# O laboratório de ensino de matemática e a identificação de obstáculos no conhecimento de professores de matemática

*Mariana Moran Barroso* e Valdeni Soliani Franco***

**Resumo:** Utilizando as principais teorias de Bachelard e Brousseau sobre obstáculos epistemológicos e didáticos, buscamos, com esta pesquisa, identificar tais obstáculos durante uma oficina sobre a utilização de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) em um ambiente escolar, oferecida para professores de matemática. A coleta de dados foi realizada durante a oficina, por meio de gravações de áudio e imagem, e para isso foi necessária uma seleção prévia pelos pesquisadores de algumas atividades com materiais manipuláveis e jogos presentes em um LEM. Com base nesses materiais, foi observada a existência de obstáculos epistemológicos e didáticos nas concepções teóricas e práticas nos professores pesquisados.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; laboratório de ensino de Matemática; obstáculos epistemológicos; obstáculos didáticos.

# Laboratory Teaching of Mathematics and Identification of Obstacles to the Knowledge of Teachers of Mathematics

**Abstract:** Using the main theories of Bachelard and Brousseau on epistemological and didactical obstacles we sought through this research, to identify these obstacles during a workshop offered for teachers of mathematics. The workshop was on the use of Laboratory for Teaching Mathematics (LTM) in a school environment. Data collection was performed during the workshop, using

* Professora Assistente Temporária do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM – Maringá/PR, Brasil) - E-mail: mmbarroso2@uem.br

** Professor Associado da Universidade Estadual de Maringá (UEM – Maringá/PR, Brasil ). - E-mail: vsfranco@uem.br.

audio and image, and it was necessary for a previous selection by the researchers in some activities with manipulatives and games presented in a LTM. Based on these materials was observed the existence of obstacles in the epistemological and theoretical concepts and teaching practices in the teachers surveyed.

**Keywords:** Mathematics Education; laboratory for teaching Mathematics; epistemological obstacles; educational obstacles.

## Introdução

Nas situações de ensino de matemática, é possível identificar obstáculos que impedem o aprendizado do aluno, alguns deles identificados como epistemológicos e outros como didáticos. A noção de obstáculo epistemológico foi descrita inicialmente por Gaston Bachelard, em 1938. Mais tarde, em 1976, Brousseau introduziu o conceito de obstáculo didático na Didática da Matemática.

Com esta pesquisa, observamos que esses obstáculos podem se manifestar no momento em que professores com conhecimentos consolidados pelo tempo, porém errôneos, têm contato direto com um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM).

O LEM é caracterizado como um local para aulas regulares de matemática, para os professores planejarem suas aulas, para criarem e desenvolverem atividades experimentais, ou ainda para produção de materiais instrucionais que facilitem a aprendizagem. Nesta pesquisa, investigamos a contribuição deste Laboratório para a identificação de obstáculos epistemológicos e didáticos no conhecimento de professores de matemática.

Os resultados foram obtidos em uma oficina oferecida para professores de matemática do Núcleo Regional de Ensino de Maringá, no Paraná, que explorou o Laboratório de Ensino de Matemática, mais especificamente, jogos e materiais manipuláveis.

## Procedimentos Metodológicos

Os fundamentos deste estudo estão à luz da abordagem da pesquisa qualitativa, haja vista que "o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (Bicudo, 2004, p. 104). Mais especificamente, focamos a pesquisa em um estudo de caso, pois ela consiste em uma investigação que assume particularidades e exige empenho em uma situação específica — identificar obstáculos —, possibilitando uma melhor compreensão dos comportamentos a serem observados.

Para identificar os possíveis obstáculos, após uma seleção prévia, pelos pesquisadores, de algumas atividades com materiais manipuláveis e jogos presentes em um LEM, fizemos observações — por meio de gravações de áudio e imagem — de alguns professores com relação aos conhecimentos matemáticos baseados nos temas das atividades do dia da oficina. A análise dos dados obtidos pela observação foi feita à luz das pesquisas de Bachelard (1996), Piaget (1987), Brousseau (1986) e Sierpinska (1989).

Pelas falas dos professores, classificamos os erros como obstáculos epistemológicos ou didáticos. Assim, categorizamos como:

- Obstáculos epistemológicos:

- obstáculo do conhecimento geral ou da opinião: quando o professor usou ideias baseadas em sua opinião sobre questões que não compreende;

- obstáculo da experiência primeira: quando o professor pensou ter compreendido um conceito, usando, principalmente, os materiais do Laboratório;

- obstáculo verbal: quando o professor usou uma falsa explicação, apoiada em uma palavra explicativa;

- Obstáculos didáticos:

- obstáculos didáticos de origem didática: quando o professor fundamentou a concepção na mecanização, concepção esta que era válida em um determinado contexto e inapropriada em outro;

- obstáculos didáticos de origem cultural: quando o professor reagiu a determinadas situações, usando suas crenças, respostas do senso comum, simplistas, baseadas em experiências não científicas;

- obstáculos didáticos de origem ontogênica: quando os professores demonstraram memorização e domínio de uma técnica, desprovidos de compreensão, por não terem as estruturas (no sentido piagetiano) plenamente construídas, no momento em que aprenderam determinado conteúdo.

## O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM): Jogos e Materiais Manipuláveis

Um LEM poderia ser simplesmente um local para guardar materiais que seriam usados nas aulas de matemática, como, por exemplo, livros, revistas, filmes, materiais manipuláveis, jogos, dentre outros. Mas a proposta de Lorenzato (2006) vai além desta perspectiva. Ele sugere que um LEM seja um local da escola reservado não somente para aulas regulares de matemática, mas também para esclarecer dúvidas dos alunos; para os professores de matemática planejarem suas aulas, criarem suas atividades e materiais didáticos; deve ser um ambiente para alunos e, principalmente, professores usufruírem. “Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático” (Lorenzato, 2006, p. 7).

## As contribuições do LEM para o ensino de matemática

Costuma-se atribuir a importância dos materiais manipuláveis ao seu caráter “motivador”; ou ao fato de se ter “ouvido falar” que o ensino de matemática é melhor a partir do concreto; ou, ainda à ideia de que as aulas ficam mais alegres para os alunos (Fiorentini; Miorim, 1990). Mas suas contribuições vão além desses fatores.

Trabalhar em um LEM desenvolve uma prática de espontaneidade, diversão e, acima de tudo, de autonomia intelectual do educando. Nesse sentido, Braumann (2002, apud Ponte et al., 2006) compara o aprender matemática com o aprender a andar de bicicleta: não é possível aprender sem praticar.

Pouca produtividade da maioria dos alunos é percebida por professores que fazem das explicações verbais, ou até mesmo dos recursos audiovisuais sua ferramenta de trabalho (Floriani, 2000). Pais (2002, p. 9) faz o seguinte questionamento: “O ensino de matemática pode se resumir à apresentação de uma sequência de axiomas, definições e teoremas?” Acreditamos que, para obter êxito nos processos de ensino e de aprendizagem, o professor deve realizar juntamente com o aluno experiências que atraiam a atenção deste e que tornem a aula mais produtiva matematicamente. As experiências que podem ser realizadas em um Laboratório de Ensino de Matemática enquadram-se nesta ideia. “Piaget destaca que, em seu ponto de partida, a criança tem necessidade de certo controle empírico para estar segura de que $1+4=2+3$.” (Ruiz; Bellini, 2001, p. 19).

## Como é composto um LEM?

Para a construção de um LEM, é necessário ter em mente quais são os objetivos a serem cumpridos, quais os alunos que irão utilizá-lo (Ensino Básico, Fundamental, Médio ou Superior) e como ele será estruturado. Um LEM, diferentemente do que muitos pensam, não é constituído somente de jogos ou materiais didáticos manipuláveis. Um LEM pode constituir-se de livros didáticos, artigos de jornais e revistas, quebra-cabeças, calculadoras, computadores, entre outros; ou seja, o que compõe um LEM deve estar voltado às concepções e às características de cada escola.

Ao trabalhar com professores de matemática da rede pública de Maringá, durante a realização desta pesquisa, enfatizamos o uso de jogos e materiais didáticos manipuláveis (MD manipulável).

- Jogos: os jogos podem auxiliar o trabalho dos professores durante o ensino ou a memorização de determinados conteúdos matemáticos. Eles podem ser úteis para iniciar um novo conteúdo, despertando o interesse da criança; ou para fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades (Fiorentini; Miorim, 1990). Além disso, há maior interação entre aluno-aluno e aluno-professor. Mas é importante notar que, embora brincar e jogar possuam semelhanças, há também diferenças. O jogar é constituído de regras, da necessidade da criação de estratégias, ganhadores e perdedores. A brincadeira, por outro lado, flui diretamente das ideias dos participantes, de seus sentimentos e das ações desejadas para o momento (Macedo; Petty; Passos, 2005, p. 14). Desse modo, o jogar enquadra-se melhor na proposta de um Laboratório de Ensino de Matemática.

- Material didático manipulável: existem vários tipos de materiais didáticos manipuláveis. Alguns são estáticos e permitem só a observação, outros são dinâmicos e facilitam ao aluno a realização de descobertas (Lorenzato, 2006). Vale ressaltar que o material didático manipulável não garante a aprendizagem do aluno. É preciso que ele reflita sobre a atividade que está sendo trabalhada e, se possível, extraia conclusões para o seu conhecimento.

> Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa. [...] Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino-aprendizagem. Entretanto, considero que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento

> em que um saber está sendo construído (Passos, 2006, p. 78).

## Como trabalhar satisfatoriamente em um LEM?

"A atuação do professor é determinante para o sucesso ou fracasso escolar" (Lorenzato, 2006, p. 23). Cabe a ele a conscientização de que a prioridade é a aprendizagem do aluno e não apenas a simples transmissão ou fixação do conteúdo por meio das atividades no LEM. A função do ensino da matemática é ensinar a matemática (Fiorentini; Miorim, 1990).

Não se constrói um conhecimento simplesmente tocando, observando ou manipulando objetos. Para Piaget, o conhecimento se dá a partir da organização, da estruturação e da explicação do experienciado (Ramozzi-Chiarottino, 1988).

Os próprios professores, durante a pesquisa, conscientizaram-se da necessidade de uma aula menos formal. Conforme Fiorentini e Lorenzato (2006), um dos fatores que provocaram mudanças curriculares foi atribuído aos próprios professores que, por meio da pesquisa-ação, tentam produzir inovações curriculares que julgam necessárias.

Malba Tahan (1962) sugere que o professor tente, por meio do Laboratório, levar o aluno a raciocinar, e não a brincar com as experiências. Para Ramozzi-Chiarottino (1988, p. 3) "conhecer não é somente explicar; e não é somente viver: conhecer é algo que se dá a partir da vivência (ou seja, da ação sobre o objeto do conhecimento) para que este objeto seja imerso em um sistema de relações". Logo, a ação do sujeito sobre o objeto e, posteriormente, a abstração sobre o que foi vivenciado, são fundamentais para um bom aproveitamento da atividade.

Este tem sido um desafio educacional entre nós, professores, que, na maioria das vezes, trazemos para a sala de aula um conhecimento pronto e acabado que não permite que o aluno raciocine sobre o que foi ensinado, mas simplesmente o reproduza. "É o professor quem porta o conhecimento essencial para habilitar o fazer matemático da criança" (Muniz, 2004, p. 37).

Sendo assim, nosso interesse em trabalhar com professores, durante a realização desta pesquisa, foi o de despertar o interesse, a curiosidade por um Laboratório de Ensino de Matemática e pela própria matemática. E, por conseguinte, levá-los a perceber a necessidade de trabalhar em um ambiente adequado para ensinar a matemática a adolescentes e crianças. Além disso, o uso adequado dos materiais poderá proporcionar aprendizagem e sanar dificuldades conceituais que ainda poderão existir nesses professores.

## Fundamentos teóricos: obstáculos epistemológicos e didáticos na apreensão do conhecimento matemático

O conceito de obstáculo epistemológico foi descrito, inicialmente, por Gaston Bachelard, filósofo francês que viveu num período de construções revolucionárias na ciência. Bachelard lecionou as disciplinas de química e física e, como filósofo da ciência, teve seu pensamento voltado às questões epistemológicas relacionadas ao ensino desses conhecimentos. Ele observou as ligações existentes entre o desenvolvimento histórico do pensamento científico e a prática da educação. Em sua obra *A formação do espírito científico*, publicada em 1938, Bachelard escreve que "é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado" (Bachelard, 1996, p. 17).

Nessa obra, escrita a partir de conclusões retiradas de sua vivência nesse período, Bachelard faz uma análise do espírito científico dos séculos XVIII e XIX, observando as condições em que a ciência evolui. O autor observa que isso ocorre de maneira descontínua, num processo de rompimentos com o conhecimento dito primeiro; e que, no fundo, o ato de conhecer se dá contra um conhecimento anterior, eliminando conhecimentos mal estabelecidos. Ele afirma: "diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber" (Bachelard, 1996, p. 18). E ainda: "é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos” (Bachelard, 1996, p. 17).

Sendo assim, Bachelard nota que as falhas ocorridas nesse processo de evolução científica, que em muitos momentos foram encobertas pela história, poderiam auxiliar a encontrar obstáculos epistemológicos surgidos ao longo da história da ciência.

Bittencourt aponta que “do ponto de vista pedagógico, a visão epistemológica de Bachelard implica a análise crítica do processo de aprendizagem, considerando dificuldades, erros e falhas como parte deste processo” (Bittencourt, ano 5, p. 13). Embora Bachelard (1996) tenha afirmado que nenhuma das teses sobre obstáculos epistemológicos sustentadas em seu livro se refere ao conhecimento matemático, ele escreve que:

os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já construídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana (Bachelard, 1996, p. 23).

Em sua obra, já citada anteriormente, *A formação do espírito científico*, publicada em 1938, Bachelard também se refere a alguns obstáculos epistemológicos particulares. Trataremos de alguns deles:

o primeiro obstáculo: a experiência primeira – a crítica não intervém de modo explícito, pois a experiência situa-se mais importante do que esta. Lições são retiradas diretamente do dado, apoiando-se em preconceitos individuais. Segundo Bachelard (1996, p. 29), “o espírito científico deve formar-se contra a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós”;

o conhecimento geral: opinião – aceitar o geral como resposta às indagações científicas. A generalização torna a pesquisa mais fácil e prazerosa. “Nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do geral” (Bachelard, 1996, p. 69);

o obstáculo verbal: extensão abusiva das imagens usuais – a explicação é constituída apenas com o uso de uma única imagem ou uma única palavra. O uso indevido de uma metáfora pode sugerir a compreensão errada de uma situação ou fato.

## Obstáculos epistemológicos e a matemática

Embora Bachelard tenha afirmado que “a história da matemática é maravilhosamente regular” (Bachelard, 1996, p. 28), a evolução desta ciência não aparece criteriosamente em seus registros históricos. Isso não quer dizer que a sua evolução tenha sido totalmente regular, sem dificuldades no seu processo de criação. Todas as dúvidas, os erros, os avanços e os retrocessos, desaparecem no resultado final apresentado pelo texto científico. Para Pais (2002), esses conflitos, como na matemática, sinalizam possíveis obstáculos. Para este autor, “tal como acontece na etapa de criação da matemática, durante a experiência da aprendizagem escolar há também um processo correspondente a uma redescoberta do saber, de onde os obstáculos podem, analogamente, intervir diretamente no fenômeno cognitivo” (Pais, 2002, p. 42).

A noção de obstáculo epistemológico foi introduzida na Didática da Matemática por Guy Brousseau, em 1976. Ao escrever *Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática*, Brousseau (1983), como Bachelard, reafirma a ideia de que é necessário romper com o conhecimento anterior para predominar um novo conhecimento; e esse conhecimento anterior, que tinha a sua importância, pode manifestar-se por meio dos erros,

> [...] mas estes erros não são devido ao acaso, fugazes, erráticos, eles são reprodutíveis, persistentes. Além do mais, estes erros, em um mesmo sujeito, estão ligados entre si por uma fonte comum, uma maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente, se não correto, um conhecimento antigo e que obteve

> êxito em todo um domínio de ação (Brousseau, 1983, p. 165).

Bachelard (1996) afirma que a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. Para encontrar esses obstáculos, Brousseau (1989) define um método de pesquisa que consiste em três fases: a) encontrar erros sistemáticos e concepções em torno das quais esses erros se agrupam; b) encontrar obstáculos na história da matemática; c) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos na aprendizagem.

Glaeser (1981, apud Brousseau, 1989, p. 43) estudou o interesse e a importância dos fenômenos de ruptura (obstáculos), observados durante a história da Matemática, para a compreensão das dificuldades dos estudantes. Sendo assim, baseado em Bachelard, Duroux (1982, apud Brousseau, 1989, p. 43), refere-se à extensão do modelo de Bachelard à Matemática, como um conhecimento, uma concepção, uma dificuldade de avançar ou a ausência de conhecimento; e esse conhecimento pode ser visto como um produto das respostas adaptadas dentro de um certo contexto que produz respostas falsas dentro de outro contexto.

Assim, é possível mudar a ideia equivocada que se tem sobre o erro no contexto didático.

Com relação à análise feita por Brousseau sobre os obstáculos em matemática, ficou mais pertinente referir-se, no contexto pedagógico, a obstáculos didáticos, de acordo com Pais (2002).

Brousseau (1989, p. 44) afirma que “fundamentalmente cognitivos, os obstáculos parecem estar extenuados entre *ontogênicos*, *epistemológicos*, *didáticos* e até mesmo *culturais*”. No artigo “Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática” (1983), Brousseau discorre sobre estes obstáculos, caracterizando-os como obstáculos didáticos, da seguinte maneira:

- Obstáculo didático de origem ontogênica: surge das limitações (neurofisiológica entre outras) do sujeito em um momento do seu desenvolvimento.

- Obstáculo didático de origem epistemológica: encontra-se na própria história dos conceitos e pode reproduzir-se em meio escolar.

- Obstáculo didático de origem didática: parece não depender de um projeto do sistema educativo. Por exemplo, a apresentação atual dos decimais em nível elementar pode ser para os alunos, "números naturais" com vírgula.

- Obstáculo didático de origem cultural: embora este obstáculo não tenha sido especificado por Brousseau, Gomes (2006), em alguns momentos, sugere a ideia de que o obstáculo didático de origem cultural seja "fruto de concepções errôneas, equivalem a certas maneiras de pensar, mas que não correspondem a conhecimentos científicos reconhecidos" (Gomes, 2006, p. 81).

## Atividades desenvolvidas durante a oficina e análise dos resultados

Na sequência, serão relatadas algumas das atividades com materiais manipuláveis, desenvolvidas durante a oficina, e também suas respectivas análises e discussão dos resultados.

A proposta de trabalho nesta oficina de Laboratório de Ensino de Matemática consistiu na exploração das atividades pelos professores participantes. Desse modo, após essa exploração, as atividades eram explicadas e concluídas pelo professor ministrante da oficina, não deixando margens a ambiguidade ou dúvidas. A formalização das atividades impedia a subjetividade e permitia uma construção correta do conhecimento matemático explorado.

O modelo de cada uma das atividades da oficina consistia de: apresentação, descrição, objetivos, série e nível sugeridos para a aplicação, mídias existentes, material necessário e custo, orientação para construir, cuidados necessários, desenvolvimento da atividade e potencialidades.

- Atividade 1) 64 = 65?

O objetivo da Atividade 1, para a nossa pesquisa, foi promover a compreensão de que *não é possível fazer demonstrações somente observando materiais manipuláveis*, além de mostrar ainda que *a visão pode nos levar a falsos resultados*. Uma das oposições ao uso do LEM feita por Lorenzato (2006) é a de que os materiais servem somente para mostrar resultados de uma certa teoria matemática, e não para fazer demonstrações.

Relataremos, a seguir, a construção e o desenvolvimento desta atividade.

Como construir e desenvolvimento:

Este material pode ser construído em sala de aula, como segue:

a) Desenhe e recorte um quadrado de 24 cm de lado.
b) Quadricule-o com a caneta em quadrados de 3 cm de lado.
c) Desenhe os segmentos de reta (em verde), conforme a Figura 1, a seguir.
d) Recorte nos segmentos desenhados.
e) Com as quatro peças que foram recortadas, forme um retângulo
f) Qual a área deste retângulo?
g) O quadrado e o retângulo possuem a mesma área?
h) Explique o que ocorreu.

FIGURA 1 – Modelo para desenho e recorte

Veja a transcrição a seguir.

O professor 1 ficou tentando montar o retângulo, insistentemente.

> Pesquisadora: Então vocês perceberam o problema, né? Esse quadrado tem 64 u.a.² de área? E o retângulo?
>
> P1: 65.
>
> Pesquisadora: Foram usadas as mesmas peças!
>
> P11: Aí prova que 64... a área...
>
> P1: É igual a... não é igual, não.
>
> P11: Mas aí tem que falar que a área... não numericamente. Por que ali, ó, você colocando numericamente, não fica a mesma coisa. Numericamente é igual? Não. Em termos de área, sim! Faltou especificar daí.
>
> Pesquisadora: Então é diferente falar que a área de 64 u.a.² é igual a 65 u.a.² que 64 é igual a 65?
>
> P12: É. Tá perguntando se é igual, né? É igual, a gente provou que é igual. 64 e 65 são iguais, né? Isso que ela quer falar.
>
> P11: Numericamente são diferentes, mas em termos de área são iguais.
>
> Pesquisadora: Mas e aí, será que é possível isso, numericamente serem diferentes e, em termos de área, iguais?
>
> P11: É, porque, em termos de quantidade numérica, são diferentes. Eu posso ter 65 unidades de balas e 64

> de palitos. São a mesma quantidade? Não! Agora, em termos de área, tá provado. É uma incógnita.

Neste momento, os professores do grupo começaram a discutir sobre a questão, causando tumulto nas falas.

Durante a resolução da atividade, o professor 11 posiciona-se, afirmando que quantidade numérica é diferente de quantidade de área. Tal artifício demonstra a intenção do professor: provar que 64 $\neq$ 65, mas 64 u.a. = 65 u.a. É nítida a falta de compreensão do conteúdo que está sendo explorado (noção de área), quando o professor diz: "Numericamente são diferentes, mas em termos de área são iguais". Este professor está aceitando que 64 quadradinhos podem ocupar a mesma área que 65 quadradinhos. Sendo assim, o fato de o professor não admitir que 64 seja igual a 65, comprova sua compreensão da noção de quantidade numérica; porém, ao afirmar que 64 u.a. podem ser iguais a 65 u.a., notamos que o conceito de área não está totalmente compreendido pelo professor. Isso nos leva a desconfiar de que, talvez, o trabalho precoce e a não retomada desse conteúdo no processo de escolarização desse professor tenham cooperado para a não compreensão da noção de área.

Temos somente uma desconfiança, mas não uma garantia, pelo fato de não termos acompanhado o processo de escolarização desse professor. Também notamos que ele usa seus conhecimentos anteriores para forçar algumas conclusões. Por exemplo, ele cita que a área ocupada por 65 unidades de bala pode ser igual à área ocupada por 64 unidades de palito. Isso pode ser verdade, dependendo das balas e dos palitos, porém as quantidades de balas e de palitos são diferentes. O professor estaria correto em seu raciocínio, se as unidades fossem as mesmas. Por exemplo, se a área ocupada por 65 unidades de bala fosse a mesma área ocupada por 64 unidades de bala, como é o caso da nossa unidade de área, que é o quadradinho de 3 cm de lado cada. Com base em tudo o que foi explicitado anteriormente e analisado, acreditamos ter havido um *obstáculo didático* tanto *de origem ontogênica* como de *origem didática*, uma vez que o professor talvez não tivesse as estruturas (no sentido piagetiano) plenamente construídas no momento em que aprendeu sobre áreas. Também usou de conhecimentos inapropriados para o contexto em que foi aplicado.

A discussão continua:

> Pesquisadora: Então vocês provaram que 64 é igual a 65?
>
> P11: Em termos de área, sim; em termos de quantidade, não!
>
> P3: Mas ali foi a mesma quantidade de pastilha hahaha...
>
> P11: Não. É o que eu tô falando, área.
>
> P1: Como é que pode eu ter desenhado 64 quadradinhos e ele virar 65?
>
> Pesquisadora: Isso, isso mesmo. Exatamente, por que a unidade de área é o quadradinho.
>
> P3: A minha vontade é de pegar, cortar os 64 quadradinhos e montar o retângulo.

Nesta última fala da transcrição, destacamos a crença do professor no fato de que, se ele conseguir recortar os quadradinhos, um por um, ele realmente *demonstrará* que 64 u.a. são iguais a 65 u.a., desde que a junção desses quadradinhos lhe dê um retângulo e as propriedades de paralelismo e perpendicularismo estejam aparentemente satisfeitas. Lorenzato (2006, p. 14) considera este fato, quando escreve que "o LEM pode induzir o aluno a aceitar como verdadeiras as propriedades matemáticas que lhes foram propiciadas pelo material manipulável". Logo, identificamos um *obstáculo epistemológico:* o obstáculo da experiência primeira. Embora o professor saiba de antemão que 64 u.a. são diferentes de 65 u.a., a experiência é destacada antes e acima da crítica. "De fato, essa observação primeira se apresenta repleta de imagens; é pitoresca, concreta, natural, fácil. Basta descrevê-la para se ficar encantado. Parece que a compreendemos" (Bachelard, 1996, p. 25).

- Atividade 2) Faixa de Möbius

O objetivo desta atividade — a construção da Faixa de Möbius — para a nossa pesquisa foi observar *o conhecimento dos professores com relação a alguns conceitos topológicos básicos*, visto que o tópico *Noções de geometrias não-euclidianas*[1] foi incluído nas Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Paraná em 2006. Sendo assim, com base nessa observação, pretendíamos identificar obstáculos que se manifestam quando as ideias encontram respaldo em experiências com o concreto.

A seguir, a construção e o desenvolvimento da atividade explorada:

Como construir e desenvolvimento:

Recorte uma folha de papel no formato retangular (dimensões sugeridas: 30 cm x 6 cm, aproximadamente). Desenhe em cada ponta da faixa uma seta, como indicado na Figura 2:

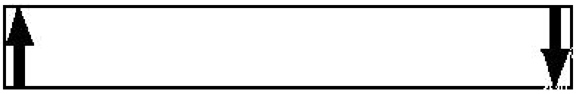

Figura 2 – Tira de papel

Fonte: *Sem fronteiras*, 2009

As pontas da faixa deverão ser coladas de forma que as setas fiquem sobrepostas e com a mesma orientação, fazendo, em uma das pontas, um giro de $180^0$. Vide Figura 3:

[1] Para consultar as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=98> Acesso em: 03 dez. 2009.

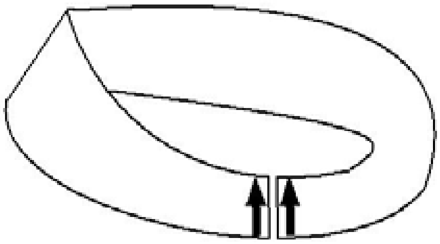

Figura 3 – Faixa de Möbius

Fonte: *Sem fronteiras*, 2009

Recorte três faixas retangulares de papel. Podem-se utilizar as dimensões sugeridas anteriormente. Com uma das faixas, faça uma faixa cilíndrica (Figura 4), colando as pontas.

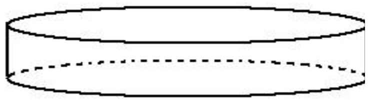

Figura 4 – Faixa cilíndrica

Fonte: *Sem fronteiras*, 2009

Recorte a circunferência central e observe o que se obtém.

Com as outras faixas, faça duas faixas de Möbius, como indicado anteriormente. Com uma das faixas de Möbius, faça o seguinte procedimento:

- Recorte a faixa, conforme indicado na Figura 5:

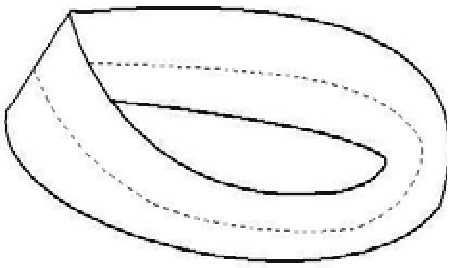

Figura 5 – Faixa de Möbius tracejada

Fonte: *Sem fronteiras*, 2009

Observe o que se obtém, fazendo medições com régua. Anote as observações.

Com a outra faixa de Möbius, faça o seguinte:

- Faça um recorte na faixa, a, aproximadamente, 2 centímetros de uma das suas bordas (isto é, aproximadamente 1/3 da largura da faixa). Observe o que resulta desse recorte e faça anotações.

As observações e as anotações a serem feitas a partir dos recortes devem considerar alguns aspectos:

- quantas faixas resultaram do recorte;
- qual o tamanho da(s) faixa(s) resultante(s) em relação à faixa original;
- quantas semitorções tem a(s) faixa(s) obtida(s);
- que tipo de superfície se obteve: orientável ou não orientável.

Este trabalho feito na construção da faixa de Möbius permitiu explorar diversos conceitos de topologia e de espaço que podem ser trabalhados em sala de aula pelos professores com seus alunos.

Para entender melhor a transcrição dos diálogos a seguir, é importante saber qual o contexto em que as atividades estavam sendo trabalhadas.

Devido à recente inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da Educação Básica, percebemos que, ao iniciar esta atividade, os professores tinham pouca experiência em trabalhar com conteúdos relacionados à topologia.

O professor ministrante pediu que eles recortassem tiras de papel sulfite e, com elas, por meio de colagens, montassem uma representação de um cilindro, de um cone e da faixa de Möbius. Em seguida, solicitou que desenhassem uma circunferência orientada na superfície do cilindro e percorressem essa superfície com a circunferência desenhada. A discussão decorreu da pergunta: Quando a circunferência volta ao ponto inicial, ela volta com a mesma orientação? Os professores responderam que sim. O mesmo foi feito para o cone.

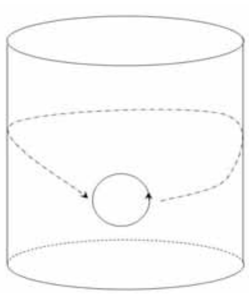

Figura 6: Circunferência orientada, percorrendo um cilindro

Em seguida, começamos a explorar o conceito de orientação para a Faixa de Möbius. Esta é uma superfície não orientada que foi descoberta por Möbius por volta de 1865. De acordo com pesquisas realizadas por Eves (2004, p. 668), Möbius descobriu essa superfície, que tem como características principais uma única face e uma só aresta.

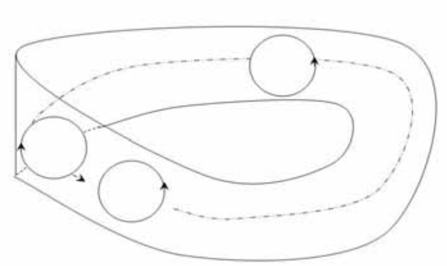

Figura 7: Circunferência orientada, percorrendo uma Faixa de Möbius

Para a investigação da Faixa de Möbius, houve a discussão relatada a seguir:

> Ministrante: E o que acontece com a faixa de Möbius?
>
> Professores: Volta no verso.
>
> Ministrante: Verdade isso, volta no verso?
>
> P14: Se você continuar, ela volta do outro lado; mas, se você parar, ela fica no verso.
>
> P16: Ela fica do lado oposto. Na outra face.
>
> Ministrante: Todo mundo concorda que eu cheguei no verso do ponto de partida?
>
> Professores: Sim, sim, sim...

Como foi possível notar, todos os professores presentes no Laboratório de Matemática, por meio do material confeccionado por eles mesmos, chegaram à conclusão de que a faixa de Möbius tem frente e verso. E a superfície da faixa é diferente da superfície cilíndrica e cônica que eles confeccionaram. Os professores entendiam que dar uma volta completa com a circunferência pela faixa de Möbius consistia em chegar ao mesmo ponto de partida no mesmo lado do papel sulfite. Identificamos, neste caso, um *obstáculo epistemológico:* o obstáculo da experiência primeira. Os professores investigaram a orientação do cilindro e do cone, partindo do princípio de que estas superfícies poliédricas possuem apenas uma face. Mas, ao estudarem a faixa de Möbius, eles foram convencidos, pela experiência feita com um papel sulfite, de que a faixa de Möbius possui duas faces. Concluímos que "o fato de oferecer uma satisfação imediata à curiosidade, de multiplicar as ocasiões de curiosidade, em vez de benefício pode ser um obstáculo para a cultura científica. Substitui-se o conhecimento pela admiração, as ideias pelas imagens" (Bachelard, 1996, p. 36).

Ao continuar desenvolvendo as atividades, o próximo passo foi cortar a faixa de Möbius em 1/3 da largura da faixa. Prosseguindo assim, um grupo de professores pensou estar cortando errado, pois a faixa duplicou-se. Eles, então, ficaram observando com entusiasmo, e dois dos cinco professores do grupo acharam tão fantástica a duplicação que exclamaram: *"Isto é mágica!"*.

Ainda neste mesmo contexto, o professor ministrante aproveitava para trabalhar outros conceitos, neste caso a dimensão de superfícies:

> Ministrante: Então o plano tem quantas dimensões?
>
> Professores: *Duas...*
>
> Ministrante: *Duas, todo mundo concorda? O plano pode falar que ele tem largura e altura, ou espessura e largura. Tá certo? Mas só tem duas dimensões. Este é um objeto então bidimensional. Pergunto pra vocês agora: esse objeto aqui* (parte de um cilindro), *a superfície, só a superfície, é bidimensional ou é tridimensional?*
>
> P16: *Só a superfície?*
>
> Ministrante: *Só a superfície.*

P16: Só a superfície é bidimensional.

Ministrante: *Só a superfície. Ele é tridimensional ou bidimensional?*

Professores: *Bi, bi, bi...*

Ministrante: *Aonde que ele mora, esse cilindro? Num espaço. Que espaço que ele mora?*

P7: *Tridimensional.*

Ministrante: *Tridimensional. Apesar de ele morar num espaço tridimensional, parece que a maioria tá me dizendo que ele é bidimensional. Ele tem essa espessura? Tem ou não? Seu eu tô considerando a superfície.*

P16: *Não. Superfície não.*

P10: *Não tem. Ele tem lado, dois lados ou não?*

Silêncio...

Ministrante: *Ele tem dois lados ou não? A superfície tem dois lados? A superfície tem parte de dentro e parte de fora?*

Professores: *Tem, tem...*

Ministrante: *A superfície tem essa face e essa face aqui?*

Alguns professores: *Tem.*

Ministrante: *Então, vamos fazer uma votação. Todo mundo tem que optar por uma das duas, tá?*

Ministrante: *Olha, estamos pensando não nisso aqui, numa representação, mas em uma superfície geométrica*

> *que vive no mundo das ideias. O cilindro geométrico, a superfície, só a superfície, pergunto: Ele tem uma face de dentro e uma face de fora? A superfície? Quem concorda que tem parte de dentro e parte de fora.*
>
> P16: *A superfície não.*
>
> P7: *Só tem parte de fora.*

Os professores ficaram indecisos e preferiram não votar nem opinar a respeito.

Podemos notar que, mesmo respondendo que a superfície é bidimensional, os professores confundem-se, ao afirmar que ela possui lado de dentro e lado de fora. Isso se deve ao fato de que, nas aulas de geometria, os professores afirmam que a representação de um cubo feita com papel *é um cubo*, e não uma representação dele, haja vista que este só existe no mundo das ideias. O mesmo ocorreu com o cone, com o cilindro e com a faixa de Möbius. Alguns professores afirmaram que essa superfície possui frente e verso. Encontramos, então, um *obstáculo didático de origem cultural* no conhecimento desses professores, ou seja, um obstáculo que permeou as suas formações e, consequentemente, vai interferir na escolarização de seus alunos. Como professores de matemática, usam de justificativas incoerentes, no que diz respeito à conceitualização de superfície.

## Atividade 3) Operando com frações

Ao acrescentarmos essa atividade como parte do nosso trabalho na oficina de LEM, pensamos na *possibilidade de estudar o significado da fração para os professores* e, dessa forma, identificar um possível obstáculo didático. Porém, a investigação executada nessa atividade teve rumos diferentes do esperado, levando-nos a encontrar outras curiosidades, descritas a seguir:

Como construir e desenvolvimento:

- a) Na folha de papel cartão, desenhe e recorte seis cartelas de dimensões 8 cm x 12 cm, contendo cada uma delas registros de seis operações com frações, envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, conforme a figura a seguir:

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{4}{6} : \frac{5}{8}$ | $\frac{7}{10} + \frac{3}{10}$ | $\frac{7}{5} \times \frac{3}{4}$ |
| $\frac{3}{5} : \frac{2}{4}$ | $\frac{5}{10} - \frac{4}{10}$ | $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2}$ |

Figura 8 – Registro das operações 1

Fonte: *Sem fronteiras*, 2009

Essas cartelas devem ser construídas de modo que sejam todas com operações distintas.

- b) Ainda com o papel cartão, desenhe e recorte 45 cartões de dimensões 4 cm x 6 cm, sendo: 42 com os resultados das operações contidas nos cartões elaborados e 3 cartões com a figura de um palhaço, representando os coringas.
- c) Cada jogador recebe uma cartela. Embaralham-se as fichas, colocando-as empilhadas, com o registro não à vista.
- d) O primeiro jogador compra uma ficha e verifica se o registro nela contido é o resultado de uma das operações contidas em sua cartela. Caso isso ocorra, coloca a ficha sobre a operação correspondente; caso

contrário, a ficha deverá permanecer sobre a mesa, com o registro à vista.

- e) O próximo jogador comprará uma ficha do monte ou da mesa e procederá como exposto anteriormente.
- f) Nas próximas jogadas, os jogadores poderão comprar uma ficha do monte ou uma ou mais fichas da mesa, se essas puderem ser colocadas corretamente sobre as operações de sua cartela.
- g) Se o jogador comprar a ficha coringa, poderá colocá-la sobre qualquer uma das operações da cartela e esta ficha poderá ser movimentada livremente para qualquer outro registro de operação que lhe convier.
- h) Vencedor: o primeiro jogador que cobrir todos os registros de operações de sua cartela.

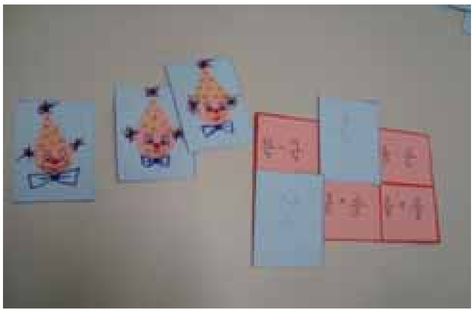

Figura 9 – Operando com frações

Fatos inesperados surgiram no decorrer da observação desta atividade, como, por exemplo, a situação em que o professor 6 pegou um cartão em que constava o registro das operações (Figura 8), uma das quais era a multiplicação, ali representada pelo símbolo X. Esse professor participante afirmou que os alunos confundiriam o X do produto de duas frações com uma multiplicação cruzada. Desse modo, o professor ministrante foi investigar esta questão, dialogando com outros grupos, como segue:

> Ministrante: O P6 disse que, quando for apresentada essa simbologia para os alunos na multiplicação, eles vão entender que a multiplicação é cruzada. Pode acontecer isso?
>
> P9: Eles já fazem sem cruz.
>
> P4: No Ensino Fundamental, não. No Ensino Fundamental não, porque eles não aprenderam ainda a regra de três.
>
> Pesquisadora: Tem relação com a regra de três?
>
> P4: Por que geralmente eles fazem a relação com a regra de três, a 6ª série ainda vê um pouco, mas eles ainda não têm, eu acho, essa noção.
>
> Pesquisadora: Mas isso por que, na hora de ensinar a regra de três, vocês usam o X?
>
> P4: Usa o X, usa a flechinha, usa várias maneiras. Aí ele vai ver que jeito que é mais fácil pra ele...
>
> Pesquisadora: Então, quando ele vê o X da regra de três aí ele se confunde.
>
> P4: Mas, geralmente, na regra de três, o X não é pequeno assim. Você faz um X que você mostra que a multiplicação é cruzada. Eu acho que não, acho que eles entendem.

Pelo depoimento do professor P4, ficou evidente que, ao ensinar regra de três a seus alunos, ele usa “multiplicação cruzada” para resolvê-la, e este pode ser um dos motivos pelos quais o aluno se confunde ao ver a simbologia X em uma multiplicação de frações. Ou seja, o aluno associa o “multiplicar cruzado” da regra de três, que às vezes é representado por um X pelo professor, com o símbolo X (vezes) da fração e "multiplica cruzado" os termos da fração também. Encontramos, por meio destes depoimentos baseados nos materiais confeccionados, concepções errôneas no conhecimento dos alunos, que estão diretamente relacionadas com meios de aprendizagem de um conteúdo anterior.

Em primeiro lugar, ao estudar regra de três, devemos observar se as grandezas em questão são diretamente ou inversamente proporcionais. Desse modo, cada caso tem uma resolução diferente. Isto é, "multiplicar cruzado" não é a única, nem a maneira mais correta de encontrar uma incógnita, quando se usa a regra de três.

Em segundo lugar, com base no depoimento do professor P6, quando os alunos confundem o símbolo X com "multiplicação cruzada", identificamos em seus conhecimentos um *obstáculo didático de origem didática*, pois a "multiplicação cruzada" representada pelo símbolo X, usada *eficazmente* pelos alunos para resolver uma regra de três diretamente proporcional, é válida somente neste contexto, e inapropriada no contexto da multiplicação de frações.

## Conclusões

Esta pesquisa, por meio de uma oficina de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), proporcionou aos professores do Núcleo Regional de Educação de Maringá respaldo para um futuro trabalho com seus alunos em um LEM. Com a oficina oferecida, buscamos também reverter opiniões incorretas a respeito do uso de jogos e materiais manipuláveis nas aulas de matemática, por entender que o trabalho realizado em um Laboratório pode contribuir, e muito, para a construção do conhecimento matemático nos alunos.

Além desta parte prática de Laboratório, identificamos obstáculos epistemológicos e didáticos presentes no conhecimento de matemática dos professores que participaram da oficina. Fizemos este estudo por acreditarmos ser primordial o domínio dos conceitos matemáticos que serão ensinados aos alunos. Desse modo, o trabalho realizado na oficina oferecida permitiu que professores identificassem erros em conceitos científicos seus e de colegas e que, de alguma forma, procurassem sanar essas dificuldades, de preferência com o auxílio do LEM, embora este não fosse o nosso objetivo.

## Referências Bibliográficas

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico.* Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BITTENCOURT, J. Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática. *Educação Matemática em Revista* – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 5, n. 6, p. 13-17, 1998.

BROUSSEAU, G. *Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques*. RDM, Grenoble, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: BEDNARZ, N. ; GARNIER, C. *Construction des savoirs:* obstacles et conflicts. Colloque International obstacle épistémologique et conflit sócio-cognitif. Montreal: Agence d'ARC inc. – CIRADE, 1989. p. 41-63.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. *Boletim SBEM,* São Paulo, ano 4, n. 7, jul./ago. 1990.

FLORIANI, J. V. *Professor e pesquisador:* (exemplificação apoiada na matemática). 2. ed. Blumenau: Ed. da FURB, 2000.

GOMES, M. G. *Obstáculos na aprendizagem matemática:* identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais. 2006.

161 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). *O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACEDO, L. de; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artmed, 2005.

MUNIZ, C. A. A criança das séries iniciais faz matemática? In: PAVANELLO, R. M. (Org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental:* a pesquisa e a sala de aula. São Paulo, SP: SBEM, 2004. (Coleção SBEM, v. 2).

PAIS, L. C. *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando. *Psicogênese e História das Ciências*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio (Org.). *O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

RAMOZZI-CHIAROTTINO, Z. *Psicologia e epistemologia genética de Jean Piaget*. São Paulo: EPU, 1988.

RUIZ, A. R.; BELLINI, L. M. *Matemática:* epistemologia genética e escola. Londrina: Ed. UEL, 2001.

SEM FRONTEIRAS, Universidade. *Atividades de Laboratório de Ensino de Matemática***.** Resultados obtidos no subprograma: Apoio às Licenciaturas. Projeto Laboratório de Ensino: um espaço de aprendizagem e de divulgação da matemática, 2009.

SIERPINSKA, Ana. Sur um programme de recherche lié à la notion de obstacle épistemologique. In: BEDNARZ, N. ; GARNIER, C. (Ed.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. Montreal: Agence d'ARC. 1989. p.130-147.

TAHAN, Malba. *Didática da Matemática*. São Paulo: Saraiva, 1962.