

Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise

*Lourdes Maria Werle de Almeida**

Resumo: Considerando a importância da linguagem signica para a conceitualização em Matemática, nosso trabalho propõe-se a apresentar reflexões sobre possíveis aproximações entre modelos matemáticos e metáforas. Nossas discussões são orientadas pela análise de uma atividade de modelagem desenvolvida por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática em relação às questões: Um modelo matemático é uma metáfora? A modelagem matemática é um processo equivalente ao processo de produção de uma metáfora? O uso ou a produção de modelos e metáforas favorece a construção de significados para objetos dos domínios conceituais a que estão associados? As reflexões sinalizam que podemos vislumbrar aproximações entre modelos, modelagem e metáforas que podem ser importantes para a significação de objetos associados ao domínio base e ao domínio alvo relacionados à situação em estudo.

Palavras-chave: Semiótica; metáforas; Modelagem Matemática

A semiotic look on mathematical modeling: a focus on metaphors

Abstract: Considering the importance of the signic language for conceptualization in mathematics, our work is intended to present reflections about the importance of a special type of sign, the metaphor, in mathematical modeling activities. The reflections about possible approaches between mathematical models (obtained in mathematical modeling activities) and the production of metaphors are guided by the analysis of a modeling activity developed by students of a mathematics degree course, in relation to these questions: Is a mathematical model a metaphor? Is mathematical modeling an

* Docente do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática UEL – Londrina – PR - lourdes@uel.br

equivalent process to the process of metaphor production? Does the use or the production of models and metaphors favor the construction of meanings for objects of the conceptual domains they are associated to? The reflections signal that we can glimpse approaches among models, modeling and metaphors that can be important for the construction of the students' knowledge involved in activities of use and production of models and metaphors.

Key words: semiotics; metaphors; mathematical modeling.

1-Introdução

A discussão teórica sobre funções da linguagem tem-se orientado por perspectivas variadas. Embora com encaminhamentos por vezes distintos, as pesquisas reconhecem que a nossa condição de relacionamento com o mundo é mediada pela linguagem. Ponderar entre diferentes pontos de vista e justificá-los segundo um campo semântico específico constitui habilidade mediada pela linguagem.

Em termos específicos da conceitualização em Matemática, a linguagem tem um papel importante enquanto recurso à função semiótica. Nesse contexto, a diversidade de usos da linguagem e das representações em Matemática tem instigado professores e pesquisadores a debruçar-se sobre potencialidades dessas representações para a construção de conhecimento. Nesse sentido, nosso trabalho propõe-se a apresentar reflexões sobre o papel de um tipo especial de signo, a metáfora.

Assim, inicialmente trataremos da Semiótica de Peirce, em que situamos a metáfora como signo icônico. A seguir, trataremos da conceitualização da metáfora no âmbito da Educação Matemática e de perspectivas para o pensamento metafórico neste contexto. Considerando que a metáfora conceitual está diretamente ligada ao sujeito que a produz ou que por ela é, de algum modo, influenciado, direcionamos nosso interesse para a possibilidade desta produção em ambientes acadêmicos e para implicações desta produção para a significação dos objetos relativos aos domínios da metáfora.

Pautados em pesquisas que tratam da natureza social e contextual do conhecimento, tratamos da modelagem matemática como uma atividade associada a processos de tradução de linguagens, à construção e à interpretação de modelos que visam descrever e/ou analisar, por meio de representações matemáticas, o comportamento de um sistema com referência na realidade. Neste contexto, tratamos de relações entre modelos, modelagem¹ e produção de metáforas.

As reflexões sobre possíveis aproximações (ou contrapontos) entre modelos matemáticos (obtidos em atividades de modelagem) e a produção de metáforas são orientadas pela análise de uma atividade de modelagem desenvolvida por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em relação às questões: Um modelo matemático é uma metáfora? A modelagem matemática é um processo equivalente ao processo de produção de uma metáfora? O uso ou a produção de modelos e metáforas favorece a construção de significados para objetos dos domínios conceituais a que estão associados?

2-Semiótica de Peirce- ciência dos signos

Estudos que, de algum modo, remetem à semiótica datam de eras antigas. Segundo Nöth (2003), os signos já eram abordados por Platão (427-347) e Aristóteles (384-322). A palavra grega *semeiotiké*, com o significado de ciência geral dos signos, os signos da linguagem, no entanto, foi introduzida na filosofia com esta designação pelo filósofo empirista inglês John Locke (1632-1704), em seu *Essay on human understanding*, no século XVII. Todavia, os contornos de ciência para a semiótica são esboçados a partir da metade do século XIX, divididos em três vertentes: uma nos Estados Unidos (Semiótica peirceana), outra na antiga União Soviética (por Bakhtin e Vygotsky) e a terceira na Europa Ocidental (tradição saussureana).

Charles Sanders Peirce (1839-1914) – caracterizando a Semiótica peirceana —, no início do século XX retoma o termo “semiótica” com seu sentido original, a partir da Lógica concebida como uma filosofia científica da linguagem. Segundo Santaella (2008), a partir de 1857,

¹ Usamos o termo “modelagem” com o mesmo significado de “modelagem matemática”.

Pierce preocupou-se com a organização de uma doutrina filosófico-analítica geral capaz de compreender as estruturas do conhecimento; e, assim, passou a fundamentar a Semiótica (Semiótica peirceana) como a ciência dos signos, que tem por objetivo o exame dos modos de produção de significado e de constituição de conhecimento.

Ao definir signo, Peirce identifica três elementos sîgnicos: o representâmen, o objeto e o interpretante. O autor caracteriza esses elementos:

Um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto², representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que eu, por vezes, denominei fundamento do representâmen (PEIRCE, 2005, p. 46).

Considerando esta caracterização, podemos entender que o signo é uma coisa que representa outra coisa – o objeto. O signo existe somente se puder representar, substituir algo diferente dele, pois o signo não é o objeto, ele está no lugar do objeto. De modo geral, o objeto é inacessível à percepção humana, necessitando de um signo para torná-lo presente.

A ação do signo de “estar no lugar de” só se completa se houver alguém (ou algo) capaz de interpretar essa relação. Neste contexto, a semiose é usualmente definida como um processo de atividade característico da capacidade humana de produção e entendimento de signos das mais diversas naturezas.

² Para Peirce (2005, p. 48), um objeto “é uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir”.

2.1- Sobre as tríades peirceanas

A própria conceitualização de signo estruturada por Peirce já nos apresenta o que se tornaria a característica mais representativa da teoria peirceana: a tríade³.

Representâmen, objeto e interpretante, os elementos constituintes do signo como caracterizado por Peirce, seriam já o indício de tricotomias que sua teoria iria abarcar. O representâmen – responsável pela representação – constitui o que Trevisan e Carneiro (2009) denominam o “corpo sígnico” e desempenha o papel de mediação entre o objeto e o interpretante. O interpretante substitui o objeto na mente do intérprete (ser humano), uma vez que o objeto pode não ser atingível pela percepção. Neste sentido, Santaella, argumenta que

[...] a partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro). Portanto, o significado de um signo é outro signo — seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou mero sentimento de alegria, raiva... uma idéia, ou seja lá o que for — porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é outro signo (tradução do primeiro) (SANTAELLA , 2008, p. 58-59).

Esta relação do signo com o objeto está fundamentada no “tipo” de objeto: objeto imediato ou objeto dinâmico. Uma foto da cidade de Veneza, por exemplo, é um signo cujo objeto é imediato; ao visitar Veneza, esse objeto passa a ser, para esse intérprete, um objeto dinâmico. Segundo Trevisan e Carneiro (2009), há signos aos quais não se associa um objeto dinâmico, como é, por exemplo, a cidade de Pasárgada, “criada” por Manual Bandeira.

³ Peirce sempre deu preferência à relação com três, estabelecendo relações entre palavras em forma de tricotomia, estabelecendo categorias entre fenômenos em número de três e considerando a relação triádica que o signo pode estabelecer. Considerações aprofundadas sobre as divisões triádicas estão em Peirce, 2005.

Diversas tricotomias peirceanas se tornaram conhecidas, no decorrer do tempo. Uma delas, considerada fundamental para o próprio Peirce e a que nos interessa diretamente neste trabalho, diz respeito à relação do signo com o objeto e é constituída de: *índice*, *símbolo* e *ícone*.

Um índice indica o objeto pela existência concreta; ele (o índice) sofre uma ação real do objeto. Se, ao caminhar na praia, me deparo com alguém com a pele muito vermelha, posso deduzir que a pessoa tomou sol demais. Este é um exemplo de índice.

Um símbolo representa o seu objeto; representa aquilo que a lei determina que ele represente e tem, de modo geral, uma natureza eminentemente convencional. A bandeira nacional, por exemplo, é um símbolo do país.

Um ícone, por sua vez, sugere ou evoca o seu objeto, ou seja, é um signo que fica no lugar de um objeto com o qual possui traços em comum. Por exemplo, a imagem da árvore apresentada na fotografia tem semelhança com a árvore, assim caracteriza um ícone. A imagem de um copinho de sorvete com a forma de um cone é um ícone associado ao cone. O ícone somente pode ser associado um objeto que existe (pelo menos o objeto imediato); para o exemplo do cone, podemos dizer que não há o objeto dinâmico (não há cones – há objetos com forma de cone).

Peirce, ao tratar da atuação do ícone na cognição, faz-nos atentar para a importância do uso de ícones para representar o mundo, ao afirmar que:

A única maneira de comunicar diretamente uma idéia é através de um ícone e todo método de comunicação indireta de uma idéia deve depender, para ser estabelecido, do uso de um ícone. Daí segue-se que toda asserção deve conter um ícone ou conjunto de ícones, ou então deve conter signos cujo significado só seja explicável por ícones (CP 4.278)⁴.

⁴ *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, v. I-VI. Ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiss Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1934. Na citação cf. 4.278, o primeiro

3. O signo metáfora

Uma análise dos signos icônicos conduziu a uma classificação que coloca a metáfora como ícone, guardando uma relação analógica com o objeto (Peirce, 1980; Santaella, 2008; Nöth, 2003; Otte, 2001; Ricoeur, 1983).

Sobre a metáfora, Nöth (2003) argumenta:

[...] o representâmen é signo porque mantém relação triádica na forma de paralelismo entre dois elementos constitutivos, paralelismo que se resolve com uma terceira relação. Um ícone dessa categoria é a metáfora. Consideremos, como exemplo, a metáfora “olho do céu”, com a qual Shakespeare se refere ao sol. Os três elementos de sua composição são, respectivamente, o sentido literal do órgão da percepção, o sentido metafórico do “sol” e o *tertium comparationis*, o sentido comum à relação dos dois primeiros. Nesse caso, poderíamos ainda relacioná-los com outros atributos, tais como o “redondo” e o “brilhante” (NÖTH, 2003, p. 81).

Segundo Ricoeur (1983), a caracterização da metáfora como ícone está fundamentada na ideia de duplicidade de referências, inerente à metáfora. Esta duplicidade implica, em muitas situações, o abandono de significados da referência original para passar a considerar uma segunda referência, a referência metafórica. O exemplo “olho do céu” ilustra essa ideia: o abandono do significado literal de olho e céu é uma condição para que uma nova referência seja criada para o termo (sol).

Pensar a metáfora como ícone, segundo Carreira (2001), conduz à percepção de um “novo estado” para o signo, quando a relação semântica não tem significado. Esta falta de significado, no entanto, remete a um novo significado (“olho do céu” passa a significar “sol”).

dígito sinaliza o volume da obra referida e os demais, o parágrafo. A obra é denotada pela sigla CP).

Coisas que eram diferentes passam a ser iguais, em alguns aspectos (“olho do céu” = “sol”).

Segundo Trevisan e Carneiro (2009), esta aparente migração de referências associada à iconicidade tem papel importante na cognição, e não há como negar que a semelhança entre objeto e representâmen se deve muito mais às operações dedutivas da mente interpretante do que às similaridades que porventura apresentem entre si objeto e representâmen. Daí a importância e o nosso interesse particular no estudo da metáfora como signo icônico no âmbito da Educação Matemática.

4- O pensamento metafórico na Matemática

As discussões sobre a legitimidade da utilização das metáforas na produção de conhecimento têm ocupado pesquisadores de diversas áreas. Não alheios às polêmicas e aos confrontos teóricos estabelecidos no decorrer da história entre cientistas, filósofos e epistemólogos, no que se refere ao uso e à importância da linguagem metafórica (polêmicas que estão fora do escopo deste texto por razões de espaço e de interesse), estamos interessados aqui em tratar do pensamento metafórico e de um contexto em que este pode se fazer presente na sala de aula.

A incursão ao tema vem ancorada em argumentações que, segundo Otte (2001), foram apresentadas ainda no século XVIII e reconhecem o papel da linguagem no desenvolvimento e na evolução do conhecimento, indicando a importância de uma abordagem semiótica à cognição. A apresentação da metáfora como um tipo de ícone na semiótica peirceana, no início do século XX, vem fortalecer a sistematização no tratamento da linguagem, reconhecendo os atributos da metáfora.

Lakoff e Johnson (2002) argumentam que a metáfora conceitual consiste na conceitualização de um domínio em termos de outro, muitas vezes de modo inconsciente, mas percebendo uma interseção de significados. Segundo Lakoff e Núñez (2000), as metáforas geram uma relação conceitual entre um “domínio base” e um “domínio alvo”, projetando propriedades e inferências do “domínio base” no “domínio alvo”. Nesse sentido, Carreira (2001) afirma que o uso de uma metáfora

é comparável a uma tela, uma lente, ou um filtro que seleciona, elimina e organiza o significado de um certo domínio.

Ao tratar da importância do pensamento metafórico, Lakoff e Johnson (2002) argumentam que nossa representação do mundo é influenciada pelas metáforas que elaboramos, embora inconscientemente. Segundo os autores, a maior parte dos seres humanos conceitualiza coisas novas em termos de coisas já conhecidas. Um contexto que se apresenta mais familiar, em termos de percepção das relações constituídas, figura como “domínio base”. O outro que se afigura como novo ou que é inacessível à experiência direta, no qual se busca o estabelecimento de relações genuínas, é caracterizado “domínio alvo”.

Nestes termos, para Gentner e Jeziorski (1979), o “domínio base” representa um conhecimento que já faz parte do próprio contexto social, mesmo tratando-se do contexto de produção de conhecimento científico, uma vez que já goza de legitimidade, isto é, já é possuidor de determinada aceitação científica e constitui-se num elemento base para a sustentação do novo.

No âmbito da Matemática, para Bolite, Acevedo e Font (2005), é justamente este fato de as metáforas conectarem diferentes sentidos ou diferentes “conhecimentos” que as torna essenciais para que as pessoas produzam significados. Segundo os autores, com a perspectiva de produzir significado em Matemática, podem ser usados dois tipos de metáforas: as que têm por objetivo relacionar situações não matemáticas com a matemática e as que tratam de diferentes domínios, mas ambos de natureza matemática.

No primeiro caso, podemos considerar como exemplo a expressão “a função é uma máquina” usada em muitas situações, especialmente da Educação Básica, para introduzir o significado de função; a metáfora “a curva é suave” alude a curvas diferenciáveis em determinado intervalo e é usada, especialmente, no âmbito de aulas de Cálculo Diferencial e Integral. Para Leite e Otte (2008), a vantagem do uso desse tipo de metáfora, em termos cognitivos, estaria no fato de apoiar a comunicação em conceitos mais próximos da experiência do aluno, na expectativa de

facilitar a compreensão de conceitos mais complexos ou que ainda não estão integrados aos seus domínios de conhecimento.

Já no caso em que os dois domínios são matemáticos, os conhecimentos de um domínio servem como base para outro domínio da própria matemática. Um exemplo é a relação entre número e sua representação geométrica por meio da expressão “os números reais são pontos de uma reta”.

Em muitas situações, fora do contexto da matemática, a linguagem matemática é usada sob a forma de metáforas, associada a domínios não matemáticos. Expressões como “sair pela tangente”, “ver por outro ângulo” são metáforas nas quais o domínio base é a matemática.

Segundo Rodrigues (2007), em termos gerais, as metáforas são amplamente utilizadas nas diferentes áreas. Em muitos casos ficam ocultas, são imperceptíveis, disfarçadas ou mesmo descartadas, isto não porque a nova descoberta consiga se fazer justificada unicamente por sua lógica interna ou por ser resultado de um processo indutivo bem estruturado, mas pelo que Latour, B. e Woolgar, S. (1989), segundo Rodrigues (2007, p. 20), chamaram de “instrumento ou dispositivo de inscrição”, caracterizado como “uma operação mais básica que a composição escrita, literária”.

No caso particular da matemática, há conjecturas (Sfard, 1997) de que as metáforas seriam indispensáveis, considerando a natureza “abstrata” dos objetos matemáticos. Neste sentido, no entanto, Dubinsky (1991) já pondera que usamos metáforas para explicar a abstração, mas não para realizá-la. O autor defende que o formalismo pode ser mais efetivo do que a metáfora, no que se refere à construção de significado, de modo que o seu uso não pode substituir processos “mais formais” para tratar da caracterização de alguns objetos matemáticos.

Assim, se assumirmos que as metáforas podem desempenhar, cognitivamente, um papel semelhante ao do processo indutivo, podemos assumir também que o pensamento metafórico não pode ser formalmente “ensinado” a alguém, mas emerge como o que Rodrigues (2007) caracteriza como a inteligência humana. O autor argumenta que

podemos considerar a metáfora como ato cognitivo, como uma faculdade de cognição em que “... a razão busca comparações, correlações e similaridades, linguagens, formas, estruturas, etc., entre dois ou mais domínios distintos de conhecimento em que pelo menos um desses domínios seja conhecido, mapeado, aceito” (Ibidem, p. 23). Pensar metaforicamente implica, por conseguinte, pensar nesta duplicidade de domínios. A semelhança decorre da aproximação destes dois domínios conceituais e, em certa medida, aproxima objeto e representâmen na mente do intérprete.

Esta perspectiva para a metáfora, tratada como um signo semiótico, diz respeito a uma concepção de “mente” que permite considerar que existe “algum isomorfismo entre os componentes representativos do sistema mental e os conteúdos dessas representações e processos” (Santaella, 2001, p. 59). Para Chamarelli Filho (2007), isso leva a considerar que as relações entre o homem e o que lhe é externo são mediadas por operações semióticas que traduzem informações exógenas em signos com os quais a mente opera. Nesse sentido, a metáfora depende de criatividade tanto em sua elaboração quanto em sua interpretação, e sua compreensão é facilitada pelo contexto cultural.

Considerando que a metáfora conceitual está diretamente ligada ao sujeito que a produz ou que por ela é, de algum modo, influenciado, direcionamos nosso interesse para a possibilidade dessa produção em ambientes acadêmicos e para implicações dessa produção na significação de objetos relativos aos domínios associados às metáforas.

5- Modelos, modelagem matemática e metáforas

5.1- Modelo e modelagem matemática

Diversas pesquisas, especialmente no âmbito da Educação Matemática, têm como foco a natureza social e contextual do conhecimento e, de modo geral, desenvolvem uma argumentação que reconhece que o ensino e a aprendizagem se dão em contextos sociais que não só influenciam, mas determinam o tipo de conhecimento a ser construído (Lave; Wenger, 1991; Lave, 1988; Cantoral et al., 2006; Almeida; Ferruzzi, 2009; Almeida; Brito, 2005, entre outros).

De modo geral, pesquisas pautadas nesta perspectiva sustentam que a escola tem como função social gerar ambientes formativos que preparem os alunos dos diferentes níveis de escolaridade para lidar também com a diversidade de fatos que sucedem na vida fora da escola. Neste contexto, a inclusão de atividades com referência na realidade⁵ é fortemente recomendada.

Bassanezi (2002) defende que a análise de uma situação real com o propósito de substituir a visão, por vezes simplista, dessa realidade por uma postura crítica e mais abrangente requer o uso de uma linguagem adequada, que facilite e racionalize o pensamento. A linguagem, nesse sentido, refere-se a um sistema organizado de geração, organização, interpretação e comunicação da informação por meio de signos.

Segundo D’Ambrósio (1996), o uso da linguagem nesse contexto conduz a elaborações sobre representações da realidade. Estas representações constituem o que o autor denomina “modelos”.

No caso particular da Matemática, os modelos associados aos fenômenos (de modo geral não matemáticos) são caracterizados como modelos matemáticos. Segundo Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este. Nesse contexto, a modelagem matemática implica a construção e a interpretação de modelos matemáticos.

No âmbito da Educação Matemática, no entanto, essa construção e interpretação de modelos vêm revestidas de intencionalidades e interesses, por vezes, para além dessa construção. Nesse sentido, Dupuy (1996, p. 27), em suas conjecturas sobre a produção de conhecimento,

⁵Foge aos propósitos deste texto uma discussão sobre o que é “realidade”. Assim, apoiamos em Blum e Niss (1991) para assumir como realidade qualquer situação que possa ser idealizada, estruturada e simplificada com a finalidade de ser investigada sob o prisma de “um problema que permita uma abordagem por meio da matemática”.

afirma que “conhecer é produzir um modelo do fenômeno e efetuar sobre ele manipulações ordenadas”.

De modo geral, uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Nesse sentido, realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados) são domínios diferentes que passam a se integrar, e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados. A esta situação inicial problemática a literatura costuma se referir como situação-problema; à situação final desejada é associada, de modo geral, uma representação matemática, um modelo matemático.

5.2- Modelos, modelagem e metáforas

As considerações que apresentamos em relação à teoria sócio-cultural e em relação aos modelos matemáticos parecem revelar que há aparentes aproximações entre modelos, modelagem e metáforas. A mais evidente dessas aproximações consiste essencialmente nas caracterizações que apresentamos: a modelagem matemática, enquanto construção e avaliação de modelos, e a produção de metáforas conceituais nos permitem fazer inferências sobre um domínio (alvo) a partir de outro domínio (base).

No caso da modelagem matemática, como a caracterizamos neste texto, “o domínio base” corresponde a uma situação-problema da realidade e o “domínio alvo”, a uma solução associada ao modelo matemático resultante das relações estabelecidas entre os domínios.

Carreira (2001), ao tratar de possíveis semelhanças entre modelos e metáforas, apresenta suas argumentações a partir de duas questões: Um modelo matemático é uma metáfora? A modelagem matemática é um processo equivalente ao processo de produção de uma metáfora?

Com a finalidade de também investir nas reflexões sobre estas questões, pautamos nossas argumentações na conjectura de que a modelagem matemática remete a um procedimento criativo e interpretativo que estabelece⁶ uma estrutura matemática, e esta deve incorporar as características essenciais do objeto ou do fenômeno que pretende representar.

A busca por essa “estrutura matemática” requer a definição de um ponto de vista específico sobre a situação e sobre a matemática. Nesse sentido, Carreira (2001, p. 267) argumenta que “adotar um ponto de vista particular é fazer uso de metáforas”.

A argumentação da autora está fundamentada nas considerações de que metáforas, enquanto mecanismos cognitivos, realizam uma organização perceptiva e cognitiva que orienta a seleção consciente de aspectos específicos e particulares adequados para a busca de relações entre os dois domínios conceituais que lhe estão associados (Santos, 1994; Lakoff; Johnson, 2002). Assim, enquanto a construção de um modelo matemático para uma situação-problema requer a articulação entre dois domínios (realidade e matemática), essa articulação de domínios se realiza mediante o apoio de metáforas.

Nesse contexto, Carreira (2001), na estruturação de respostas às suas questões, assevera que a metáfora é necessária para a construção do modelo; o modelo é o que resulta, efetivamente, após a produção das metáforas.

Na tentativa de alargar as discussões sobre aproximações (ou contrapontos) entre modelos e metáforas, fundamentados na argumentação de Lakoff e Johnson (2002) de que conceitualizamos novas coisas em termos do que já conhecemos, estamos interessados em apresentar algumas reflexões sobre a questão: O uso ou a produção de modelos e metáforas favorece a construção de significados para objetos dos domínios conceituais a que estão associados? Apresentamos nossas

⁶ “Estabelecer”, neste caso, significa que o modelador pode tanto buscar em sua estrutura cognitiva conceitos matemáticos que já conhece quanto ter a necessidade de recorrer, por meio de estudos e/ou auxílio de outros, a conceitos que ainda não se constituem em conhecimento prévio nesse momento.

reflexões com base na análise da construção de modelos realizada por estudantes em relação a uma situação-problema.

6- A situação-problema e o modelo construído: modelagem, modelos, metáforas e sujeitos

Resgatando as considerações apresentadas no decorrer do texto, alargamos as discussões nesta seção, buscando reflexões sobre a questão que enunciemos a partir da análise de uma situação-problema investigada por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, no âmbito da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. As nossas argumentações e inferências sobre a modelagem, os modelos, as metáforas e os alunos, realizadas à luz dos pressupostos teóricos enunciados, estão fundamentadas nas análises que fazemos dos dados coletados, usando o diário de campo que elaboramos durante o desenvolvimento da atividade; o relatório entregue pelos alunos; a apresentação oral do trabalho, realizada pelos alunos; as conversas e as informações que registramos durante as orientações para a elaboração do trabalho.

O interesse dos alunos pela situação – a instalação de um semáforo é necessária? - decorreu da visibilidade proporcionada pelos meios de comunicação local a respeito de um conjunto de manifestações públicas da população de determinada região da cidade, requerendo a instalação de um semáforo.

Uma análise do Instituto de Planejamento Urbano da cidade (IPPUL), entretanto, a partir de levantamento do fluxo de veículos no cruzamento, apresentou a conclusão de que não seria colocado sinaleiro no local. Para os alunos, esta situação estabelecida na cidade funcionou como “motivação” para a incursão ao tema: a instalação do semáforo é necessária?

Inicialmente realizaram uma coleta de informações por meio de entrevistas e acessos aos dados do Departamento Estadual de Transportes (DETRAN), do Departamento Nacional de Transportes (DENATRAN) e do IPPUL. Entre as informações, constam os critérios que regulamentam a instalação de interruptores de velocidade nas ruas e

avenidas em áreas urbanas, bem como os dados coletados pelo IPPUL no local do cruzamento (Figura 4).

<p>Dados coletados pelo IPPUL sobre o local</p> <p>Rua com 9 metros de largura</p> <p>Tempo estimado para a travessia dos pedestres: 9 seg</p> <p>Fluxo médio de veículos: 1162 veículos/hora</p>	<p>Critérios do DENATRAN</p> <ol style="list-style-type: none">1) Volumes veiculares mínimos2) Interrupção de tráfego contínuo3) Volumes conflitantes em interseções4) Volumes mínimos de pedestres e veículos5) Índices de acidentes6) Melhoria do sistema progressivo7) Controle de áreas congestionadas8) Combinação de critérios9) Situações locais específicas
---	---

Figura 4: Dados do ippul e critérios do denatran para a instalação de semáforos

De posse dessas informações, a primeira constatação foi de que o fluxo de pedestres, critério enunciado pelo manual, não fora observado, não tendo sido coletados dados relativos a esse fluxo no local em estudo. Considerando essa situação, os estudantes definiram os objetivos: a) Investigar o uso do critério 2, usando dados coletados pelo IPPUL; b) Investigar o critério 4, a partir de dados fornecidos pelo próprio critério. Os dados relativos a esses critérios consistem em:

Critério 2: Interrupção de Tráfego Contínuo

Volume mínimo de veículos que requer sinaleiro: 750 veículos / hora na via preferencial

Critério 4: Volumes Mínimos de Pedestres e veículos

Volume mínimo de pedestres que requer sinaleiro: 250 ped/h nos dois sentidos da travessia

Volume mínimo de veículos nos dois sentidos: (sem canteiro central) 600 veículos/hora

Para determinar se a rua necessita de um controle de travessia para pedestres, é preciso determinar se há tempo suficiente, entre a passagem dos veículos, para a travessia de pedestres com segurança. Do ponto de vista da situação real (domínio base) esta necessidade implica introduzir algum mecanismo no fluxo das vias, de modo a definir

intervalos de tempo suficientemente grandes para que as pessoas possam atravessar entre o fluxo de dois veículos. Já do ponto de vista matemático (domínio alvo), é preciso identificar uma estrutura que permita determinar esse intervalo de tempo. A ideia de determinação de intervalos de confiança, por sua vez, remete a um raciocínio estocástico. Neste contexto, os estudantes recorreram ao Processo de Poisson (modelo tempo-dependente para a ocorrência de eventos).

Utilizando este processo e sabendo que segue uma distribuição exponencial, pode-se escrever: $P[G_k > t] = e^{-\lambda t}$, o que conduz a $P[G_k \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$, onde: G_k é o intervalo de tempo entre a passagem de dois veículos; $t \in [t, t+s)$ (intervalo de tempo); λ é o número médio de veículos que passam pelo local; P é a probabilidade de o intervalo de tempo ser maior do que t .

Considerando T o tempo médio que um pedestre demora para atravessar a rua e as probabilidades definidas, a probabilidade de um pedestre atravessar a rua entre os veículos $k-1$ e k é dada por: $P_k = (1 - e^{-\lambda T})^{k-1} e^{-\lambda T}$.

O número médio de intervalos de tempo entre a passagem de dois veículos, \bar{G} , (que constitui o número médio de possibilidades de um pedestre atravessar a rua entre a passagem de dois veículos) é dado por:

$\bar{G} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$, o qual, a partir das construções anteriores, pode ser

escrito como: $\bar{G} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1 - e^{-\lambda T})^{k-1} \cdot e^{-\lambda T}$. Fazendo $1 - e^{-\lambda T} = x$, podemos

escrever: $\bar{G} = e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$. Considerando que $1 - e^{-\lambda T} < 1$ e usando

propriedades das séries de potências, obtém-se $\bar{G} = e^{\lambda T}$.

Já a espera média (em tempo) de uma pessoa para atravessar a rua é dada por meio do produto da quantidade média de intervalos de

tempo de espera pelo tempo médio desses intervalos. Assim, *espera média de um pedestre* = $(\bar{G} - 1) \cdot \alpha$, ou seja, *espera média de um pedestre* = $(1 - e^{-\lambda T}) \alpha$, onde α é o tempo médio de cada intervalo de espera (subtraímos uma unidade da quantidade média \bar{G} de intervalos, pois o intervalo do ato da travessia não pode ser incluído no cálculo).

A instalação de um semáforo é necessária, se esse tempo médio de espera for superior a um tempo máximo de espera, τ , estabelecido pela legislação. Assim, um controle de travessia é necessário se $(1 - e^{-\lambda T}) \alpha \geq \tau$. Como α é necessariamente menor ou igual a T , podemos substituir α por T nesta expressão. Obtemos, portanto, o modelo matemático:

$$\tau = (e^{\lambda T} - 1) \cdot T \quad (1)$$

onde τ é o tempo máximo de espera para o pedestre atravessar a rua com segurança; λ é o número médio de carros que passam por hora; T é o tempo médio (em horas) para o pedestre atravessar a rua. A representação gráfica do modelo (1) está na Figura 5.

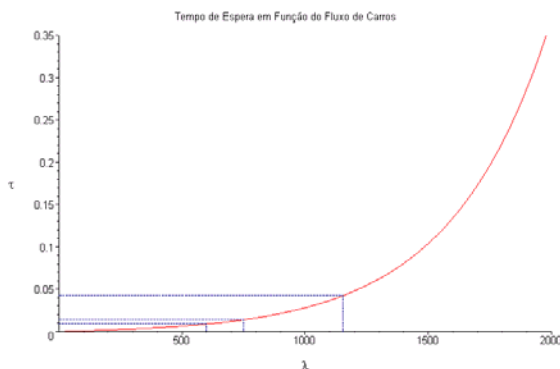


Figura 5: Representação gráfica do modelo



figura 6: a instalação do semáforo

A validação do modelo em relação aos critérios selecionados viria sustentar a análise em relação à questão de interesse. Usando o modelo (1) para o critério 2, que estabelece um limite de 750veículos/hora, os alunos fizeram:

$$\tau = (e^{750 \times 0,0025} - 1) \cdot 0,0025 = 0,014 \text{ horas} \approx 49,7s$$

Considerando o critério 4, que estabelece um limite de 600 veículos/hora, determinaram:

$$\tau = (e^{600 \times 0,0025} - 1) \cdot 0,0025 = 0,0087 \text{ horas} \approx 31,33s$$

Já para o caso dos dados coletados no local do cruzamento pelo IPPUL, de 1162 veículos/hora, os valores obtidos foram bastante destoantes em relação às condições estabelecidas pela legislação nacional: $\tau = (e^{1162 \times 0,0025} - 1) \cdot 0,0025 = 0,043 \text{ horas} \approx 155,38s$. Portanto, o modelo leva a conjectura de que a instalação do semáforo, segundo as normas nacionais de trânsito, é necessária. Nesta situação, tratando de uma questão eminentemente importante para um setor da sociedade, a relação entre o que se faz na academia e sua influência sobre a vida fora dela foi imediata: o órgão público responsável – IPPUL – considerou que as argumentações dos alunos, fundamentadas no modelo matemático, de fato, correspondem ao que a legislação determina, e o semáforo foi instalado no local (Figura 6 – incluída pelos alunos no relatório da atividade).

6.1 Sobre as metáforas nesta atividade

Considerando a caracterização para modelagem matemática, que defendemos na seção 5.1, podemos inferir que o conjunto de procedimentos realizados pelos alunos para passar da situação inicial (o problema) para a situação final (a solução) se pautou na intencionalidade e no interesse dos alunos em investigar a situação; e, em certa medida, objetivou também questionar a decisão do órgão público de não proceder à instalação do sinaleiro.

Todavia, essa intencionalidade, por si, só não é suficiente para ultrapassar a aparente migração de referências necessária para que os alunos pudessem apresentar em linguagem matemática uma expressão que fundamentasse suas argumentações sobre a necessidade ou não da instalação de um semáforo em um cruzamento de duas vias da cidade.

Em que se fundamentou, então, essa estruturação de relações entre diferentes domínios conceituais? (Neste caso, um domínio consiste no conjunto de normas e informações que compõem a legislação de trânsito, no que concerne às interrupções de tráfego contínuo; e o outro domínio, a matemática, uma vez que a intenção é construir um modelo matemático).

Os alunos, durante o desenvolvimento da atividade, fizeram algumas escolhas, ou seja, adotaram alguns pontos de vista particulares (estas escolhas por si só já sinalizam o uso de metáfora, conforme apresentamos na seção 5.2). Inicialmente, uma escolha dos alunos, baseada, segundo eles, nas informações disponíveis, é a opção pelo uso de dois critérios: critério dois e critério quatro. Neste caso, a escolha tem um motivo aparente: por um lado, estes critérios são quantitativos, e os dados que requerem estão disponíveis; e, por outro lado, expressam diretamente o que, no senso comum, é a origem do problema (número de veículos que trafegam no local). Na sequência, os alunos realizaram um conjunto de escolhas consecutivas (fundamentadas em relações entre os domínios envolvidos no estudo do problema), as quais ousamos conjecturar estarem alicerçadas em aspectos cognitivos, considerando a argumentação de Rodrigues (2007), apresentada na seção 4.2, de que a metáfora constitui um ato cognitivo que busca correlações, similaridades e linguagens específicas para dar significado a objetos de um dos domínios conceituais que estão associados à produção da metáfora.

Nesse sentido, no decorrer da atividade que tinha por finalidade a construção de um modelo para subsidiar a análise em relação à necessidade (ou não) da instalação de um semáforo, os alunos produziram metáforas, considerando diferentes domínios conceituais, em consonância com a assertiva de Lakoff e Johnson (2002) de que conceitualizamos novas coisas em termos de coisas que já conhecemos.

Tendo como domínio base a realidade que circunda a problemática da instalação de um semáforo, os alunos se depararam com a situação que implica determinar intervalos entre a passagem de veículos tempo-dependentes suficientemente estáveis para que um pedestre possa atravessar a rua com segurança. Já no domínio alvo – matemática- como identificar elementos e procedimentos para a determinação desses intervalos? Mecanismos cognitivos levaram os alunos a abarcar a determinação de intervalos de confiança, estabelecer que se trata de um comportamento estocástico, optar pelo processo de Poisson.

Nesse sentido, o relatório dos estudantes revela aspectos que caracterizamos como metáforas conceituais que, em certa medida, direcionaram a construção do modelo matemático. Na Figura 7, apresentamos um exemplo destas metáforas, que corresponde a uma imagem que consta no relatório, acompanhada de explicações, e sinaliza uma justificativa para a escolha do Processo de Poisson. Neste caso, considerando k como sendo o índice de ordem de chegada dos veículos e G_k o intervalo de tempo entre os veículos $k-1$ e k , reproduzidos na Figura 7, os alunos encaminharam o desenvolvimento do modelo.

Assim, nesta situação, as metáforas conceituais são produzidas durante a construção do modelo, e o pensamento metafórico serve de “impulso” para a evolução dessa construção.

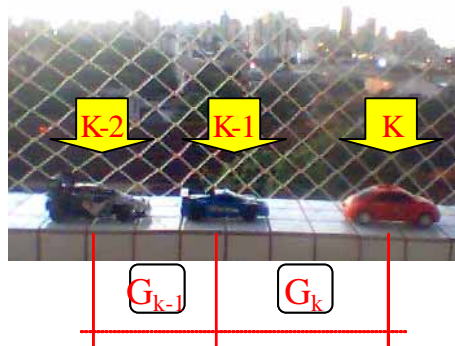


Figura 7: Metáfora conceitual produzida pelos alunos

A atividade de modelagem, entretanto, não culmina com a construção do modelo. O que se busca é uma solução, e o modelo, por si só, não é a solução. Nesse sentido, em uma atividade de modelagem matemática, se, por um lado, se projetam inferências do “domínio base” sobre o “domínio alvo”, por outro lado, a ação dessas inferências precisa se projetar novamente sobre a realidade, para validar, ou não, o modelo matemático encontrado.

Neste sentido, Nerlich (2007) afirma que os modelos são extensões de metáforas e têm potencial para orientar o pensamento sobre o sistema em estudo, apontando novas direções ou novos encaminhamentos.

Assim, fazendo uma extensão (em termos de uso da linguagem) para o termo “duplicidade” usado por Ricouer (1983), argumentamos que essa “duplicidade bijetiva” de inferências e o uso de signos relativos à atividade de modelagem parecem sinalizar uma construção de significados em relação aos objetos (caracterizados por Peirce, conforme apresentamos na seção 2 deste texto) da realidade e da matemática.

Na atividade, a significação em relação a um conjunto de fatores associados a uma questão social — como a necessidade de ir e vir, com condições mínimas de segurança para travessias de ruas movimentadas — que fazem parte do percurso diário de elevado número de pessoas, parece ter-se realizado para estes alunos.

Esta nossa assertiva não tem intenção de expressar um julgamento de que os alunos consideram que a questão da instalação de semáforos é algo muito simples no sistema viário de um centro urbano. Pelo contrário, no relatório, bem como na apresentação oral, os alunos manifestaram ter clareza da problemática da questão: “...deve-se sempre ter em mente que nem sempre o semáforo é a solução adequada para problemas de movimentos conflitantes e sua implantação deve ser plenamente justificada, após ampla discussão de soluções menos custosas e menos radicais”.

No que se refere aos significados construídos em relação aos objetos matemáticos, podemos inferir, a partir das informações obtidas, que metáforas produzidas inconscientemente pelos alunos no decorrer

do desenvolvimento da atividade, ao mesmo tempo que “aproximam” objeto e representâmen, “orientam” a construção de significados para os objetos matemáticos.

A expressão “*espera média do pedestre* = $(e^{\lambda T} - 1)\alpha$ ”, onde a é o tempo médio dos intervalos de espera e λ e T são definidos como na equação (1), é um dos exemplos deste tipo de metáfora que consta no relatório dos alunos e busca na realidade elementos para, na matemática, subsidiar a construção de um modelo.

No entanto, neste caso, viriam outras metáforas em que ambos os domínios são matemáticos. A partir dessa “espera média”, dois aspectos foram importantes para a construção do modelo: a) é preciso haver uma referência para a análise desse tempo de espera — buscar nos critérios escolhidos (critério 2 e critério 4) é a ação cognitiva fundamental que subsidia a continuidade das construções dos alunos; b) relacionar a com T (conforme descrevemos na seção 6.1) é, neste caso, essencial para a obtenção do modelo $\tau = (e^{\lambda T} - 1).T$, conforme apresentamos na seção 6 do texto.

Outra situação em que produzir metáforas dentro de dois domínios da matemática foi relevante diz respeito à relação entre

$$\bar{G} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1 - e^{-\lambda T})^{k-1} \cdot e^{-\lambda T} \text{ e as propriedades de uma série de potências}^7.$$

Neste momento, estatística e análise real (enquanto diferentes domínios conceituais da matemática) conduziram a $\bar{G} = e^{\lambda T}$, essencial para a obtenção do modelo matemático.

Para Willians e Wake (2007), o significado de um modelo é gerado de forma recursiva, por meio de recorrências a outros domínios, a outras representações e sob a influência deste tipo de metáforas. Nesse sentido, a atividade de modelagem possibilita a organização e a elaboração de signos, isto é, a generalização do conhecimento em sistemas semióticos

⁷ Considerando as limitações de espaço deste artigo, não podemos apresentar a construção completa desta relação neste texto.

de representações (algoritmos, esquemas, gráficos, etc.) e sua interpretação.

Considerando o potencial das metáforas para conectar diferentes sentidos, a sua produção durante a atividade de modelagem matemática favorece o desenvolvimento da argumentação do estudante, de modo que ele pode justificar seus pontos de vista com referência nos significados dos objetos nos diferentes domínios.

7- Para concluir

A natureza contextual do conhecimento parece evidenciar-se durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, e a construção de um modelo matemático é mediada, em grande medida, pela produção metáforas. Nesse contexto, o uso da linguagem signica associada à construção de modelos e à produção de metáforas envolve questões culturais.

A “duplicidade bijetiva” de inferências entre “domínio base” e “domínio alvo” que caracterizamos é associada ao processo de construção, interpretação e validação de modelos matemáticos e deve culminar com a apresentação de uma solução para o problema em estudo. Essas inferências são mediadas pelo uso e pela construção de metáforas conceituais que, na atividade que analisamos, desencadearam pensamento metafórico; e se este, por um lado, serviu de “impulso” para a construção do modelo, por outro lado, foi importante para a construção de significados em relação aos objetos (da realidade e da matemática) associados ao problema em estudo.

Nesse sentido, as nossas reflexões sinalizam que podemos vislumbrar aproximações entre modelos, modelagem e metáforas que podem ser importantes para a significação, pelos alunos, de objetos matemáticos envolvidos nas atividades de uso e produção de modelos e metáforas.

8- Referências bibliográficas

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria*, v. 2, p. 117-134, 2009.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to others subjects: states, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 22, n.1, p. 37-68, 1991.

BOLITE F. J.; ACEVEDO, J.; FONT, V. Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, n. 46, p. 41-54, 2005.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R-M; LEZAMA, J.; MARTINEZ-SIERRA, G. Socioepistemologia y representación: algunos ejemplos. In: *Relime*, número especial, p. 83-102, 2006.

CARREIRA, S. Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 3, n. 4, p. 261-87, 2001.

CHAMARELLI FILHO, M. Linguagem, cultura e cognição: uma abordagem lingüístico-semiótica. *Travessias*, v. 1, n. 1, 10 p., 2007.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996. 121p.

DUBINSKY, E. Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images. *Notices of the AMS*, v. 47, n. 5, maio 1991.

DUPUY, M. Jean-Pierre. *Nas origens das ciências cognitivas*. São Paulo: Editora da UNESP, 1996.

GENTNER, D.; JEZIORSKI, M. The shift from metaphor to analogy in western science. In: ORTONY, A. (Ed.). *Metaphor and thought*. Cambridge: Cambridge University, 1979. p. 447-480.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. *Metáforas da vida cotidiana*. Trad. Maria Sophia Zanotto e Vera Maluf. Campinas: Mercado de Letras, 2002.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books, 2000.

LAVE, J. *Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LEITE, K. G.; OTTE, M. F. O pensamento metafórico na Matemática. In: SEMINÁRIO EDUCAÇÃO 2008: 20 ANOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - UFMT, 2008, Cuiabá-MT. *Anais...* Cuiabá, 2008. v. 1.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Working group: models and modeling. In: PME-NA, 2006, Mérida. *Proceedings...* Mérida, 2006. p. 1-4.

NERLICH, B. Media, metaphors and modelling: How the UK newspapers reported the epidemiological modeling controversy during the 2001 foot and mouth outbreak. *Science, Technology & Human Values*, v. 32, n. 4, p. 432-457, 2007.

NÖTH, W. *Panorama da semiótica – de Platão a Peirce*. São Paulo: Annablume, 2003. (Coleção E – 3).

OTTE, M. F. Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico. Trad. Maria Laura Magalhães Gomes et al. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 11-58, 2001.

PEIRCE, C. S. *Os pensadores*. São Paulo: Abril Cultural, 1980. 120 p.

PEIRCE, C. S. *Semiótica*. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos, v. 46).

RICOEUR, P. *A metáfora viva*. Porto, Portugal: Rés-Editora, 1983.

RODRIGUES, L. P. Analogias, modelos e metáforas na produção do conhecimento em Ciências Sociais. *Pensamento Plural*, v. 1, p. 11-28, 2007.

SANTAELLA, L. *Matrizes da linguagem e do pensamento: sonora, visual, verbal*. Aplicações na hipermídia. São Paulo: Iluminuras, 2001.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica*. 27. reimpr. da 1. ed. de 1983. São Paulo: Brasiliense, 2008. (Coleção Primeiros Passos, v. 103).

SANTOS, L. R. *Metáforas da razão ou economia poética do pensar kantiano*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian; Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, 1994.

SFARD, A. Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In: ENGLISH, L. D. *Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images*. Nova Jersey: Lawrence Erlbaum Associate Inc. Publishers, 1997.

TREVISAN, M. D.; CARNEIRO, M. C. Uma descrição semiótica da metáfora no ensino de biologia: asserções sobre a célula animal. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 14, n. 3, p. 479-496, 2009.

WILLIAMS, J.; WAKE, G. Metaphors and models in translation between college and workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 64, p. 345-371, 2007.

