel e o *software* SAS.

#### Fatores positivos e negativos das aulas

Praticamente todos os alunos gostaram do jogo. O mesmo já não pode ser dito sobre a resolução dos problemas. O aluno A1 destacou: *“pra mim o jogo é legal, mas essa matéria de probabilidade é muito chata, pois não me identifiquei com isso”*. Disse o aluno A2: *“achei muito interessante começar essa matéria com um jogo de dados, [...], mas ao mesmo tempo é meio chato e difícil”*. O aluno A3 mencionou: *“achei muito difícil, pois meu raciocínio é muito lento, não consegui fazer as questões [...] gostei do jogo, pois é interessante e porque ganhei”*. Outras declarações foram: *“o joguinho eu achei legal! Já as atividades não posso falar o mesmo”*, *“gostei bastante do jogo, achei legal e divertido”*, *“este jogo, além de ser divertido, é muito inteligente”*, *“aprendi que o jogo não funcionava bastando ter sorte”* e *“o jogo que ocorreu na sala de aula foi um jogo muito legal. Eu ganhei um bombom”*.

Os problemas foram apresentados em ordem crescente de dificuldades, e assim já era esperada a reação negativa por parte de alguns alunos sobre o interesse em suas resoluções. As professoras foram orientadas para motivá-los, informando a eles que as resoluções desses problemas os tornariam melhores jogadores, com mais chances de vitória. O aluno A7 observou este fato: *“descobrimos que o jogo não depende apenas da sorte, mas também de técnicas aprendidas na sala de aula, que pode nos ajudar a vencer”*.

Destacamos, porém, dois pontos negativos: uma aluna, por questões religiosas, negou-se a participar do jogo; a professora A, das turmas do noturno,

revelou que é difícil trabalhar com muitos alunos nesse tipo de atividade e que os alunos faltam a muitas aulas e estão cansados. Revelou: *“eu levei a canequinha então foi uma ‘baderna’. Eles acharam que era para fazer barulho. Aí na outra sala eu não levei a canequinha [...] tinha que fazer na mão ou jogar em cima da carteira e aí eu percebi muita diferença, porque o trabalho foi mais sério”*.

Como fator positivo, a professora B relatou que “quando a gente começa com jogos, despertamos o interesse deles, porque eles gostam de competir, a competição é importante para eles e, quando você está questionando problemas sobre aqueles jogos se torna interessante”. Essa mesma professora destacou outros jogos utilizados na feira e a importância do trabalho realizado em sala de aula.

Fizemos com setores circulares um alvo onde avaliamos as probabilidades, então, foi bastante interessante. Os alunos chegavam e falavam para mim “qual a probabilidade de eu derrubar aquelas latas?” [outro jogo utilizado na feira], então, começou a fazer parte do vocabulário deles. Também houve repercussão, por exemplo, num primeiro [1º ano do Ensino Médio] que perguntou se no próximo ano veriam o conteúdo, então, foi algo interessante que se tornou notícia. (Professora B).

A professora C mencionou que “nunca tinha começado um trabalho com jogos, então, [...] o que eu achei mais interessante, mesmo depois do jogo, foi relacionar todos os problemas com o jogo, porque os livros não fazem isso”.

Alguns alunos destacaram o interesse pelas aulas e também o fato de terem gostado da matéria. O aluno A7 destacou: *“... posso dizer que a probabilidade de eu ter gostado dessa matéria é 100%”*. Já o aluno A9 assim se expressou: *“acho que foi a matéria que os alunos do 2º A mais se interessaram”*. O aluno A13 disse: *“estou gostando do conteúdo e também gostei do jogo”*. O aluno A14 relatou: *“ao mesmo tempo que aprendemos nos divertimos com jogos”* e o aluno A15 destacou que *“o aluno fica mais interessado de participar da aula, [...], com isso o aluno sai da rotina”*. Como apontado por Van de Walle (2009), o uso da resolução de problemas em sala de aula diminui a indisciplina da turma, os alunos começam a acreditar que são capazes de aprender Matemática.

Três alunos mencionaram o uso de raciocínio na resolução dos problemas. O aluno A17 referiu-se ao raciocínio lógico, dizendo que: *“probabilidade é uma matéria interessante e que, para ser entendida, basta ter raciocínio lógico”*. Para o aluno A11: *“o conteúdo [...] é mais simples do que os outros, porém este baseia-se no raciocínio”*, e o aluno A6 afirmou: *“aprendia de um modo divertido e também você resolvia apenas por raciocínio”*. Um dos fatores positivos do trabalho com jogos por meio da resolução de problemas em sala de aula destacado por Borin (2004) é o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

A não utilização de fórmulas no início dos estudos foi apontada como ponto positivo por vários alunos. O aluno A4 destacou: *“gostei do projeto, pude aprender melhor, [...] conseguimos chegar às respostas sem nos apegar em fórmulas”*. O aluno A5 revelou: *“eu achei interessante porque a gente fazia sem ter a fórmula”*. Para o aluno A6: *“você podia resolver da maneira que quisesse, muito ao contrário do livro didático, que ao invés do jogo, ensina probabilidade através de fórmulas”*. O aluno A8 comentou: *“acho muito interessante começar*

*essa matéria com um jogo de dados, pois sempre começa [...] cheio de fórmulas*". Outra declaração foi: *"com a introdução do jogo aprendemos a matéria mais fácil, pois os problemas são parecidos com o jogo"*. De acordo com Van de Walle (2009, p. 509), para o ensino de conceitos de Probabilidade, "a ênfase deve estar na exploração em vez de em regras ou definições formais. Se bem conduzidas, essas experiências informais fornecerão uma base útil da qual ideias mais formais podem ser desenvolvidas".

O fato de que o estudo de Probabilidade pode contribuir com a melhoria da qualidade de vida do cidadão foi também observado pelos alunos. O aluno A7 escreveu: *"eu gostei dessa matéria, por envolver assuntos do dia a dia"*. Outros alunos destacaram: *"posso aprimorar meus conhecimentos em algo que estou sempre vendo fora da escola"* e *"[...] se percebe que a Matemática é simplesmente essencial e necessária para todos"*. Conforme Batanero (2006), conceitos envolvendo o acaso fazem parte de nosso dia a dia.

Alguns alunos destacaram ser mais prazeroso, divertido e gostoso trabalhar com atividades envolvendo jogos. O aluno A7 destacou: *"[...] e por estar relacionada a jogos, se torna ainda mais prazeroso fazer as atividades e desenvolver o conteúdo"*. O aluno A17 disse que *"a aula é muito divertida"*. O aluno A16 mencionou que *"se tornou uma aula 'gostosa', 'leve' [...]"*. Essas afirmações corroboram o estabelecido em Van de Walle (2009, p. 59), quando afirma que o trabalho com resolução de problemas "é muito divertido".

A utilização da nova metodologia de ensino foi também destacada pelos alunos. Para o aluno A10, "foi uma experiência nova com os alunos e [...] uma maneira de estimular mais a aprendizagem". O aluno A12 relatou: "eu gostei do novo modo de aprendizagem dessa matéria". Para o aluno A18, "é um jeito novo de aprendizagem, que pode estimular mais o pensamento dos alunos".

Finalmente, como um fator positivo, destacamos o depoimento da aluna A19: *"eu gostei muito, aprendi como nunca havia aprendido Matemática, achei fácil e muito interessante"*. Segundo depoimento da professora, essa aluna tinha dependência nessa disciplina e havia parado de estudar por quatro anos. Durante as aulas se interessou muito pelo jogo, transformou-se em liderança entre seus colegas e conseguiu excelente nota na prova de probabilidade.

### Considerações finais

Pelos depoimentos dos alunos, percebemos que houve nesses indivíduos um despertar para questões relacionadas à Probabilidade, conteúdo hoje indispensável para a formação plena do cidadão. Como destacou a professora B, o jogo (a probabilidade) *"virou notícia"*.

Procuramos mostrar nesta proposta de ensino que o uso das fórmulas deve ocorrer apenas no final das atividades, depois que o aluno assimilou o conceito matemático estudado. Nosso interesse é desenvolver o raciocínio dedutivo do aluno. A memorização de fórmulas é temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é

para toda a vida. A não utilização de fórmulas no início dos trabalhos foi observada como ponto positivo por muitos alunos.

Tanto em situações de jogo como na resolução dos problemas formulados, os alunos são estimulados a tomar uma decisão, e esse é um dos principais objetivos para o ensino de probabilidade.

As professoras, como os alunos, puderam trabalhar com resolução de problemas e jogos, dois instrumentos importantes e recomendados pelos PCN para o ensino de Matemática, mas infelizmente ainda pouco utilizados, principalmente no Ensino Médio. Vários alunos destacaram que trabalhar com atividades envolvendo jogos é mais prazeroso, divertido e gostoso.

Os alunos tornam-se ativos na construção de seus próprios conhecimentos; o jogo e os problemas podem tornar esse objetivo mais acessível. A metodologia de resolução de problemas dá mais trabalho ao professor, mas, se adequadamente utilizada, pode contribuir significativamente para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem.

### Referências bibliográficas

- BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, v. 8, n. 3, p.247-263, nov. 2005.
- BATANERO, C. Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. In: FLORES, P.; LUPIÁÑEZ, J. (Ed.). *Investigación en el aula de matemática*. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales, 2006. CD ROM.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial Reasoning and its Assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (Ed.). *The assessment challenge in statistics education*. IOS Press, 1997. Disponível em: <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref>. Acesso em: 20 fev. 2009.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP, 2004.
- CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 25., 2002, Caxambu. *Anais...* Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002. 1 CD.
- CORBALÁN, F. *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis, 2002.
- COUTINHO, C. Q. S. *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. 2001. 330f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble I, França.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. *Azar y probabilidad*. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.
- GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino de matemática. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo: SBEM-SP, v. 10, n. 12, p. 43-50, 2007.



- HURTADO, N. H.; COSTA, J. F. S. A probabilidade no ensino médio: a importância dos jogos como ferramenta didática. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL “EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI”, 1999, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis, 1999.
- LOPES, C. A. E. *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. 2003. 281f. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- LOPES, C. A. E. A estatística e a probabilidade na educação básica e a formação dos educadores matemáticos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. *Anais...* Curitiba: SBEM, 2006.
- MOURA, M. O. *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. São Paulo: FDE, 1992. (Série Ideias, 10).
- MOURA, M. O. A série busca no jogo: do lúdico na matemática. *Educação Matemática em Revista – SBEM*, São Paulo, n. 3, p. 17-24, 2. sem. 1994.
- NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
- POLYA, G. A. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- SCHUH, F. *The Master Book of Mathematical Recreations*. New York: Dover Publications, 1968.
- SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. *Caderno do professor: matemática*. São Paulo: SEE, 2008. (Ensino Médio, 2ª série, 3º bimestre).
- VAN de WALLE, J. A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

## ANEXO

Este questionário faz parte da pesquisa “*Jogos com Resolução de Problemas para o Estudo de Probabilidade no Ensino Médio*”, que está sendo desenvolvida pelo Prof. José Marcos Lopes, da Unesp/Ilha Solteira, e deverá ser respondido pelos alunos do segundo ano do Ensino Médio. Não é necessário se identificar. Obrigado pela colaboração.

1. No lançamento de um dado honesto teremos mais chances em obter a face 1 do que a face 6?

Sim  Não  Não sei

2. No lançamento de uma moeda honesta a probabilidade de sair cara é igual a  $\frac{1}{2}$ ?

Sim  Não  Não sei

3. É mais provável obter cara, no lançamento de uma moeda honesta, do que a face 1, no lançamento de um dado honesto?

Sim  Não  Não sei

4. É mais provável ocorrer faces iguais, no lançamento de duas moedas, do que faces iguais no lançamento de dois dados?

Sim  Não  Não sei

5. Retirando-se ao acaso uma carta de um baralho com 52 cartas, é mais provável retirar um rei do que um ás?

Sim  Não  Não sei

6. Numa primeira caixa existem dez bolas, sendo cinco pretas e cinco brancas. Numa segunda caixa existem seis bolas, sendo quatro pretas e duas brancas. Um jogo consiste em retirar ao acaso uma única bola de uma das duas caixas. Vence o jogo quem retirar uma bola preta. Você teria mais chance de vencer o jogo se escolhesse a:

primeira caixa;  segunda caixa;

qualquer uma das duas;  Não sei.

7. Se lançarmos uma moeda honesta 50 vezes, então a obtenção de 25 caras é um evento:

pouco provável de ocorrer;  muito provável de ocorrer;

impossível de ocorrer;  Não sei.

8. Numa caixa existem cinco papezinhos numerados de 1 a 5. Serão retirados sucessivamente dois papezinhos da caixa, sem reposição do primeiro. Sabendo-se que o primeiro número sorteado foi ímpar, é mais provável que o segundo número sorteado seja par?

sim                       não                       não sei

**9.** Para ganhar uma certa aposta, uma pessoa deve optar entre um jogo de dados e um com moedas. Se escolher dados, deve lançar um dado duas vezes e, para ganhar, deve obter o número 6 nos dois lançamentos. Escolhendo moedas, deve lançar uma moeda quatro vezes e, para ganhar, em todas as vezes deve sair cara. Em qual desses dois jogos a pessoa tem maior possibilidade de vencer?

No jogo de dados.                       No jogo de moedas.  
 As chances são iguais.                       Não sei.

**10.** Numa caixa há oito bolinhas numeradas de 1 a 8, que serão retiradas ao acaso, de uma em uma, sucessivamente. A chance de o número 1 sair na primeira retirada é :

maior do que a chance de o número 1 sair na terceira retirada;  
 menor do que a chance de o número 1 sair na terceira retirada;  
 igual à chance de o número 1 sair na terceira retirada;  
 Não sei.

**11.** Considere uma família com duas crianças, sendo que uma delas é menino. Qual é a probabilidade de que ambos sejam meninos?

$\frac{1}{2} = 50\%$       $\frac{1}{3} = 33,3\%$                         $\frac{1}{4} = 25\%$      Não sei.

**12.** Como você definiria o que é probabilidade?

É a parte da Estatística que estuda fenômenos determinísticos.  
 É a ciência que cuida da análise e da interpretação de dados experimentais.  
 É um número entre 0 e 1 que mede a possibilidade de que um certo evento aconteça.  
 É um número entre 0% e 100% que serve para medir a nossa sorte.  
 Não sei.

Aprovado em 08/06/2011.