ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 17, n. 31 – jan/jun – 2009

Equação e seus multisignificados[1]: potencialidades para a construção do conhecimento matemático

*Alessandro Jacques Ribeiro**

*Silvia Dias Alcântara Machado***

Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações.
GARBI (2007)

Resumo: Este artigo tem por objetivo apresentar, analisar e caracterizar os diferentes significados que podem ser atribuídos à equação no ensino e na aprendizagem de Matemática. Fundamentado na tese de doutoramento de um dos autores, este trabalho discute alguns resultados de pesquisas na área da Educação Algébrica, no que se refere à significação da noção de equação. Em seguida, analisa como livros didáticos apresentam a idéia de equação, passando a indicar as recomendações feitas nos PCN, no que se refere à importância do trabalho com atividades que envolvam diferentes perspectivas e formas de conceber a Álgebra. Logo após, apresenta os *multisignificados de equação*, discutindo e analisando as suas potencialidades para a construção do conhecimento matemático na formação de professores.

Palavras-chave: *multisignificados de equação;* Educação Algébrica; equação; formação de professores; ensino e aprendizagem de Álgebra.

---

[1] Este termo, cunhado pelo primeiro autor deste texto em sua tese de doutorado (RIBEIRO, 2007), será aqui adotado com esta forma.

* Doutor em Educação Matemática pela PUC/SP. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo. E-mail: alessandro.ribeiro@uniban.br.

** Doutora em Matemática pela PUC/SP. Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). E-mail: silviaam@pucsp.br.

Equation and its multimeanings: potentialities to the construction of mathematical knowledge

Abstract: This paper aims to introduce, analyze, and characterize different meanings that can be given to equation in Mathematics teaching and learning. Based on one of the authors doctorate thesis, this work brings to discussion some research results in Algebraic Education field, about the process of giving meaning to the notion of equation. Following this discussion, the authors analyze how textbooks present equation idea, and indicate *PCN´s* recommendation about the importance of working with activities based on different perspectives and shapes to conceive Algebra. At last, the authors present the *multimeanings of equation*, discussing and analyzing their potentialities in the construction of mathematical knowledge during Teacher Training Courses.

Key words: *multimeanings of equations;* Algebraic Education; equation; teacher's education; teaching and learning of Algebra

Introdução

Este artigo apresenta, analisa e caracteriza os significados atribuídos à equação no ensino de matemática. As reflexões aqui apresentadas tiveram sua origem no desenvolvimento da pesquisa de doutorado de um dos autores, Alessandro Ribeiro[2], e estão naturalmente embasadas nesse trabalho.

Iniciaremos apresentando alguns resultados de pesquisa em Educação Matemática que nos levaram a investigar a existência de outros possíveis significados atribuídos à equação.

Em seguida, apresentaremos as concepções de equação evidenciadas em livros didáticos de Matemática, de diferentes épocas e níveis de ensino, com o propósito de observar como a noção de equação é tratada nesses livros.

---

[2] RIBEIRO, A. J. *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática*: contribuições de um estudo epistemológico. 2007.

Analisaremos ainda os Parâmetros Curriculares Nacionais, com o intuito de verificar quais as orientações que esses documentos trazem no tocante à abordagem dessa noção na Educação Básica.

Finalizaremos apresentando a caracterização dos significados atribuídos à equação, conforme consta em Ribeiro (2007), indicando as possibilidades de discutir esses diferentes significados e o potencial dessa abordagem para a formação do professor de Matemática.

Analisando pesquisas sobre o tema

Existem diversas pesquisas em Educação Algébrica, particularmente sobre equações, que tratam da noção de equação sob diferentes pontos de vista, tais como: sobre as dificuldades no equacionamento de problemas, Almeida (2006); sobre esse objeto matemático ser ou não ser um "objeto do saber matemático", Chevallard[3] (1991); sobre dificuldades específicas na resolução de alguns tipos de equação, Ribeiro (2001).

A seguir, apresentaremos algumas pesquisas que acreditamos terem preocupação semelhante à nossa, no que se refere à concepção de equação de alunos e professores.

Kieran (1992) destaca a necessidade de não permitir que os alunos passem muito tempo entendendo e concebendo as expressões algébricas e equações como um amontoado de letras e símbolos sobre os quais se opera somente com números. A autora levanta a questão da importância de propiciar aos alunos situações em que eles percebam a possibilidade de entender essas entidades – expressões algébricas e equações – como objetos sobre os quais recaem propriedades e com os quais se podem efetuar diversas outras operações, além de somar, subtrair, dividir ou multiplicar.

Uma pesquisa que, por expressar a falta de ênfase no ensino, articula-se com a de Kieran e busca uma forma de possibilitar que o aluno entenda uma equação independentemente das manipulações que

---

[3] Objeto do saber matemático, segundo Chevallard, "é aquele que é considerado útil ao sistema didático pelos agentes do sistema de ensino". Para Chevallard, a noção de **equação** é **paramatemática**. (1991, p. 49-50).

se podem realizar nelas é a de Costa (2007). O autor entrevistou seis professores de matemática do Ensino Médio, visando investigar como esses professores diziam abordar em sala de aula problemas cujo equacionamento recaía em uma equação diofantina linear com duas incógnitas[4]. Observou que todos indicaram como melhor abordagem a da tentativa e erro. Alguns sugeriram que um simples cálculo mental seria suficiente e outros, embora equacionassem o problema por meio da equação adequada, com duas incógnitas, disseram que não dava para usá-las, pois era necessário obter mais uma equação para a resolução. Somente um dos professores admitiu que o fato de haver uma única equação linear sugeria haver mais de uma solução. Esses resultados levaram Costa a concluir que nenhum dos professores entrevistados deu indícios de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimentos das propriedades da equação linear com duas incógnitas para verificar se ela tinha solução, e quais eram elas.

Outra pesquisa interessante, que faz parte do presente cenário, é a de Dreyfus e Hoch (2004), que discutem uma abordagem estrutural para as equações. No trabalho desenvolvido com alunos de idade equivalente aos alunos do nosso Ensino Médio, os autores solicitaram que os alunos falassem o que pensavam sobre equação. Dentre os resultados dessa pesquisa, o que mais nos interessou foi a constatação dos autores sobre a pouca capacidade daqueles alunos em reconhecer a estrutura interna de uma equação, caracterizando a idéia de equação, na maioria das vezes, como um processo de resolução, isto é, relacionando equação com o processo de sua resolução.

Nesse sentido, observamos semelhanças entre os resultados dos autores acima citados e os identificados por Lima (2007). Em sua pesquisa, esta autora investigou os significados atribuídos por alunos de Ensino Médio à equação e aos seus métodos de resolução. A partir de questionários e entrevistas em que eram contempladas equações algébricas de 1º e 2º graus, a autora pôde constatar que os alunos investigados atribuem o significado de equação a uma “conta” a ser realizada, para a qual o sinal de igual assume um caráter unicamente

[4] Equação diofantina linear: $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n = b$ com x_i e a_i números inteiros.

operacional. Constatou ainda que os alunos tiveram dificuldades para responder a questão: “O que é uma equação?”.

Com isso, levantamos aqui questionamentos que serão discutidos posteriormente, quando da apresentação dos significados atribuídos à equação. No momento, esses questionamentos são: Os alunos têm dificuldade em explicar o que é uma equação, pelo fato de não haver uma resposta adequada para tal questão? Não encontramos resposta para tal questão, justamente pelo fato de não termos como “definir” equação? Nesse ponto vale chamar atenção para Chevallard (1991), no que se refere ao fato de a equação não ser um *objeto do saber matemático*, como já discutido nesta secção.

Assim, percebemos que a noção de equação é entendida como a sua própria resolução e, em grande parte das vezes, confundida com ela. Alunos e professores atribuem uma importância desproporcional aos aspectos procedimentais e técnicos na busca pela solução das equações.

Essa constatação sugere o desconhecimento do significado etimológico da palavra “equação” que Garbi (2007) afirma vir da mesma raiz latina que produziu as palavras: “igual” e “igualdade”, ou seja, uma igualdade que apresenta correlações, tão bem explicada pelo autor: “[...] a Ciência, cuja essência é o estabelecimento de correlações entre fatos, conceitos e idéias, está sempre descobrindo equivalências entre associações de entes e utiliza as equações como linguagem, forma ou veículo para expressar as correlações.” (GARBI, 2007, p. 1-2).

O que mostram os livros didáticos e os PCN

Passamos agora a apresentar e analisar as idéias sobre equação presentes em livros didáticos nacionais e internacionais. Utilizamos como critério de escolha dos livros o fato de eles terem sido utilizados como referência no início do século XIX em escolas brasileiras; serem referência de formalismo em Álgebra; terem sido indicados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação, no ano de 2005.

Nossa preocupação na análise dessas obras está na identificação e na compreensão de como equação é concebida e apresentada por seus autores; procuramos observar de que forma os significados são, implícita ou explicitamente, atribuídos a essa noção .

A primeira obra investigada foi *Éleménts d´algèbre*, de H. Bos, publicada em 1893, em francês, e adotada pelo Colégio São Bento, em São Paulo. Após uma longa discussão sobre operações algébricas, ela apresenta as expressões algébricas, para, então, trazer, no capítulo sobre equações de 1º grau, a seguinte definição: "Dá-se o nome de equação a uma igualdade que somente ocorre para valores particulares atribuídos a algumas letras que aí entram, e que pode servir assim para determinar esses valores." (BOS, 1893, p. 113).

Essa definição utilizada por Bos explicita uma concepção de equação como igualdade, sendo enfatizado o processo de sua resolução, o que induz o aluno a confundir equação com sua própria resolução.

Outra obra que consideramos relevante para a presente discussão é *Éléments d´algèbre*, de M. Bourdon. Essa obra, datada de 1897, traz em seu bojo uma vasta discussão sobre equações que vai desde as noções preliminares até a teoria das equações.

No capítulo sobre as noções preliminares de equação, o autor apresenta a seguinte idéia para esse termo: "[...] escrevemos algebricamente as relações que o enunciado da questão estabelece entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas. Chega-se assim a uma expressão de duas quantidades iguais, que é chamada de equação." (BOURDON, 1897, p. 45).

Observamos que, nesta definição, a concepção de equação já é assumida como um recurso para resolver problemas, ou seja, para equacioná-los.

As duas obras citadas são da mesma época, final do século XIX, e foram escritas com a intenção de orientar candidatos ao ensino universitário francês. No entanto, percebe-se nitidamente a diferença na abordagem de equações algébricas: uma imprime uma concepção de equação associada a sua resolução e a outra enfatiza a estratégia de resolução dos problemas via equações.

Na obra de 1991, *Álgebra, volume 1,* do matemático alemão B. L. van der Waerden, observamos que, no capítulo introdutório, são apresentados conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra e que serão discutidos ao longo de sua obra; porém, em momento algum ele traz alguma definição ou alguma idéia do que entende por equação. Entretanto, o autor reporta-se ao termo "equação" da seguinte forma: "a solução u de uma equação a = b + u, para a > b é designada por a – b." (WAERDEN, 1991, p. 5).

Em seguida, analisamos o livro didático de Bento de Jesus Caraça, de 1954, *Lições de álgebra e análise, volume 2*, em que ele discute a idéia de equação no capítulo sobre noção de função. Caraça discute esta definição por meio de uma expressão analítica, apresentando: "[...] Do mesmo modo, a equação 2x+3y-1=0, onde x é a mesma variável, faz corresponder a cada x_i um único $y_i = \frac{1-2x_i}{3}$ e, portanto, esta equação define também uma função y(x)." (CARAÇA, 1954, p. 58).

Ele continua a discussão ao longo do capítulo, enfatizando o fato de que a equação é uma das formas de definir uma função – a definição analítica. Ele chama atenção, ainda, assim como Rogalski (2001) também o faz, para o fato de que uma mesma equação pode definir analiticamente duas funções, como, por exemplo: $y - x^2 = 0$ define as funções $y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$, e discute:

> Quando as funções são definidas por equações, diz-se que as equações definem uma ou mais funções (conforme os casos) funções implícitas de uma variável na outra (no caso duas funções implícitas x(y)); quando se resolve a equação, diz-se que se explicita a função ou funções por ela definidas. (CARAÇA, 1954, p. 59).

Ao analisar a obra *Élements de mathématique* – Algèbre I, de Nicolas Bourbaki, de 1970, encontramos a seguinte definição para equação linear:

> Seja E, F dois A-módulos (A um anel). Toda equação da forma u(x) = y_0, onde u: E $\rightarrow$ F é uma aplicação linear dada, y_0 um elemento dado de F e onde a incógnita x toma seus valores em E, chama-se equação linear; [...] Todo elemento $x_0 \in$ E tal que u(x_0) = y_0 é chamado solução da equação linear u(x) = y_0.. (BOURBAKI, 1970, p. 48).

A. G. Tsipkin, em sua obra *Manual de matemáticas para la enseñanza media*, de 1985, destinada às escolas de Ensino Médio e aos centros de formação de professores em nível médio, apresenta assuntos da Matemática da escola média, mas também idéias imprescindíveis para uma melhor compreensão dos principais fundamentos da Matemática, mesmo aqueles que não fazem parte do currículo do Ensino Médio, como, por exemplo, o Teorema Fundamental da Álgebra e a Geometria de Hilbert, dentre outros.

Em seu manual, Tsipkin destaca que em Álgebra se estudam dois tipos de igualdades, as identidades e as equações. Assim, julgamos importante apresentar aqui o que é considerado por ela como identidade, uma vez que a autora se reporta a este termo quando fala em resolver uma equação: "identidade é uma igualdade que vale para todos os valores (admissíveis) para as letras que se encontram nela." (TSIPKIN, 1985, p. 148). Sobre a noção de equação, traz a seguinte definição:

> Equação é uma igualdade que se completa somente para certos valores das letras que se encontram nela. As letras que entram na equação, segundo a condição do problema, podem não ser equivalentes: umas podem adquirir todos os valores admissíveis (são os chamados parâmetros ou coeficientes da equação [...]); outras, cujos valores são necessários encontrar, são as chamadas incógnitas [...]. Em sua forma geral, a equação pode ser escrita como segue: F $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. [...] O valor das incógnitas que convertem a equação em identidade chama-se solução da equação. Resolver uma equação significa encontrar o conjunto de suas soluções ou demonstrar que as mesmas não existem. (TSIPKIN, 1985, p. 148-149).

A seguir, apresentamos algumas definições e considerações sobre equação encontradas em livros didáticos brasileiros. O primeiro deles é *Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª série*, de José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr., de 2000. A obra expõe a idéia de equação na unidade "Estudando as equações", que se inicia com uma discussão sobre sentenças matemáticas e igualdade, explicando e dando exemplos de cada um desses termos. Em seguida, apresenta, no item "Equação", uma resposta para a questão: "O que é uma equação?": "Toda sentença matemática expressa por uma igualdade na qual exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos dessa sentença, é denominada equação. Cada letra que representa um número desconhecido chama-se incógnita." (GIOVANNI; GIOVANNI Jr., 2000, p. 151).

Outro livro didático escolhido foi *Matemática em atividades, 6ª série*, de Scipione di Pierro Netto e Elisabeth Soares, de 2002. Nesse livro a idéia de equação é discutida no capitulo 3, "Equações, sistemas de equações e inequações". Os autores recorrem à idéia de "sentenças matemáticas" para discutir equação, que aparece, especificamente, no item "Um tipo especial de sentença matemática: a equação". Vejamos:

> Uma sentença é um conjunto de palavras que exprimem um pensamento com sentido completo. [...] São sentenças matemáticas aquelas que podem ser escritas utilizando-se da linguagem matemática. [...] Equação é uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. (DI PIERRO NETTO; SOARES, 2002, p. 86-87).

> Na obra de 2002, *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*, Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis trazem a idéia de equação no capítulo "Equações", acompanhada da resolução, no item "Resolvendo equações":

> A álgebra nos proporciona um novo recurso para resolver certos problemas: representamos o número desconhecido por uma letra e traduzimos o enunciado do problema, obtendo uma sentença chamada equação. [...] Equações são igualdades, ou seja, nelas aparece o sinal de =. O número desconhecido representado pela letra é chamado incógnita. Ao resolver a equação, estamos procurando o número desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. (IMENES; LELLIS, 2002, p. 230).

Um outro livro didático analisado é *Educação Matemática: 6ª série*, de Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo, publicado em 2002. Essa obra traz a idéia de equação no módulo "Equações", em uma seção intitulada "É preciso saber":Em Matemática, dizemos que equação é uma sentença aberta, porque nela há valores que não são conhecidos, que expressa uma igualdade. [...] O valor de x que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira é chamado **raiz da equação**. (PIRES; CURI; PIETROPAOLO, 2002, p. 211, grifo dos autores).

Partindo das idéias discutidas nas obras apresentadas e de suas caracterizações, levantamos algumas considerações importantes, no que se refere aos significados atribuídos pelos autores à noção de equação. Um ponto de convergência que percebemos entre as obras analisadas refere-se ao fato de que muitas delas, ao apresentarem a noção de equação, fazem-no remetendo à **idéia de igualdade entre valores**, como vimos em Bos; Tsipkin; Di Pierro Netto e Soares; Giovanni e Giovanni Jr; Imenes e Lellis; e Pires, Cury e Pietropaolo.

Num outro caminho, observamos que, nas obras de Bourdon e Imenes e Lellis, os autores remetem a noção de equação à idéia de **igualdade entre quantidades, normalmente relacionando-as com problemas.**

Ampliando essa discussão, fundamentando-nos no estudo epistemológico feito em Ribeiro (2007), levantamos que:

- Bourdon e Imenes e Lellis consideram a **igualdade entre quantidades**, relacionando-as com problemas. Assim, parecem aproximar-se da maneira como **os babilônios e os egípcios** concebiam equação, ou seja, uma idéia ligada à igualdade entre quantidades de um determinado problema.
- Bos; Tspikin; Di Pierro Neto e Soares; Giovanni e Giovanni Jr.; e Pires, Curi e Pietropaolo consideram, em suas apresentações, a noção de equação diretamente ligada à idéia de **igualdade entre valores**, porém de forma diferente daqueles apresentados anteriormente, pois **não discutem a questão de quantidades nem de problemas**. Nesse sentido, parecem aproximar-se mais da maneira como os **árabes e os hindus**, e mesmo os **europeus renascentistas,** concebiam equação, ou seja, uma idéia que tem sentido por si própria e que considera a questão da igualdade entre valores, e sobre a qual se podem levar a cabo diversos tipos de manipulações e operações.

- Caraça e Bourbaki parecem conceber equação de maneira semelhante à dos **europeus,** como Descartes, Abel e Galois, os quais consideravam a **equação por si própria** e operavam sobre ela também de forma a considerar sua própria estrutura. Nesse caso, uma diferença significativa entre esses autores e os apresentados no tópico anterior refere-se ao **grande apelo conjuntista** que emana das caracterizações destes para a noção de equação.

Com isso, podemos perceber que, com esta perspectiva de análise, podemos observar outras formas de conceber equação, além daquela encontrada basicamente nas pesquisas apresentadas, ou seja, equação interpretada somente como sua própria resolução, como um conjunto de técnicas e procedimentos mecânicos que podem levar à sua solução, mas que restringem significativamente a forma como ela pode ser concebida.

Nossas preocupações em possibilitar a alunos e professores diferentes formas de conceber equação – diferentes significados para essa noção – são ratificadas pelas orientações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos Ensinos Fundamental e Médio. Vejamos a seguir os que esses documentos trazem em seu bojo no tocante a álgebra e/ou equações.

Os PCN do Ensino Fundamental enfatizam a importância que tem, para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, o trabalho com atividades que envolvam diferentes perspectivas e formas de conceber a álgebra. Exemplificam essas situações na direção de trabalhar a álgebra como

> "aritmética generalizada", "funcional", "equações" e "estrutural", segundo se considerem as letras respectivamente como: "generalizações do modelo aritmético", "variáveis para expressar relações e funções", "incógnitas", "símbolos abstratos". (BRASIL, 1998, p. 116).

Desse modo, pode-se perceber que as orientações caminham no sentido de que se trabalhe com a álgebra de diferentes formas e com diferentes abordagens. É recomendado que sejam utilizados problemas "que lhes permitam [aos alunos] dar significado à linguagem e às idéias matemáticas." (BRASIL, 1998, p. 84). Indicam ainda que:

> No trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da "sintaxe" (regras de resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 84).

Não obstante as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF), há também aquelas contempladas nos PCNEM, evidenciando a importância da Matemática nesse momento da vida escolar, por:

> um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental [...] Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade transcende o âmbito da Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação [...] No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional [...] Contudo, a Matemática do Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais especificas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p. 40-41).

Observamos, assim, que os documentos oficiais com as diretrizes para o ensino de Matemática conduzem-nos a refletir sobre a necessidade de trabalhar, de discutir a Matemática, no nosso caso, mais especificamente a álgebra, levando em conta as diferentes significações e utilizações de suas idéias para a formação acadêmico-cientifico-cultural de nossos alunos.

Com isso, após a construção desse cenário, que procurou **apresentar, analisar e caracterizar os significados atribuídos à equação no ensino de matemática** e sua relevância para o objetivo do presente artigo, passamos, a seguir, aos resultados encontrados em Ribeiro (2007), onde são apresentados os **multisignificados de equação**, os quais julgamos necessário serem contemplados no ensino e na aprendizagem de Matemática.

Os multisignificados de equação

Os diferentes significados de equação, por nós denominados de multisignificados de equação, apresentados neste artigo foram concebidos e discutidos no trabalho de doutoramento de Ribeiro (2007). A intenção, aqui, é trazê-los para discussão no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática, enfatizando suas potencialidades na formação de professores, no que se refere à construção desse importante saber matemático.

A percepção da existência de mais de um significado para equação levou-nos a desenvolver um estudo epistemológico e didático da noção de equação. Os diferentes significados identificados serão aqui apresentados, categorizados e exemplificados, procurando respeitar a ordenação histórica em que foram aparecendo e sendo utilizados na resolução de problemas matemáticos.

A elaboração das categorias fundamentou-se no estudo epistemológico e didático referido. Contudo, há que citar a influência do trabalho "Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar", de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), para a constituição da nomenclatura utilizada.

A seguir, os multisignificados de equação:

1. Intuitivo-pragmático: a noção de equação é concebida como intuitiva, ligada à idéia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, os quais são originários de situações do dia-a-dia. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados:

- nos babilônios e nos egípcios: problemas de origem prática, envolvendo questões da agricultura, por exemplo;
- nos livros didáticos de Bourdon (1897), Imenes e Lellis (2002), dentre outros.

2. Dedutivo-geométrico: a noção de equação é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas, com intersecções de curvas. Situações que caracterizam esse significado podem ser encontradas:
    - nos gregos: utilização do método das proporções e o da aplicação de áreas. O método das proporções permite que se construa um segmento de reta x dado por $a : b = c : x$ ou por $a : x = x : b$, em que a, b, c são segmentos de reta dados. Em relação ao método da aplicação de áreas, pode-se recorrer aos Elementos de Euclides, utilizando-se a Proposição 44 do Livro I e as Proposições 28 e 29 do livro VI;

na geometria das curvas: Khayyam encontrou soluções geométricas para equações cúbicas, utilizando-se de intersecções de curvas, como a do círculo com a parábola, ou a intersecção da parábola e a hipérbole eqüilátera.

Vejamos um exemplo:

> Seja a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$. Então, se nessa equação substituirmos x^2 por 2py obtemos (lembrando que $x^3 = x^2 . x$.) o resultado $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Como a equação resultante representa uma hipérbole, e a igualdade $x^2 = 2py$ representa uma parábola, é claro que se traçarmos a parábola e a hipérbole sobre o mesmo conjunto de eixos e coordenadas, então as abscissas dos pontos de intersecção das curvas serão as raízes da equação cúbica. Evidentemente outros pares de secções cônicas podem ser usados de modo semelhante para resolver a cúbica. (BOYER, 1996, p. 165).

3. Estrutural-generalista: a noção de equação é concebida como uma noção estrutural definida e com propriedades e características próprias. A equação aqui é considerada por si própria, operando-se

sobre ela mesma na busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados em:

- al-Khwarizmi, embora as equações com que ele trabalhava fossem originárias de problemas de ordem prática, sua atenção estava focada para a determinação da resolução de qualquer equação quadrática. Estabeleceu duas operações fundamentais, al-jabr e al muqabalah, que reduziam as equações tratadas por ele a seis tipos, em sua forma canônica;
- Descartes: quando da utilização de seu método cartesiano, passou a tomar as próprias equações não mais como um meio de organização de fenômenos, mas como um campo de objetos que necessita de novos meios para sua organização: seria a resolução de equações utilizando-se a forma canônica;
- demais matemáticos a partir de Descartes, como Abel e Galois, que passaram a investigar a estrutura do processo de resolução das equações, visando encontrar, ou mostrar que não existia, um algoritmo capaz de resolver, por meio de radicais, as equações de grau superior a quatro.

4. Estrutural-conjuntista: a noção de equação é concebida dentro de uma perspectiva estrutural, que está diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos. Situações que caracterizam esse significado podem ser encontradas em:
   - Bourbaki (1970), Rogalski (2001) e Warusfel (1969), como podemos verificar nas citações a seguir:

> Seja f: E $\rightarrow$ F uma aplicação, e y um elemento de F. Dizemos que queremos resolver a **equação** ($e_{f,y}$), e notamos ($e_{f,y}$): **f(x) = y**, **quando estamos à procura** de um elemento x de E cuja imagem por f é y (podemos dizer que estamos à procura de um antecedente x de y). Dizemos que x é a **incógnita**, e que y é **dado**. Um elemento x de E que responde à questão é chamado de uma **solução** da equação. Quando o dado y está destinado a variar em F, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e_f) a equação f(x) = y; quando não há risco de ambigüidade, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e) uma tal equação. **Uma equação está assim ligada a uma aplicação f** e, portanto a dois conjuntos E e F: y é dado em F, e procuramos a

> incógnita x em E. (ROGALSKI, 2001, apud RIBEIRO, 2007, p. 93, grifos dos autores).
>
> Problema que consiste em procurar, em um conjunto E, os elementos x que satisfazem a uma relação R(x); x é a **incógnita**, e x_i, tal que $R(x_i)$, é um valor aceitável para a incógnita se $x_i \in E$. Sob essa forma, o problema é muito amplo, e, por exemplo, contém os conceitos de **inequação** numérica e de pesquisa do lugar geométrico. Também se reserva, geralmente, o nome de equação ao caso particular onde E = R, C, R^n ou C^n, e onde R(x) pode ser escrita na forma: f(x) = 0 [...] **Resolver** uma equação é encontrar todas as raízes dela e, se necessário, determinar a ordem de cada uma. (WARUSFEL, 1969 apud RIBEIRO, 2007, p. 95, grifos dos autores).

5. Processual-tecnicista: concebe equação como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, não enxergam a equação como um ente matemático sobre o qual as operações e as manipulações que são realizadas atendem a regras bem definidas. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados em pesquisas realizadas na área de Educação Matemática, que indicam a presença desse significado, como em:
   - Cotret (1997), que, em suas considerações, conclui que tanto professores como alunos não conseguem justificar de maneira satisfatória suas escolhas por essa ou aquela equação, quando do equacionamento de problemas, a não ser pela sua própria resolução, caracterizando o significado da equação em sua resolução, e não na expressão algébrica elaborada a partir do problema posto;
   - Dreyfus e Hoch (2004), os quais argumentam que alunos, ao serem questionados sobre o que é uma equação, utilizam-se de respostas que evidenciam sua compreensão dessa noção como a própria resolução da equação, a partir de procedimentos e técnicas utilizados para encontrar a sua solução.
6. Axiomático-postulacional: concebe equação como uma noção da Matemática que não precisa ser definida, uma idéia a partir da qual

outras idéias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Por essa concepção, a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de noção primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana. Um exemplo desse significado pode ser entendido, em nossa opinião, em:

- Chevallard, o qual, de forma indireta concebe equação com esse significado em seu trabalho sobre a transposição didática, ao referir-se às noções matemáticas e paramatemáticas, pois a noção de equação não pode ser concebida como uma noção matemática, por não ter uma “definição” única; aliás, nem precisa, pois, afinal, ela é uma noção paramatemática, servindo como um saber auxiliar quando se trabalha com alguma noção matemática propriamente dita.

Este último significado apresentado, o axiomático-postulacional, pode ser concebido como o primeiro deles a ser considerado no processo de ensino e aprendizagem de álgebra. Com ele, não precisamos nos preocupar em definir a noção de equação, podendo priorizar a discussão da idéia central da noção de equação – a idéia de igualdade –, permitindo-nos, inclusive, a integração desse significado com outros que foram apresentados anteriormente.

Conclusões e considerações finais

Discutimos agora algumas conclusões e orientações que julgamos pertinentes e acreditamos que sejam importantes para serem consideradas, principalmente na formação do professor de Matemática, lócus no qual entendemos que essa abordagem dos multisignificados seja relevante e apropriada.

Com essa maneira diversificada de poder conceber a noção de equação, colocamos em pauta a questão da necessidade de trabalhar esses multisignificados de maneira integrada, buscando relacionar um significado a outro.

Nessa perspectiva, nossa proposta é corroborada pela discussão apresentada por Duval (2003) em sua teoria dos registros de representação semiótica, uma vez que discutir a noção de equação, utilizando-se dos multisignificados que essa noção possui, permite a articulação de diferentes registros de representação semiótica, trabalho esse que Duval indica como necessário na compreensão da Matemática.

Uma vez que Duval destaca a importância de utilizar diferentes registros de representação semiótica para a construção do conhecimento matemático, podemos conjecturar que, articulando o intuitivo-pragmático com o dedutivo-geométrico, por exemplo, podemos propiciar situações em que a idéia de equação, ainda entendida como um problema entre igualdade de quantidades, possa ser interpretada e representada de diferentes formas gráficas, seja por meio de diagramas, de esquemas gráficos, ou mesmo, posteriormente, pela intersecção de duas curvas, gerando a solução para o problema apresentado.

Entendemos, assim como Duval, que conhecemos um objeto matemático quando somos capazes de interpretá-lo e concebê-lo por meio de diferentes registros de representação semiótica. Dessa forma, um trabalho articulado e a discussão dos multisignificados para a noção de equação apresentados neste trabalho podem ser um ponto de partida para um estudo mais significativo desse importante e fundamental conhecimento algébrico.

Pesquisas como esta tendem a trazer, para o ambiente da formação do professor de Matemática, um aprofundamento de temas da Educação Básica – por exemplo, de equações. Nesse sentido, tal proposta possibilita discussões epistemológicas e/ou didático-pedagógicas desses conhecimentos, sem tratar tais temas em caráter de revisão, de recordação. Enfim, isso pode possibilitar uma ampliação nas concepções que os professores têm dessas noções matemáticas.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, M.M.M. *Estratégias de generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

BOS, H. *Éléments d´Algèbre.* 5. ed. Paris: Hacchette, 1893.

BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique:* algèbre I. Paris: Hermann, 1970.

BOURDON, M. *Éléments d´algèbre.* Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1897.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://www.mec.gov.br/sef/sef/pcn.shtm>. Acesso em: mar. 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: ensino médio Brasília: MEC/SEMTEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: set. 2009.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARAÇA, B. de J. *Lições de álgebra e análise.* Lisboa: Sá da Costa, 1954. v. 2.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

COSTA, E. S. *As equações diofantinas lineares e o professor de matemática do Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

COTRET, R. S. *Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits*. SÉMINAIRE FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L´ALGÈBRE, 9., 1997. p. IX-23 – IX-37.

DREYFUS, T.; HOCH, M. *Equations:* a structural approach. *Proceedings of the 28th Conference of International Group for the PME*, 2004, p. 1-152 – 1-155.

DI PIERRO NETTO, S.; SOARES, E. *Matemática em atividades:* 6ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar ... a educação algébrica elementar. *Pro-Prosições* — Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1[10], p. 79-91, mar. 1993.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI, J. R. Jr. *Matemática pensar e descobrir:* novo – 6ª série. São Paulo: FTD, 2000.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. C. T. *Matemática para todos:* 6ª série, 3º ciclo. São Paulo: Scipione, 2002.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan, 1992.

LIMA, R. N. *Equações algébricas no Ensino Médio:* uma jornada por diferentes mundos da Matemática. 2007. 358 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PIRES, C. C.; CURI, E.; PIETROPAOLO, R. *Educação Matemática:* 6ª série. São Paulo: Atual, 2002.

RIBEIRO, A. J. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em álgebra, com base em dados do Saresp.* 2001. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RIBEIRO, A. J. *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática:* contribuições de um estudo epistemológico**.** 2007. 142 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ROGALSKI, M. *Carrefours entre analyse, algèbre et géomètrie.* Paris: Ellipses, 2001.

TSIPKIN, A. G. *Manual de matemáticas para la enseñanza media.* Moscou: Editorial Mir Moscú, 1985.

WAERDEN B. L. van der. *Álgebra.* Nova Iorque: Springer-Verlag, 1991. v. 1.