

A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos.

*Carlos A. Figueiredo**, *Luis C. Contreras***, e *Lorenzo J. Blanco****

Resumo: Este artigo visa proporcionar ao professor uma perspectiva diferente sobre um recurso que quotidianamente se utiliza no ensino e na aprendizagem de conceitos: os exemplos. Ao material bibliográfico que existe sobre o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos quisemos, no caso particular do conceito de função, acrescentar dois aspectos oriundos de uma linha de investigação emergente, que é a exemplificação de conceitos matemáticos. São eles a *transparência* e a *variação*, e podemos encontrá-los nos exemplos que se utilizam numa aula de matemática. Todo exemplo ou coleções de exemplos que utilizamos incorporam estes dois aspectos que, por vezes, utilizamos de forma mecânica e não intencionada. Contudo, tomando consciência das funções da transparência e da variação, estas poderão maximizar a efetividade da exemplificação que usamos no ensino de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: exemplificação de conceitos; transparência; dimensão de variação possível; conceito de função.

*Professor da Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, Portugal. carlosaafigueiredo@sapo.pt

** Professor do Departamento de Didáctica de las Ciencias y la Filosofía, Universidad de Huelva, España. lcarlos@uhu.es

*** Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz, España. lblanco@unex.es

The transparency and variation of the examples used in the learning of mathematical concepts

Summary: This article aims to give the teacher a different perspective about a resource that is daily used in the teaching and learning of concepts: the examples.

To the existent bibliography about the teaching and learning of mathematical concepts we wanted to add, in the particular subject of the concept of function, two aspects arisen from a new line of investigation, the exemplification of mathematical concepts. These are *transparency* and *variation* and we are able to find them in the examples used in a mathematics classroom. Every example, or example collections, we use incorporate these two aspects sometimes in a mechanical and unintentional way. However, if we realise the importance of the role played by transparency and variation, they both could maximize the exemplification effectiveness when teaching mathematical concepts.

Key words: Concepts exemplification; Transparency; Dimension of possible variation; Function concept.

Introdução

Na situação de trabalho quotidiano de um professor de matemática, vamos analisar o uso do exemplo e as designações que ele toma em função do papel que se lhe dá na sala de aula. Além disso, daremos os contornos precisos do exemplo *no uso que dele se faz*, e não do seu tipo ou natureza. Isto é, não distinguiremos os exemplos por serem exercícios resolvidos ou por resolver, por serem uma situação de problema ou de rotina de um algoritmo, mas, sim, pelo objetivo do seu uso.

Este artigo apresenta-se, de alguma forma, sob o aspecto de ensaio. Assim, os autores utilizam esta forma de comunicação por ser aquela que permite maior liberdade na apresentação de uma perspectiva pessoal. Pretende-se a divulgação da pouca bibliografia existente sobre

exemplificação, integrando-a no processo de ensino-aprendizagem do conceito de função. Esta perspectiva não é fruto de investigação alguma; visa, antes, reunir numa única situação alguns aspectos do processo de ensino-aprendizagem de conceitos que se encontram dispersos.

Para concretizar o nosso objetivo, socorremo-nos de um conceito em particular e de um recurso educativo quotidiano. O conceito escolhido é o de função e o recurso educativo é o uso de questões de escolha múltipla.

Da revisão bibliográfica que fizemos sobre *exemplificação de conceitos*, selecionamos os dois aspectos que consideramos mais interessantes e que estão, por sua vez, muito pouco tratados na bibliografia. Será uma abordagem feita a partir da interpretação de exemplificação através das noções de *transparência* de um exemplo a um conceito e das *dimensões de variação* referidas a um conceito; e, das duas, particularizaremos a ideia de *exemplo transparente e multidimensional* aplicado a uma situação muito concreta, as questões de escolha múltipla.

1. Exemplos, transparência e variação

1.1 Os exemplos

Há já muito tempo foi reconhecido que os alunos aprendem matemática mais pelo envolvimento com exemplos do que através de definições formais. Aliás, é pelos exemplos que as definições têm algum sentido (Watson; Mason, 2002).

Rissland-Michener (1978) propôs quatro categorias para os exemplos:

1. Exemplos iniciais: na primeira abordagem de uma qualquer teoria existem exemplos que sobressaem fácil e imediatamente; são estes que nos permitem iniciar o estudo de um novo tema e que se utilizam para as primeiras definições e resultados, dando, assim, ocasião a que surjam as primeiras intuições úteis.

2. Exemplos de referência: são aqueles exemplos aos quais nos referimos repetidamente. São básicos e largamente aplicáveis e

proporcionam um marco de referência a partir do qual muitos resultados e conceitos estão ligados entre si. Usam-se também para verificar a compreensão de conceitos, resultados ou processos.

3. Exemplos modelo: são exemplos paradigmáticos e genéricos. Eles sugerem e sistematizam expectativas e assunções automáticas sobre resultados e conceitos. São os exemplos que nos indicam casos gerais. Dada a sua natureza genérica, os exemplos modelo estão freqüente e intimamente ligados aos argumentos “*sem perda de generalidade*”.

4. Contraexemplos: estes exemplos são familiares a todos, por utilizarem-se para demonstrar que um determinado argumento é falso. Utilizam-se para revelar melhor as diferenças entre conceitos.

Por outro lado, Figueiredo (2005) e Figueiredo, Blanco e Contreras (2006), relativamente aos exemplos utilizados por estudantes para professores no ensino do conceito de função, categorizaram-nos em:

1. Definição: os exemplos considerados nesta categoria são aqueles que se apresentam aos alunos imediatamente após a definição, passando de uma situação geral para situações concretas desse conceito; ou, ao contrário, apresentam-se antes da definição do conceito, para passar do particular para a definição geral. São, pois, os primeiros exemplos.

2. Representação de uma função: são os primeiros contactos autônomos que os alunos têm com o conceito em estudo. Estes primeiros exercícios ou os primeiros problemas apresentam as várias possibilidades de abordar o conceito e promovem o aparecimento das primeiras dúvidas.

3. Características de uma função: este tipo de exemplos surge após a fase exploratória do conceito, quando o aluno empreende e ataca a tarefa de aprofundar o conceito nas suas várias abordagens, descobrindo as suas particularidades. Nesta etapa, as dificuldades requerem exemplos que auxiliem os alunos a superá-las, isto é, que sirvam como esclarecimento às suas dúvidas ou como forma de resolver situações de confusão.

4. Aplicações internas: as aplicações internas são uma forma de exemplificação que aparece já nas fases de maior aprofundamento do conceito em estudo e envolvem conteúdos ou conceitos lecionados anteriormente ou que se relacionam com outros que serão lecionados posteriormente.

5. Aplicações externas: estes exemplos são aplicações à vida real e a outras ciências. Os exemplos desta categoria são semelhantes aos da categoria anterior, apenas diferem no seu âmbito. Podem configurar exercícios ou problemas, mas incluem-se nesta categoria por envolverem certo grau de dificuldade.

Já Bills et al. (2006) aprofundam a tipologia sobre exemplos, distinguindo-os pela sua natureza:

1. Exemplos resolvidos, que são explicados e comentados pelo professor ou pelo autor do manual.
2. Exercícios, que são destinados a serem resolvidos pelos alunos.

No entanto, existe um intervalo considerável entre os *exemplos resolvidos* e os *exercícios* que o aluno deve, autonomamente, resolver. É o caso dos exercícios trabalhados em aula, em que o professor “conduz” a turma ao longo da resolução de um exercício típico. Utilizando este tipo de exemplos, o professor formula perguntas e dá sugestões durante a resolução, com o intuito de orientar os alunos e dar sentido à atividade e aos conteúdos matemáticos.

Tendo em conta as diferenças na forma e na função, os exemplos distinguem-se em:

3. Exemplos genéricos, que podem ser exemplos de conceitos ou ilustrações de procedimentos.
4. Contraexemplos, que necessitam de uma hipótese ou de afirmação para contrariar. Pode ser no contexto de um conceito, de um procedimento ou em algum passo de uma demonstração.
5. Não exemplos, que servem para definir os limites de um conceito, de um caso em que um procedimento não se aplique ou falhe

na obtenção do resultado desejado; ou para demonstrar que as condições de um teorema são precisas, bem definidas.

Para além dessa tipologia, Bills et al. (2006), citando Watson e Mason (2005), também introduzem a noção de *espaços de exemplos pessoais* para ajudar professores e alunos a consciencializarem-se das potencialidades e das limitações do uso de exemplos na aprendizagem. Mason e Watson (2005) propuseram o seguinte: se, de repente, referirmos um conceito ou uma técnica, de imediato, surgem-nos mentalmente os exemplos com ele relacionados. Utilizamos o termo *espaço de exemplos* quando nos referimos a esta coleção, que inclui não só o primeiro exemplo que nos vem à mente, mas também todos aqueles que nos surgem como resultado de posterior reflexão.

Metaforicamente, os autores consideram os espaços pessoais de exemplos como sendo *despensas*. Os exemplos são arrumados e acedidos como se fossem artigos que guardamos nas prateleiras da despensa; alguns estão na frente e usamos muitas vezes, enquanto outros estão nas filas de trás, porque não utilizamos tanto, e a eles temos mais dificuldade em aceder. Assim, procurar um exemplo é comparado a encontrar na *despensa* um elemento necessário a um objetivo. Com esta metáfora, salienta-se o fato de que, ao procurar-se um objeto, vai-se, simultaneamente, reorganizando e recategorizando os outros elementos da *despensa*. A última descrição de espaço de exemplos que encontramos diz-nos que *espaço de exemplos* é a experiência que temos ao ocorrer-nos uma ou mais classes de objetos matemáticos unidos por métodos de construção e associações. Pode existir uma estrutura interna na forma como se ligam os objetos ou como se ligam as classes, e podem existir elos associativos com conceitos, teoremas e procedimentos (Goldenberg; Mason, 2008).

No que respeita à aprendizagem de conceitos matemáticos, Watson e Mason (2005) apresentam no seu livro dois princípios:

- I. O aprendizado de matemática consiste em explorar, rearranjar, ganhar fluência e alargar os nossos espaços de exemplos, bem como as ligações entre e dentro deles.

II. O alargamento do nosso espaço de exemplos (conscientemente guiado) contribui para flexibilizar o pensamento e potencia a percepção e o acréscimo de novos conceitos.

Em educação matemática, observa-se um incremento considerável de trabalhos de investigação sobre a *geração de exemplos pelos alunos* (Watson; Mason, 2002). Ao gerarem exemplos por si próprios, os alunos ampliam o seu espaço de exemplos, reorganizam esse espaço, criam mais ligações entre os elementos do espaço e facilitam as ligações externas a espaços de exemplos de outros conceitos. Watson e Shipman (2008) mostram como, com conteúdos adequados na sala de aula, é possível explorar atividades e levar os alunos ao encontro dos aspectos principais de um dado conceito. Os espaços de exemplos podem ser ampliados com base em atividades exploratórias, bem como através de tarefas de construção direta (Goldenberg; Mason, 2008). A forma de gerar exemplos próprios e a ampliação dos espaços de exemplos pessoais estão intimamente ligadas a situações de “Dê um exemplo de ... com restrições” (Watson; Mason, 2005), em que se propõe ao aluno que dê exemplos de um conceito, mas com sucessivas restrições. Por exemplo:

*“Dê exemplo, pela sua representação gráfica, de uma função injetiva.
-Que seja crescente.
-Que passe no ponto $A(-1;3)$.
-Que tenha o sentido da concavidade voltada para cima em algum intervalo do seu domínio.”*

Em síntese, ensinar e aprender matemática baseia-se na criação e na ampliação dos espaços pessoais de exemplos nos quais os alunos e os professores trabalham as suas estruturas e ligações. Adquirir competências matemáticas consiste em desenvolver espaços de exemplos complexos, inter-relacionados, mas, no fundo, compreensíveis para o aluno. Os espaços de exemplos, tal como são descritos acima, são componentes incontornáveis da experiência dos alunos. Aprender mais sobre um determinado tópico consiste em aceder a exemplos mais avançados ou, em vez disso, a construções mais avançadas para esses exemplos, bem como em aumentar as ligações ou os desencadeantes que permitem os acessos ao espaço de exemplos; ensinar eficientemente

inclui o uso de tarefas e interações através das quais os alunos melhoram os acessos aos exemplos, a métodos de construção de exemplos e, claro está, aos aspectos matematicamente relevantes dos diferentes exemplos (Goldenberg; Mason, 2008).

Fica, portanto, ilustrado como o ensino-aprendizagem pode ser encarado como criação, ampliação e estruturação de espaços de exemplos pessoais. E como essa criação e ampliação podem informar sobre a construção de tarefas nas quais os alunos trabalham diretamente as suas próprias estruturas e relações matemáticas (Watson; Mason 2002; Mason; Watson, 2005; Goldenberg; Mason, 2008; Watson; Shipman, 2008). Essa estratégia demonstrou ser muito efetiva para transferir, durante as aulas, a iniciativa do professor para o aluno (Zaslavsky, 1995; Niemi, 1996; Dahlberg; Housman, 1997; Hazzan; Zazkis, 1997; Zazkis, 2001; Mason; Watson, 2005).

Pelo exposto, compreende-se que os exemplos têm um papel fundamental na aprendizagem de conceitos matemáticos, técnicas, raciocínio e no desenvolvimento de competências matemáticas (Rowland; Thwaites; Huckstep, 2003; Bills et al., 2006). Contudo, a forma como os exemplos são interpretados pelos protagonistas do processo de ensino-aprendizagem não é semelhante à forma como o professor os vê: para este, o papel de um determinado exemplo pode ser visto como paradigmático e, pelo lado do estudante, apenas como mais um caso para aprender (Mason; Pimm, 1984). Cabe ao professor estar atento para essa diferença de perspectiva, para potencializar o uso do exemplo, clarificar a importância a dar-lhe e, por fim, concluir que função se pretende que ele desempenhe.

1.1.1 Exemplos, não exemplos e contraexemplos

Um *exemplo* deve ser entendido como uma situação geral referida a um conceito, definição, processo ou teorema (Zodik; Zaslavsky, 2007). Alguns autores classificam os exemplos pela sua natureza (Bills et al., 2006); outros, pelo seu uso, pela sua função ou pelo seu objetivo (Rissland-Michener, 1978; Figueiredo, 2005; Figueiredo; Blanco; Contreras, 2006). Todos os casos seguintes são do âmbito da matemática, mas estamos convencidos de que qualquer professor de

ciências experimentais poderia encontrar situações análogas na sua disciplina.

Assim sendo, a partir da definição seguinte

Definição 1: Chama-se *sucessão de números reais* a toda a aplicação de \mathbb{N} em \mathbb{R} .

podemos apresentar os exemplos

Exemplos: $a_n = 3n^2 + 2$; $b_n = \frac{1}{2n+1}$ ou $c_n = \sqrt{n + \frac{1}{n}}$

Os *não exemplos*, como vimos, servem para definir os limites de um conceito (Bills et al., 2006). São casos que, sendo próximos do exemplo, não são exemplos, por violarem alguma regra inerente à definição, ao processo ou à situação.

Assim, relativamente à Definição 1, temos o não exemplo

Não exemplo: $e_n = \frac{1}{2n-10}$

que não é uma sucessão por não possuir o 5º termo.

Consideremos, agora, outra definição, como segue:

Definição 2: Chama-se termo da sucessão $a_n = \frac{n}{n+1}$ a qualquer real que se obtém da concretização de n no termo geral a_n .

Neste caso, poderíamos apresentar o não exemplo

Não exemplo: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$

porque a concretização de n não foi natural como a definição 1 obriga.

Os *contraexemplos* são familiares a todos, por utilizarem-se para revelar melhor as diferenças entre conceitos (Rissland-Michener, 1978) – o que verifica determinada definição pode contrariar outra – e também para demonstrar que são falsos determinados argumentos e afirmações (Rissland-Michener, 1978; Zaslavsky; Ron, 1998).

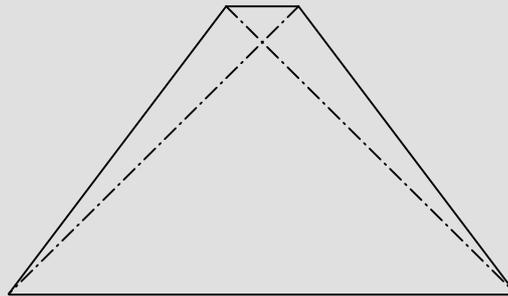
Estes casos são exemplos porque são objetos matemáticos que verificam todas as características iniciais presentes na afirmação, mas não possuem a/as característica/as adicional/ais que a afirmação lhes atribui.

Veja-se a seguinte afirmação (falsa) em Geometria do plano:

Afirmação: Todo o quadrilátero de diagonais perpendiculares e de igual comprimento é um quadrado.

Ela admite como contraexemplo

Contraexemplo:



Ou, então, tratando-se de um argumento, é um objeto matemático que, verificando as características presentes no antecedente, não possui as características imputadas pelo conseqüente. Como no caso deste (falso) argumento:

Argumento: Como 18, 36 e 72 são simultaneamente múltiplos de 9 e múltiplos de 6, então todos os múltiplos de 9 são também múltiplos de 6.

Contraexemplo: 27

1.1.2 Três distinções e três características

Consideremos as sequências de números com infinitos elementos:

A:	2, 4, 6, 8, 10,
B:	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3},$
C:	$\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 5\sqrt{5}$
D:	-2, -2, -2, -2, -2, ...

Podemos considerar cada uma das sequências como um exemplo, mas podemos considerar as quatro como sendo um exemplo constituído por quatro sequências. Suponhamos que antes da apresentação das sequências temos um dos seguintes textos:

E1. Depois de analisar as quatro sequências A:, B:, C: e D: indique o que, para si, existe de comum entre elas.

Ou, então, o texto poderia ser:

E2. Para cada uma das seguintes progressões aritméticas indique o valor da sua razão.

Mas também poderia ser:

E3. Existem progressões aritméticas cuja razão não é racional. Indique um exemplo disso em alguma das seguintes progressões:

A mesma situação, um exemplo de quatro sequências, tem três usos muito diferentes. No primeiro caso estamos, claramente, perante uma particularização que apresenta uma base para a indução de uma generalidade. Pretende-se que os alunos generalizem uma característica comum a quatro elementos, com o objetivo de construir uma definição de progressão aritmética. Assim, este exemplo materializa um conceito, isto é, de alguma forma personifica essa característica que é geral e generalizável. O exemplo teve um uso indutivo (Rowland; Zaslavsky, 2005). Podíamos, se quiséssemos, ter optado pelo sentido contrário:

introduzir primeiro a definição de progressão aritmética e apresentar, imediatamente, as diferentes materializações do conceito definido. O exemplo teria um uso dedutivo (Rowland; Thwaites; Huckstep, 2003).

No segundo caso, o exemplo pode servir como ilustração ou como atividade prática e tem como fim que o aluno desenvolva competência num dado processo ou técnica (Sanguin, 2004).

Por fim, no terceiro caso, podemos sem dificuldade incluir este exemplo num conjunto de outros itens que constituam um teste.

Para este artigo, propomos as três classes de exemplos que se obtêm das três situações anteriores descritas em *E1*, *E2* e *E3*. Considerando o propósito que o exemplo pretende atingir, este pode ser:

uma *particularização* (obtida de *E1*), se for apresentado após uma definição, de forma a corporizar essa definição num processo dedutivo ou, ao invés, apresentado antes, dentro de um processo indutivo. De qualquer modo, ambos os processos visam a generalização do conceito definido.

um *problema* ou um *exercício* (obtido de *E2*), conforme estiver orientado para a prática ou para o desenvolvimento de alguma técnica ou processo (Watson; Mason, 2002).

um *item* (obtido de *E3*) de uma série de outros que constituem um momento de avaliação.

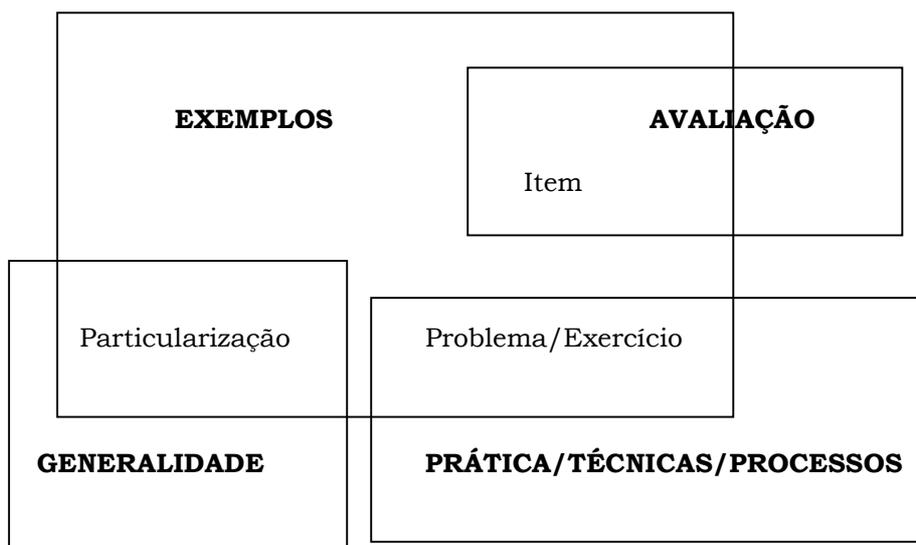


Figura 1: Classes de Exemplos

O uso de exemplos, suas características, seu papel e seus objetivos no processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos não estão amplamente tratados na bibliografia específica, embora ninguém duvide da sua extrema importância nesse processo.

Para Bills et al. (2006), por muitas distinções e classificações que se façam dos exemplos, há uma característica que convém todos tenham: a utilidade. Assim, para estes autores, o papel do professor é apresentar circunstâncias favoráveis à aprendizagem que envolvam uma grande variedade de exemplos úteis dirigidos às necessidades e às características dos alunos. A utilidade de um exemplo é conseguida se ele for *transparente* e *generalizador*. Como e quanto um exemplo pode ser útil é muito subjetivo (Bills et al., 2006). Todavia, o ambiente, os conteúdos, a forma como o professor apresenta esses exemplos e as suas características mais realçadas podem fazer a diferença entre um exemplo bem compreendido e útil e, apenas, um outro exemplo mais.

Transparência é a capacidade que tem um exemplo de dirigir facilmente a atenção do público-alvo para os aspectos importantes que tornam o exemplo exemplar.

A transparência de um exemplo pode estar na base do que Mason e Pimm (1984) designaram como *exemplo genérico* ou o que Rissland-Michener (1978) designou por *exemplo de referência*. São exemplos que o professor considera como paradigmáticos de determinado conceito, são aqueles casos gerais que representam toda uma classe de exemplos que têm a mesma finalidade: ilustrar determinado conceito.

Vamos considerar a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ que, como sabemos, é uma forma de representar uma função de segundo grau (se $a \neq 0$) e cujo gráfico é uma parábola. Pelas três transformações do plano aplicadas a $g(x) = x^2$, pudemos obter $f(x)$; e, se a parábola definida por $g(x)$ tem as coordenadas do vértice em $V(0;0)$, então $f(x)$ tem vértice no ponto de coordenadas $V(h;k)$. Considerando que o aluno compreendeu os passos indicados, então a expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$ é uma generalidade que admite a particularização $h(x) = (x-2)^2 - \sqrt{5}$, e o vértice da parábola associada tem coordenadas $V(2; -\sqrt{5})$. Note-se que o exemplo é transparente ao conceito de gráfico de uma parábola cujo vértice é conhecido.

Se, por outro lado, considerarmos a expressão $g(x) = 3(x+1)(x-2)$, facilmente nos apercebemos que esta forma de apresentar a quadrática é transparente quanto às suas raízes $x = -1$ e $x = 2$.

Os conteúdos programáticos de matemática do ensino secundário incluem muitíssimas expressões transparentes a determinados conceitos:

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 6^2$ é transparente relativamente às coordenadas do centro e ao raio da circunferência que define, mas $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 6 = 0$ já não é transparente aos mesmos elementos;

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ é transparente relativamente à sua assíntota horizontal $y=0$, porque os alunos, após o estudo dos limites em funções reais de variável real, sabem que, se o grau do numerador é inferior ao grau do denominador, nesses casos o limite em $\pm\infty$ é zero. Logo, admite aquela assíntota horizontal;

$|z-i| \leq |z-(2+i)|$ é transparente relativamente ao semiplano fechado, que inclui i e é limitado pela reta que é a mediatriz do segmento de reta $[i; 2+i]$ no plano de Argand.

Contudo, as características dos exemplos transparentes não proporcionam *per se* os resultados que desejamos. Os principais traços, subtilezas, limites e suas ligações não são construídos pelo aluno pelo simples fato de lhe serem apresentados exemplos transparentes. Assim, a forma como os exemplos são vistos pelos alunos e aquela como são apresentados pelos professores não são idênticas (Mason; Pimm, 1984) e, por isso, ao professor pede-se que esteja ciente dos aspectos importantes do exemplo que apresenta e do aluno espera-se que apreenda o sentido inculcado pelo professor. Por outras palavras, as características deste tipo de exemplos — que os tornam paradigmáticos na perspectiva do professor — podem, para o aluno, passar totalmente despercebidas. Nesse caso, o objetivo de determinada apresentação seria totalmente falhado, e o aluno não se beneficiaria, de todo, do papel fundamental do exemplo que o professor lhe apresentou.

Generalizabilidade é o alcance de generalização proporcionado pelo exemplo, ou série de exemplos, em termos do que é necessário para ser exemplo e, também, do que é arbitrário e alterável.

A generalidade proporcionada por uma série/seqüência de exemplos prende-se com as várias abordagens ao conceito que o professor possa empreender. Essas formas diferentes de abordar um

conceito são designadas “dimensões de variação possíveis”, e o alcance de cada uma dessas abordagens é denominado “amplitudes de mudança permissíveis”.

A nossa atenção está vocacionada para notar as variações num ambiente invariante. É intuitivo concluir que os alunos não se apercebem de aspectos importantes das matérias que lhes são apresentadas ou propostas (conjuntos de exercícios) para trabalhar, se houver presente pouca ou nenhuma variação. Se o intuito é que os alunos experimentem variações e, mais que isso, se vão aprender com essa variação, então deve haver variação em ritmo suficiente, de modo a chamar-lhes a atenção (Mason; Watson, 2005).

Marton e Booth (1997) desenvolveram a noção de aprendizagem como discernimento, isto é, pelo reconhecimento de que apenas se discerne algo onde existe variação; onde nada varia, não há distinção possível. Assim: “Aprender é aperceber-se das variações que são possíveis onde, previamente, não tínhamos tido essa consciência” (Mason; Watson, 2005).

Dimensões de variação possíveis: são aspectos ou detalhes que podem variar, sem que o exemplo deixe de ser um exemplo do conceito em questão. Para que se possa entender um conceito matemático, é necessário, pelo menos subliminarmente, que nos apercebamos do que é exemplar em determinado exemplo. (Mason; Watson, 2005).

Amplitude de mudança permissível: juntamente com as dimensões de variação possíveis, vem a amplitude de mudança permissível, associada a qualquer das dimensões. É o identificar dimensões de variação possíveis que faz de um conceito aquilo que ele é, sendo importante relembrar que uma das razões para usar as palavras *possível* e *permissível* é dirigir a atenção para o fato de poder existir diferenças significativas entre aquilo de que os alunos e os professores estão cientes dentro dos respectivos centros de atenção; outra razão reside no fato de estes, por sua vez, poderem diferir das convenções ou cânones matemáticos (Mason; Watson, 2005).

A consciência da dimensão da variação possível é, essencialmente, a consciência (percepção) da generalidade. Dito de outra forma, a consciência da dimensão da variação possível é essencial para

que os espaços de exemplos das pessoas possam ser muito variados nas representações de conceitos. Aprender um conceito matemático requer uma tomada de consciência tanto dos aspectos, das características, das relações e das propriedades que são invariantes como, simultaneamente, dos aspectos e das características importantes em que se permite variação (Mason, 2005).

Já que não é razoável esperar que os alunos reconstruam todas as dimensões de variação possíveis por si próprios, mesmo com a assistência de exercícios esquematizados cuidadosamente elaborados, será muito vantajoso para os alunos se forem os seus professores a estarem, eles próprios, conscientes e despertos para as diversas dimensões de variação possíveis (Mason; Watson, 2005).

Voltemos ao exemplo $f(x) = a(x-h)^2 + k$; note-se que as letras a , h e k se referem, respectivamente, a uma possível contração ou expansão do gráfico e ao sentido da concavidade; a uma translação horizontal; a outra translação, contudo, vertical. Estas três letras indicam as três dimensões de variação possíveis neste exemplo e as respectivas amplitudes de mudança permissíveis são em \mathbb{R} , no caso de h e k , mas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, no caso de a . No caso de $a=0$, estaríamos na presença de um não exemplo, de uma função de 2º grau.

Admitamos, de novo, a definição 1 (cf. A1.1): Chama-se sucessão a toda a aplicação de \mathbb{N} em \mathbb{R} . Como vimos, $u_n = \frac{n}{n+5}$ é uma

concretização deste conceito, mas $v_n = \frac{n}{n-5}$ é um não exemplo do

conceito de sucessão, porque o natural 5 não tem imagem, não existe o 5º termo. Note-se que, neste caso, uma dimensão de variação não corresponde a um elemento numérico da expressão, mas sim a um elemento operacional. A amplitude de mudança permissível não inclui todas as quatro operações básicas. Se a utilização da operação “-” originou um não exemplo, a utilização das operações “+”, “x” ou “÷”

originaria outras três particularizações do caso, respectivamente:

$$v_n = \frac{n}{n+5}, v_n = \frac{n}{n \times 5} \text{ ou } v_n = \frac{n}{n/5}, \text{ todas elas exemplos.}$$

Já no exemplo de uma função racional $f(x) = \frac{x-1}{x^2+a}$, estamos a introduzir uma dimensão de variação possível, quando apresentamos o parâmetro a . A amplitude de mudança permissível é todo o conjunto de números reais. Mas, se este exemplo, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+a}$, for apresentado para ilustrar a existência de assíntotas verticais, o parâmetro a continua a ser uma dimensão de variação possível; a amplitude da mudança permissível, porém, apenas compreende os reais negativos para a existência de duas assíntotas verticais, e a variação reduz-se a um valor, o zero, para a existência de uma única assíntota vertical.

Supondo que se afirma, em IR, a existência de assíntotas verticais para $f(x) = \frac{x-1}{x^2+a}$, utilizando o exemplo por ser transparente a este conceito, então o valor $a = 3$ constituiria um contraexemplo.

Se juntarmos num exemplo as duas características que apresentamos, obtemos, então, um *exemplo transparente e multidimensionado*, que não esconde que característica do conceito está a ser tratada, e suas perspectivas apresentadas permitem ao aluno alargar o conceito segundo outras tantas dimensões de variação possíveis.

2. O caso das questões de escolha múltipla

Este tipo de questões parece-nos ser um bom terreno para aplicar o conceito de *exemplo transparente e multidimensionado*. A forma que este tipo de questões apresenta é perfeitamente adequada à utilização de um cenário onde as dimensões de variação possíveis dentro de um conceito, bem como a noção de transparência, têm um papel

primordial. A nosso ver, as linhas que seguem deixam isso bem explícito.

2.1. Na bibliografia

A utilização de alguma situação de escolha múltipla é freqüente para qualquer professor de ciências (Kehoe, 1995) e, em particular, para o de matemática. A produção deste tipo de situação não é uma tarefa fácil, todos temos conhecimento de algumas regras básicas, mas aplicá-las torna-se normalmente difícil, se quisermos obter uma situação que cumpra cabalmente o seu propósito (Kehoe, 1995; Frary, 1995; Haladyna; Downing; Rodriguez, 2002). Este artigo introduz outros aspectos a considerar, aqueles que a nosso ver são mais importantes na utilização de exemplos.

Antes de qualquer outra consideração, estabeleceremos os termos comumente utilizados na bibliografia referida às questões de escolha múltipla. Assim, *tronco* é a pergunta introdutória ou a afirmação incompleta que figura no início da questão e é seguida pelas opções. As *opções* consistem na *resposta* (opção correta) e nos *distrativos* que, embora incorretos, devem ser (espera-se) tentadores (Kehoe, 1995).

Estão disponíveis em variadas publicações da especialidade numerosas diretrizes para a construção de questões de múltipla escolha com qualidade (Adams, 1992; Haladyna; Downing, 1989a; Sireci; Wiley; Keller, 1998). Contudo, Haladyna e Downing (1989b) revisaram a literatura teórica e empírica contida em 96 estudos, incluindo as 46 diretrizes reunidas por Haladyna e Downing (1989a) e verificaram que muitas das diretrizes não tinham suporte em investigação alguma, por isso sugeriram que essa investigação fosse feita com base em dados empíricos ou então estatísticos. Esse estudo foi feito sobre os referidos 96 estudos teóricos sobre avaliação de diretrizes para a elaboração de questões de escolha múltipla, tendo produzido 43 novas diretrizes. Posteriormente, Haladyna, Downing e Rodriguez (2002) propuseram uma nova lista de 31 diretrizes para uma boa produção de questões de escolha múltipla.

Muitos adultos já responderam a situações de escolha múltipla alguma vez durante a sua vida (Vacc; Loesch; Lubik, 2001). Este tipo de

situação surge na escola, na procura de emprego, na formação profissional, numa licenciatura, etc. As questões de escolha múltipla são usadas de forma alargada e têm um impacto significativo na vida das pessoas que a elas respondem; é por isso que o uso das técnicas que se provaram efetivas para a sua construção se afigura tão importante (Vacc; Loesch; Lubik, 2001; Haladyna; Downing; Rodriguez, 2002).

A elaboração de testes com itens desta natureza está muito direcionada para a avaliação de conhecimentos ou de aprendizagens. Muitas vezes essas avaliações são propostas por um professor, mas outras há em que a entidade que as implementa é o próprio Estado. A qualidade desses testes depende, em primeira instância, da qualidade de cada item. Por isso, um dos passos mais importantes é a redação desse tipo de questões (Haladyna; Downing, 1989a).

Este tipo de avaliação é popular por reunir várias características que a tornam atrativa: pode ser rapidamente corrigida, é relativamente precisa, econômica e objetiva e, acrescentando-se, pode-se aplicar a uma grande variedade de temas (Cohen; Swerdlik, 1999). Além do mais, pode abranger vários níveis taxionômicos. E, segundo Vacc, Loesch e Lubik (2001), as questões de escolha múltipla podem atingir diferentes funções cognitivas: memorização, aplicação e análise.

Relativamente às diretrizes apontadas como corretas para a construção de questões de escolha múltipla, há muitos pontos de concordância entre os investigadores e poucos aspectos em que essa concordância não existe. Considerando o objetivo deste trabalho, porque não se pretende descrever exaustivamente o que é e o que não é correto na elaboração deste tipo de questões, apontaremos apenas alguns pontos em que ocorre total concordância em toda a literatura que consultamos.

Regras a considerar na elaboração de questões de escolha múltipla, de acordo com Haladyna, Downing e Rodriguez (2002):

Quadro 1: Regras a considerar na elaboração de questões de escolha múltipla

<p>Na elaboração dos troncos:</p> <ol style="list-style-type: none">1. Usar linguagem clara e simples.2. Apresentar uma única ideia ou problema.3. Incluir no tronco a maioria das palavras e da informação possível para não forçar distrativos longos.4. Não expor a ideia ou problema pela negativa.5. Evitar fraseologia estereotipada. <p>Na elaboração dos distrativos:</p> <ol style="list-style-type: none">6. Formular as opções com cuidado para não incluírem informação irrelevante.7. Garantir a independência entre as opções.8. Evitar o uso de “todas as anteriores” e usar “nenhuma das anteriores” com muito cuidado.9. Dar aos distrativos caráter apelativo para os alunos que não dominam o conteúdo exposto no tronco.10. Cuidar da similaridade no tamanho e na complexidade dos distrativos e da estrutura gramatical da resposta correcta.11. Evitar distrativos que se contradigam uns aos outros.12. Evitar facultar <i>chaves</i> que indiquem ou sugiram a resposta correcta.
--

2.2. Como exemplos transparentes e multidimensionados no ensino-aprendizagem

Tendo em conta que o aspecto mais tratado pela bibliografia referida às questões de escolha múltipla é a avaliação, a perspectiva aqui descrita pretende aprofundar a introdução da situação de escolha múltipla também num contexto de ensino-aprendizagem com recurso à exemplificação transparente e com dimensões de variação múltiplas.

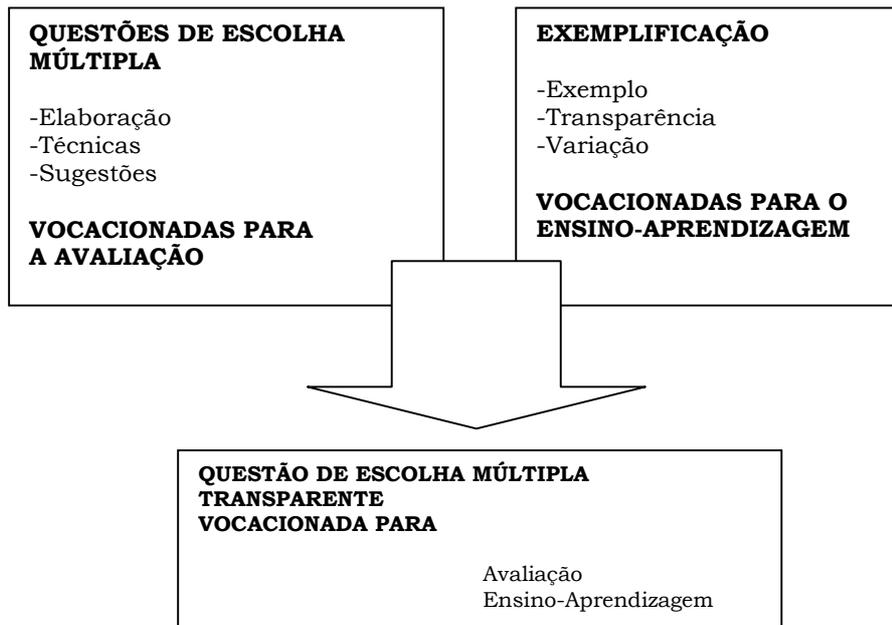


Figura 2: O papel das questões de escolha múltipla

A exemplificação proporcionada aos alunos deve ser rica e variada (Bills et al., 2006). Mas, além disso, deve ser apresentada em séries de exemplos (Mason; Watson, 2005; Sanguin, 2004) que proporcionem uma variação que seja perceptível ao aluno (Bills et al., 2006) e permita ampliar os seus espaços de exemplos pessoais (Watson; Mason, 2002, Mason; Watson, 2005; Bills et al., 2006); ou, então, que mantenham uma invariância que permita induzir uma generalidade (Watson; Mason, 2002; Mason; Watson, 2005; Mason, 2005; Bills et al., 2006).

Neste aspecto, o exemplo de escolha múltipla é adequado a proporcionar, pela série de opções, tanto a variação como a invariância. Assim, o aluno tem a oportunidade de ir construindo o conceito em estudo, seja por abstração, seja pela definição de contornos desse

conceito. Aprender é ampliar os espaços de exemplos, acrescentar exemplos aos já conhecidos, de forma a reconstruir e reestruturar conceitos (Watson; Mason, 2002; Bills et al., 2006). Por isso, uma situação de escolha múltipla pode fazê-lo com mais facilidade, já que apresenta três, quatro ou mais escolhas e outras tantas situações. Cada escolha ou situação deve corresponder a uma dimensão de variação possível, o valor lógico da afirmação contida na escolha deve estar ligado à amplitude de mudança permissível, e sair dessa amplitude gera não exemplos ou escolhas falsas. O não exemplo, ao manter-se próximo do exemplo, é o que dá a ideia falsa de *veracidade*, mas que mantém essa escolha como plausível, tal como preconiza a diretriz número 9 (cf. Quadro 1).

Por outro lado, se a forma do tronco da questão de escolha múltipla for do tipo afirmação, a rejeição de cada distrativo pode implicar a utilização de um contraexemplo ou, talvez, a identificação de um não exemplo. Mas apenas aqueles alunos com uma correta construção do conceito o poderão fazer.

2.3 Sobre as desvantagens apontadas às questões de escolha múltipla

Muitas desvantagens são apontadas à utilização de questões de escolha múltipla na bibliografia específica. Note-se que uma grande parte das desvantagens apontadas está diretamente relacionada com o seu uso em situação de avaliação sumativa, mas, se nos centrarmos no seu papel apenas em termos de ensino-aprendizagem, podemos aceitar que essas desvantagens perdem esse significado contextual. Assim, por não ser uma situação de teste, as desvantagens como: i) resposta ao acaso, ii) fraude por cópia e iii) desenvolvimento de habilidades paralelas – habilidades que estão relacionadas com a resposta a este tipo de questões e não com o conceito envolvido – diluem-se, por o aluno não sentir essas tentações.

A crítica que refere que as questões de escolha múltipla cerceiam a oralidade, a originalidade, a organização mental das ideias e o raciocínio do aluno também nos parecem desadequadas quando este tipo de questões é aplicado em processo de ensino-aprendizagem. Com base numa questão de escolha múltipla, pode, sem dificuldade alguma,

ser estabelecida uma comunicação alargada entre todos os elementos de uma sala de aula, com vantagens óbvias para todos. Este argumento também contraria uma outra censura, aquela que refere a impossibilidade de encontrar o motivo pelo qual o aluno erra uma pergunta em particular; havendo comunicação, facilmente o professor pode encontrar a razão que provocou o erro.

Fica, portanto, clara a adaptabilidade do gênero “escolha múltipla” quando se pretende explorar a transparência, as dimensões de variação possíveis, as respectivas amplitudes de mudança permissíveis, os não exemplos e contraexemplos das opções, adequados ao conceito indicado no tronco da questão.

TRONCO DA QUESTÃO:	<i>EXEMPLO TRANSPARENTE/ CONCEITO</i>
--------------------	---------------------------------------

DISTRATIVOS:	
1ª OPÇÃO	<i>1ª DIMENSÃO DE VARIAÇÃO ou 1º NÃO EXEMPLO</i>
2ª OPÇÃO	<i>2ª DIMENSÃO DE VARIAÇÃO ou 2º NÃO EXEMPLO</i>
3ª OPÇÃO	<i>3ª DIMENSÃO DE VARIAÇÃO ou 3º NÃO EXEMPLO</i>
4ª OPÇÃO	<i>4ª DIMENSÃO DE VARIAÇÃO ou 4º NÃO EXEMPLO</i>

N. B. Uma das opções teria que ser *o exemplo/característica*, que configura a resposta correta.

2.4. Na prática

Não teria sentido escrever este ensaio e não incluir uma questão de escolha múltipla que, em nosso entender, cumpra as diretrizes apresentadas (cf. Quadro 1) e todas as considerações que lhe seguem.

Observemos a seguinte questão:

Considere os gráficos das funções f e g , respectivamente fig. 1 e fig. 2

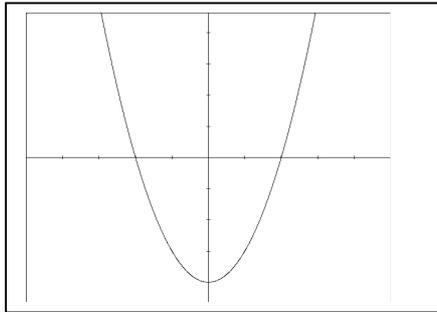


Fig. 1

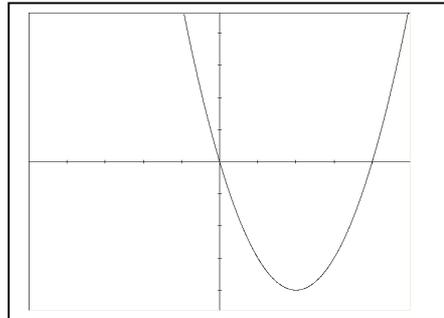


Fig. 2

Se a função h se define por $h = \frac{f}{g}$, podemos afirmar que:

- A h admite as raízes $x=0$ e $x=4$
- B h tem sinal positivo em $]-2; 0[$
- C o domínio de h é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0;4\}$
- D $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$

A escolha múltipla apresentada pode ser utilizada como *exercício* ou como *item*.

Em termos das diretrizes apresentadas no Quadro 1, podemos afirmar que, se confrontada com cada um dos doze pontos, esta questão de escolha múltipla verifica cada um deles.

Se pensarmos nas *dimensões de variação possível* e respectivas *amplitudes de mudança permissível*, podemos ver que cada uma das opções inclui uma dimensão diferente. Da forma como a função h é apresentada, é *transparente* aos conceitos de raiz, sinal, domínio e limite num ponto.

As amplitudes de mudança permissíveis são facilmente identificáveis. Na primeira dimensão, a amplitude é \mathbb{R} , mas o uso de qualquer valor diferente de -2 e 2 gera contraexemplos relativos às raízes de h . Na segunda dimensão, a amplitude manifesta-se em forma de

intervalos; na terceira, em termos de zeros do denominador; e, na quarta, em forma de sinais a utilizar no quociente.

2.5. Quando o tronco não é transparente relativamente às opções

Usando um exemplo anterior: $f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$. Se o tronco do exercício/questão apresentar este exemplo, questionando quais as coordenadas do vértice, para o estudante que domina este assunto não haverá dificuldade alguma em responder imediata e corretamente. Mas, se utilizarmos no mesmo exercício/questão o exemplo $f(x) = x^2 + 4x - 6$, os alunos, mesmo os aptos a responder à situação anterior, já não poderão responder de forma imediata. Obviamente, a razão radica na não transparência do exemplo às coordenadas do vértice da parábola. Para responder, será necessário recorrer ao cálculo ou à máquina de calcular gráfica. É claro que o aluno deve ter essa competência, só que, para a evidenciar ou treinar, será, talvez, mais aconselhável não utilizar um exemplo de escolha múltipla. Esta sugestão é, a nosso ver, extensível aos casos da demonstração/prova e à resolução de problemas.

Estamos convencidos de que, no caso específico da matemática, os exemplos de escolha múltipla destinam-se a situações de resposta imediata, sem cálculo nem produção escrita. No entanto, em matemática, o cálculo, a demonstração/prova e a resolução de problemas têm o seu papel, que é fundamental, mas nestas áreas pensamos que a exemplificação em escolha múltipla não seja a mais apropriada.

3. Em síntese: os papéis do professor e do aluno

O processo de ensino-aprendizagem com base na utilização de exemplos transparentes, com uma variação apreciável, em que sejam trabalhadas as dimensões de variação possíveis com vista à ampliação dos espaços de exemplos pessoais é um tema emergente e muito pouco tratado.

Foi nossa intenção juntar estes aspectos no conceito de *exemplo transparente e multidimensional*, uma perspectiva a partir da qual se

poderá dar um novo matiz à elaboração de exemplos. O conceito de *exemplo transparente e multidimensionado* tem, no nosso entendimento, uma concretização interessante, quando se elaboram situações de escolha múltipla, quer elas se destinem a *materializações* ou a *exercícios*, quer se destinem a *itens* de avaliação.

Nas atividades quotidianas, este tipo de exemplificação tem o seu papel na construção e no aprofundamento de conceitos. As definições dos conceitos também têm o seu papel no processo de ensino-aprendizagem, mas, como foi dito, o papel principal radica nos exemplos que apresentamos aos alunos. Nas atividades diárias, devemos socorrer-nos das boas particularidades que os exemplos detêm; neste trabalho, juntamos duas delas. A transparência do exemplo indica ao aluno com que característica particular do conceito estamos a trabalhar, e as várias dimensões que possamos introduzir indicam as diversas formas de o abordar, explorar e aprofundar.

No caso particular das questões de escolha múltipla, o seu uso tem lugar no processo de ensino-aprendizagem. Contudo, considerando todos os aspectos aos quais demos ênfase, o professor, ao elaborar este tipo de exemplos, deve considerar o seu grau de adequação aos seus objetivos. Como vimos, é preconizada uma abordagem do conceito em termos muito precisos, e não somos apologistas de que este tipo de questões seja apropriado a todo o tipo de situações de exemplificação. Utilizando o conceito de função, vimos que o professor deve privilegiar situações que não envolvam a utilização de cálculo demasiado exigente; que não envolvam demonstração ou prova; ou, então, que se destinem a tornar rotineira a utilização de um algoritmo ou de algum processo. Os casos práticos que apresentamos ilustram o modo como podem ser exploradas pelo professor as questões de escolha múltipla como exemplos transparentes e multidimensionados; são casos em que a resposta depende diretamente do conhecimento do conceito em questão, do grau de aprofundamento no conceito e da habilidade para relacionar os vários aspectos ou dimensões de que o conceito se possa revestir. Para as outras situações, aquelas que não aconselhamos serem exploradas por este tipo de exemplificação, existem os mais variados recursos que estão disponíveis a todos os professores na bibliografia específica. Aplicadas pelo professor no sentido que descrevemos, as

questões de escolha múltipla, contrariando todas as desvantagens que se lhes apontam, são promotoras de situações didaticamente ricas e que podem perfeitamente promover a expressividade, a originalidade e a organização dos raciocínios do aluno e proporcionar uma imagem real da forma como ele domina os conceitos em causa.

De um modo geral, se o professor pretender utilizar em aula uma exemplificação transparente, que explore as várias dimensões de variação possíveis, deve certificar-se de que os seus exemplos não são vistos pelo aluno como mais um exercício a resolver, mas, sim, como um exemplo dirigido às suas necessidades e que lhe pode proporcionar uma aprendizagem mais efetiva. Ao aluno cabe a tarefa de olhar esse recurso como uma forma de ampliar o seu espaço de exemplos pessoais, de perceber as várias dimensões de variação próprias do conceito e de tentar apreender o sentido e o propósito dos exemplos que lhe são apresentados.

Referências bibliográficas

ADAMS, R. Multiple-choice item writing: art and science. *The Bar Examiner*, v. 61, n. 1, p. 5-14, 1992.

BILLS, L.; DREYFUS, T.; MASON, J.; TSAMIR, P.; WATSON, A.; ZASLAVSKY, O. Exemplification in Mathematics education. In: NOVOTNA, J. (Ed.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague, Czech Republic: PME, 2006.

COHEN, R. J.; SWERDLIK, M. E. *Psychological testing and assessment: an introduction to tests and measurement*. 4 th. ed. Mountain View, CA: Mayfield, 1999.

DAHLBERG, R., HOUSMAN, D. Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, n. 33, p. 283-299, 1997.

FIGUEIREDO, C. A.; BLANCO, L. J.; CONTRERAS, L. C. A exemplificação do conceito de função em quatro professores estagiários. *Revista Unión*, n. 8, p. 23-39, 2006.

FIGUEIREDO, C. A. *Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de função*. Memoria de proyecto de investigación de Doctorado. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, España, 2005.

FRARY, R. B. More multiple-choice item writing do's and don'ts. *ERIC/AE Digest*, 1995.

GOLDENBERG, P.; MASON, J. Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, n. 69, p. 183-194, 2008.

HALADYNA, T. M.; DOWNING, S. M. A taxonomy of multiple-choice item writing rules. *Applied Measurement in Education*, n. 2, p. 37-50, 1989a.

HALADYNA, T. M.; DOWNING S. M. Validity of a taxonomy of multiple-choice item writing rules. *Applied Measurement in Education*, n. 2, p. 51-78, 1989b.

HALADYNA, T. M.; DOWNING S. M.; RODRIGUEZ M. A review of multiple-choice item writing guidelines for classroom assessment. *Applied Measurement In Education*, v. 15, n. 3, p. 309-334, 2002.

HAZZAN, O.; ZAZKIS, R. Constructing knowledge by constructing examples for mathematical concepts. In: PEHKONEN, E. (Ed.). *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, 1997. v. 4. p. 299-306.

KEHOE, J. Writing multiple-choice test items. *ERIC/AE Digest*, 1995.

MARTON, F.; BOOTH, S. *Learning and awareness*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum, 1997.

MASON, J., PIMM, D. Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, n. 15, p. 227-289, 1984.

MASON, J. *What is exemplified in Mathematics classrooms?* 2005. (Não publicado). Disponível em:

<<http://mcs.open.ac.uk/jhm3/OtherPapers/Mason%202005%20What%20is%20Eg%27d.pdf>>. Acesso em: maio 2006.

MASON, J.; WATSON, A. Mathematical exercises: what is exercised, what is attended to, and how does the structure of the exercises influence these?. In: EARLI BIENNIAL CONFERENCE, 23rd-27th, August, Nicosia, Cyprus. *Invited presentation to SIG on variation and attention*. Nicosia, Cyprus, 2005.

NIEMI, D. Assessing conceptual understanding in Mathematics: representation, problem solution, justification, and explanation. *The Journal of Educational Research*, v. 89, n. 6, p. 351-363, 1996.

RISLAND-MICHENER, E. Understanding Mathematics. *Cognitive Science*, n. 2, p. 361-383, 1978.

ROWLAND, T.; THWAITES, A.; HUCKSTEP, P. Elementary teachers' Mathematics content knowledge and choice of examples. In: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION — CERME, 3th, March, 2003, Bellaria, Italy. Bellaria, 2003.

ROWLAND, T.; ZASLAVSKY, O. Pedagogical example-spaces. In: MINICONFERENCE ON EXEMPLIFICATION IN MATHEMATICS, June, 2005, Oxford University. *Notes*.

SANGUIN, C. *Questions spaces*. 2004. (Não publicado). Disponível em: <<http://mcs.open.ac.uk/jhm3/OtherPapers/ChrisSQuestionSpaces04.pdf>>. Acesso em: jul. 2006.

SIRECI, S. G.; WILEY, A.; KELLER, L. A. An empirical evaluation of selected multiple-choice item writing guidelines. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH-EASTERN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1998. *Paper*. p. 3-17.

VACC, N.; LOESCH, L.; LUBIK R. Writing multiple-choice test items. In: WALZ, G. R.; BLEUER, J. C. (Ed.). *Assessment issues and challenges for de millennium*. Greensboro, NC: CAPS Publications, 2001. p. 215-222.

WATSON, A.; MASON, J. extending example spaces as a learning/teaching strategy in Mathematics. In: COCKBURN, A.; NARDI, E. (Ed.) *Proceedings of PME 26, University of East Anglia*, 2002. v. 4. p. 377-385.

WATSON, A.; MASON, J. *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

WATSON, A.; SHIPMAN, S. Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, n. 69, p. 97-109, 2008.

ZASLAVSKY, O.; RON G. Students' understanding of the role of counter-examples. In: OLIVIER, A.; NEWSTEAD, K. (Ed.). *Proceedings of PME22*. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch, 1998. v. 4. p. 225-232.

ZASLAVSKY, O. Open-ended tasks as a trigger for Mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, v. 15, n. 3, p. 15-20, 1995.

ZAZKIS, R. From Arithmetic to Algebra via big numbers. In: CHICK, H.; STACEY, K.; VINCENT, J.; VINCENT, J. (Ed.). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: the future of the teaching and learning of Algebra*. Melbourne, Australia: University of Melbourne, 2001. p. 676-681.

ZODIK, I.; ZASLAVSKY, O. Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply? In: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION — CERME —, 5th., 2007, Larnaka, Cyprus. *Paper*. p. 2024-2033.

