ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 17, n. 31 – jan/jun – 2009

Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série[1]

Cristiane Pessoa e Rute Borba[*]

Resumo: Neste estudo buscou-se levantar a compreensão de problemas combinatórios por alunos de 1ª a 4ª série e observar as estratégias por eles utilizadas. Aplicou-se um teste envolvendo diferentes tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*) e analisaram-se os acertos dos alunos, por série e por tipo de problema. Observaram-se avanços ao longo das séries, com melhores desempenhos nas séries posteriores. Os problemas de *arranjo* e *permutação*, nos quais a ordem dos elementos é importante, apresentaram percentuais baixos de acertos, provavelmente pela dificuldade em levantar todas as possibilidades. As estratégias variavam da total incompreensão das relações envolvidas, passando pela compreensão das relações sem esgotamento de possibilidades, até a identificação do produto que sintetizava a situação. Deve-se reconhecer que o *raciocínio combinatório* desenvolve-se dentro e fora da escola, sendo necessário que se enfatize a necessidade de os alunos levantarem de modo sistematizado todas as possibilidades de uma situação.

Palavras-chave: raciocínio combinatório; tipos de problemas; estratégias de resolução; Ensino Fundamental.

---

[1] No período de coleta de dados do presente estudo, a denominação vigente era *série*, mas atualmente, com a legislação que ampliou o Ensino Fundamental, passou-se a denominar *ano de escolarização*. Dessa forma, os alunos participantes do estudo encontravam-se, à época da sua realização, nas séries correspondentes do 2º ao 5º ano de escolarização básica.

[*] As autoras deste trabalho fazem parte do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório – GERAÇÃO – que é constituído por professora e alunas dos Programas de Pós-Graduação em Educação e em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, bem como por professoras da rede pública do Ensino de Pernambuco.

Projeto parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco – Facepe – Processo: APQ-1095-7.08/08.

Who dances with whom: the development of elementary school chidren's combinatorial reasoning

Abstract: In the present study it was observed how Elementary School pupils understand combinatorial problems and what strategies they use. Different types of problems (*Cartesian product*, *arrangements*, *permutations* and *combinations*) were present in the test applied and answers were analyzed according to age and problem type. Progress was observed through different school grades. *Arrangements* and *permutations* problems were the most difficult, probably because of the difficulty in exhausting all possibilities, in which the order of presentation of the elements is important. Strategies varied from total incomprehension of the relations involved, passing by relation comprehension without exhaustion of possibilities, until the identification of the product that summarizes the situation. It is necessary to recognize that *combinatorial reasoning* may develop also out of school, being necessary emphasis on the total exhaustion of possibilities whilst solving these types of problems in the classroom.

Keywords: combinatorial reasoning; problem types; solving strategies; Elementary School.

Introdução

A maioria dos problemas de *raciocínio combinatório* (*arranjo, combinação* e *permutação*) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo *produto cartesiano* é trabalhado explicitamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) recomendem que os diferentes tipos de problemas combinatórios sejam propostos aos alunos desde o início do processo de escolarização, sem ênfase na formalização, mas a partir de um trabalho com problemas que envolvam escolha e contagem. Apesar da falta de um trabalho mais sistematizado com a *combinatória* nos anos iniciais, acredita-se que é possível desenvolverem-se bem cedo compreensões sobre esses tipos de problemas.

Carraher, Carraher e Schliemann (1988) observaram em seus estudos que é possível que se adquira fluência em métodos informais de resolução de situações, sem necessariamente haver domínio de procedimentos escolares. Existem múltiplas lógicas corretas na resolução de cálculos, e a escola valoriza mais métodos formais; assim, pesquisas têm evidenciado que crianças e adolescentes utilizam métodos de resolução de problemas que, embora corretos, nem sempre são aproveitados pela escola.

Vergnaud (1986) defende que alguns conceitos se desenvolvem por um longo período de tempo, iniciando-se a partir dos 4 ou 5 anos e indo até os 15 ou 16 anos de idade, aproximadamente. Para esse autor, o saber forma-se, tanto nos aspectos práticos quanto nos aspectos teóricos, a partir de problemas a resolver, ou seja, de situações a dominar.

Dessa forma, é possível que o *raciocínio combinatório* se inicie antes do ensino formal e influencie-se por experiências tanto escolares quanto extra-escolares, nas quais esse raciocínio se faz necessário. Em situações cotidianas os alunos são estimulados ao levantamento e à escolha de possibilidades, bem como, no estudo de outras áreas da Matemática e de outras áreas do conhecimento, o *raciocínio combinatório* se faz presente e pode ser desenvolvido.

Portanto, neste estudo buscou-se verificar as estratégias usadas por alunos de 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental e o seu desempenho em relação à resolução dos diferentes tipos de problemas de *raciocínio combinatório*, antes da sua introdução formal na escola. A evidência de estratégias desenvolvidas antes da introdução formal poderá auxiliar na escolha de métodos a serem utilizados em sala de aula, quando conceitos relacionados ao *raciocínio combinatório* forem trabalhados.

O presente artigo relata parte de um estudo cujas análises poderão subsidiar a obtenção de respostas a diversas questões: Como conceitos envolvidos em problemas de *raciocínio combinatório* se formam? Quais são as idéias que os alunos têm sobre esses problemas? Quais métodos eles utilizam para solucioná-los? Como se dá o desenvolvimento da compreensão da *combinatória* ao longo dos anos? Há progressão nas estratégias com o passar dos anos de escolarização, mesmo não tendo sido esses conceitos alvo de ensino? Quais processos podem auxiliar na superação de dificuldades de resolução desses problemas ao longo das séries? O que pode ser utilizado no ensino desses conceitos, a partir das pistas de compreensão que os alunos nos oferecem com as suas estratégias? Algumas destas indagações serão enfocadas neste artigo, em específico as referentes ao levantamento de acertos e erros demonstrados e de estratégias utilizadas ao longo dos diferentes anos de escolarização. As questões relacionadas ao acompanhamento da formação do *raciocínio combinatório* ou à superação das dificuldades não serão objetos do presente estudo, uma vez que neste não foram diretamente observadas atividades escolares e extra-escolares nas quais esse tipo de raciocínio se faz presente.

Este trabalho tem, portanto, como objetivo analisar os desempenhos e as estratégias de alunos da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental na resolução de problemas combinatórios, em relação à série, aos números envolvidos (que geram maior ou menor número de possibilidades) e ao tipo de escola (pública ou particular). A investigação proposta envolveu diferentes tipos de problemas de raciocínio combinatório, na busca de uma amplitude na sondagem efetuada.

Estudos em estruturas multiplicativas têm investigado a compreensão de problemas que envolvem diferentes significados para as operações de multiplicação e divisão. Alguns têm olhado a compreensão da multiplicação como isomorfismo de medidas (PARK; NUNES, 2001); da divisão como distribuição equitativa (CORREA, 1995, apud NUNES; BRYANT, 1997); e da influência de significados da divisão no tratamento dado ao resto (BORBA; SELVA, 2006 e 2007). Outros estudos (BROWN, 1981; SCHLIEMANN, 1988; BRYANT; MORGADO; NUNES, 1992; PESSOA; SILVA; MATOS FILHO, 2005; PESSOA; MATOS FILHO, 2006a; SELVA et al., 2008) têm comparado o desempenho em problemas multiplicativos diversificados e têm apresentado como resultado a dificuldade dos sujeitos de diferentes idades em resolver problemas que envolvem o *raciocínio combinatório*, também um problema de estrutura multiplicativa.

Apesar do elevado número de estudos sobre estruturas multiplicativas, justifica-se a realização de pesquisas, como a atual, que investiguem mais aprofundadamente o *raciocínio combinatório*. É importante analisar como os alunos pensam sobre problemas desta área da Matemática, quais são as suas dificuldades, facilidades, estratégias de resolução e conhecimentos anteriores à instrução específica, e, especialmente, observar como se dá o desenvolvimento desse raciocínio ao longo dos anos de escolarização.

A formação de conceitos

Segundo Vergnaud (1986), os conceitos desenvolvidos por uma criança são inseridos em *campos conceituais.* Estes podem ser definidos como a interação complexa entre um conjunto interligado de conceitos e um conjunto de situações de utilização desses conceitos. O domínio progressivo das situações, por parte do indivíduo, exige o concurso de uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas que se apresentam estreitamente conectadas.

Vergnaud (1982) afirma que os conceitos envolvem um conjunto de situações-problema, que lhes dão significado; um conjunto de invariantes, que são as propriedades lógico-operatórias dos conceitos, as quais permitem generalização e transferência de aprendizagem; e, também, um conjunto de símbolos utilizados na representação dos conceitos. Esses aspectos de cada conceito formam um tripé (*situações, invariantes e representações*) e estão intimamente interligados a outros, isto é, um conceito não se desenvolve isoladamente, e sim, nas relações com outros conceitos, através dos diferentes tipos de problemas que utilizam vários contextos e simbolismos. Esta interligação entre conceitos ajudará no desenvolvimento da capacidade de relacionar situações aparentemente, ou não, semelhantes.

É necessário, portanto, que se ofereçam situações diversas para a resolução de problemas para que os alunos possam fazer reflexões, a fim de estabelecerem relações e, assim, construírem novas aprendizagens, ampliando suas redes de conhecimentos. Saberes vão, dessa forma, desenvolvendo-se, e relações entre conhecimentos podem tornar-se mais conscientes.

Nesse sentido, são importantes pesquisas que busquem perceber as concepções e as estratégias dos alunos para resolverem e compreenderem determinados problemas ou conceitos e para estabelecerem relações entre conceitos, mesmo que estes não tenham sido ainda introduzidos formalmente na escola. O presente estudo busca, assim, realizar uma sondagem do conhecimento de alunos, diante de problemas de *combinatória*, enfatizando, principalmente, o desenvolvimento, por parte dos alunos, de estratégias que não tenham sido ainda diretamente ensinadas na escola.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas

No campo conceitual das estruturas multiplicativas, assim como em todo campo conceitual, o aluno não constrói um conceito em torno de um problema, mas constrói um campo de conceitos que lhes dá sentido num campo de problemas. Para Vergnaud (1991), o campo conceitual das estruturas multiplicativas consiste em todas as situações que podem ser analisadas como proporções simples e múltiplas para as quais, normalmente, é preciso multiplicar e/ou dividir. Ele afirma, ainda, que diferentes conceitos matemáticos estão relacionados a essas situações. Entre eles estão as funções lineares e não-lineares, espaços vetoriais, análise dimensional, fração, razão, proporção, números racionais, além da multiplicação e divisão, dentre outros.

Os problemas multiplicativos são introduzidos de modo formal na escola, geralmente, a partir da 2ª ou 3ª série do Ensino Fundamental. Essas estruturas, normalmente, são apresentadas pelos livros didáticos e na sala de aula como uma continuidade (uma extensão) da adição, sendo a multiplicação, então, vista como uma adição de parcelas repetidas. Nunes e Bryant (1997) afirmam que, embora multiplicações possam ser resolvidas numericamente via adição de parcelas repetidas, as bases de raciocínio destas operações são diferenciadas. De acordo com Nunes e Bryant (1997), a criança deve aprender a entender um conjunto inteiramente novo de sentidos de número e um novo conjunto de invariáveis relacionadas à multiplicação e à divisão, e não mais à adição e à subtração, pois as situações de raciocínio multiplicativo não envolvem ações de unir e separar. É importante concordar com Nunes, Campos, Magina e Bryant (2001), ao afirmarem que é necessário reconhecer que a conexão entre multiplicação e adição não é conceitual, e, sim, está centrada no processo de cálculo, ou seja, o cálculo da multiplicação pode ser feito usando-se a adição repetida, porque a multiplicação é distributiva com relação à adição. Baseia-se este modo de pensar no pressuposto de que a idéia básica das estruturas aditivas é a *união/separação* de conjuntos, enquanto as estruturas multiplicativas baseiam-se na *correspondência um-a-muitos*. Se não houvesse essa diferenciação, poderia considerar-se a adição/subtração e a multiplicação/divisão como pertencentes ao mesmo campo conceitual, mas considera-se que pertencem a campos distintos, pois estas operações estão baseadas em relações distintas.

No sentido de atentar para diferenças conceituais que possam existir, mesmo quando procedimentos de cálculo são iguais, Vergnaud (1991) defende que a ampliação da perspectiva conceitual de uma criança exige a competência para a realização do *cálculo relacional* que a capacita para a escolha da operação adequada ao que o problema propõe e para a realização do *cálculo numérico* correspondente. Os grifos referem-se a uma diferenciação feita por Vergnaud, que distingue o *cálculo numérico* do *cálculo relacional,* como diferentes competências para a resolução de problemas e operações. Os *cálculos numéricos* são as resoluções numéricas propriamente ditas. Os *cálculos relacionais* envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos nas situações.

Existem complexidades diferentes, de acordo com o tipo de problema multiplicativo. Estes podem ser resolvidos via multiplicação ou divisão; ou pela combinação das duas, porém o que determina o grau de dificuldade pode não ser a aplicação de uma ou outra operação, mas a estrutura lógica do problema, ou seja, o seu *cálculo relacional*.

Os problemas de estruturas multiplicativas – de acordo com as relações e as situações que os caracterizam – foram classificados diferentemente por alguns autores, mas a maioria das categorias apontadas se inter-relacionam – as quais serão vistas a seguir.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que há muitos níveis diferentes de raciocínio multiplicativo e descrevem os seguintes tipos de problemas, que envolvem diferentes lógicas para a estrutura multiplicativa:

1. Correspondência um-a-muitos: são situações que envolvem a idéia de proporção, trabalhando com a ação de replicar. São apresentadas as seguintes formas de problemas:

1.1. Multiplicação

Exemplo: Um trem tem 5 vagões, cada vagão tem 6 janelas. Quantas janelas tem o trem?

1.2. Problema inverso de multiplicação

Exemplo: Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier à sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar?

1.3. Produto cartesiano

Exemplo: Rita vai viajar levando 3 saias e 4 blusas. Quantos trajes diferentes ela pode vestir, mudando suas saias e blusas?

2. Relação entre variáveis – co-variação: relaciona duas ou mais variáveis.

Exemplo: Meio quilo de açúcar custa R$ 0,80. Quanto custa um quilo?

3. Distribuição: há três valores a serem considerados: o total, o número de receptores e a cota (ou o tamanho da distribuição) a ser determinada.

Exemplo: Eu tenho 20 confeitos para distribuir para 5 crianças. Quantos confeitos cada uma receberá?

De modo semelhante, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) diferenciam quatro grupos de situações envolvendo problemas multiplicativos:

1. Comparativa: é estabelecida uma comparação entre as quantidades trabalhadas.

Exemplo: Rita tem R$ 15,00 e Marcelo tem o triplo dessa quantidade. Quanto tem Marcelo?

2. Proporcionalidade: envolve a idéia de proporção, comparando razões.

Exemplo: Um prédio tem 7 andares. Em cada andar tem 5 janelas. Quantas janelas há nesse prédio?

3. Configuração retangular: Associado à distribuição espacial.

Exemplo: Na sala de aula as carteiras estão organizadas em 5 filas e 6 colunas. Quantas carteiras há na sala?

4. Combinatória: Envolvem situações que consistem em escolher e agrupar os elementos de um conjunto, ou seja, relacionam-se à idéia do *raciocínio combinatório*.

Exemplo: Para a festa de São João da minha rua, temos 6 rapazes e 8 moças para dançar a quadrilha. Quantos pares diferentes posso formar, se todos os rapazes dançarem com todas as moças?

Todos esses problemas apresentados com multiplicação trazem uma situação correspondente envolvendo a divisão. Como exemplo, há o problema de *combinatória*: Para a festa de São João da minha escola, conseguiremos formar 48 pares, se todos os rapazes dançarem com todas as moças. Se são 6 rapazes, quantas são as moças?

Semelhantemente às classificações anteriormente apresentadas, Vergnaud (1983, 1991) descreve classes de problemas multiplicativos que envolvem relações ternárias e quaternárias.

1. Os problemas de **isomorfismo de medidas** envolvem uma relação quaternária entre quantidades; duas delas são medidas de um tipo e as outras duas são medidas de outro tipo ($a_1 \times b_2 = a_2 \times b_1$), envolvendo uma proporção direta simples entre esses dois espaços de medidas.

2. Os problemas de **produtos de medidas** envolvem uma relação ternária, ou seja, entre três variáveis, das quais uma quantidade é o produto das outras duas. O produto de medidas é uma estrutura que consiste na composição cartesiana de duas medidas para encontrar a terceira, como acontece com os problemas que envolvem volume, área e *combinatória*.

No Quadro 1 apresentam-se tipos de problemas propostos por Vergnaud (1983, 1991) e exemplos. Ali estão exemplificados casos de multiplicação e de divisão.

Quadro 1: Tipos de problemas de estruturas multiplicativas propostos por Vergnaud[2] (1983, 1991), com seus respectivos exemplos.

	Isomorfismo	Produto de medidas
Multiplicação	Tenho 3 caixas de chocolate. Em cada caixa há 12 chocolates. Quantos chocolates eu tenho?	Tenho 3 saias (verde, azul e amarela) e 2 blusas (branca e preta). Quantas combinações de roupas posso fazer, usando todas as blusas com todas as saias?
Divisão	Isomorfismo partição Paguei R$ 20,00 por 4 caixas de chocolate. Quanto custou cada caixa? Isomorfismo quotição Gabriel tem R$ 20,00 e quer comprar caixas de chocolate que custam R$ 5,00 cada uma. Quantas caixas ele pode comprar?	Com as saias e as blusas que eu tenho, posso fazer 6 combinações. Tenho 3 saias. Quantas são as blusas?

A presente pesquisa centrou-se nos problemas que Vergnaud (1983, 1991) denomina de *produto de medidas*, Nunes e Bryant (1997) denominam de *produto cartesiano* e os PCN (BRASIL, 1997) denominam de *combinatória*. As três classificações envolvem a idéia de *raciocínio combinatório*.

[2] Nos tipos de problemas multiplicativos, Vergnaud também trata do tipo Proporções Múltiplas, porém este não será tratado no presente trabalho.

O raciocínio combinatório

Definições e classificações dentro da combinatória

De acordo com Morgado et al. (1991), pode-se dizer que a *Análise Combinatória* é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Eles destacam dois tipos de problemas freqüentes em *Análise Combinatória*: (1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e (2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Para os autores supracitados, a primeira aprendizagem matemática da criança é contar os elementos de diferentes conjuntos, ou seja, enumerar esses elementos para determinar quantos são. A *combinatória*, como um tipo de contagem, exige que seja superada a simples idéia de enumeração de elementos de um conjunto, para passar à contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo como base o raciocínio multiplicativo.

Historicamente a *combinatória* pode ser conhecida como *a arte de contar.* Nessa perspectiva, Merayo (2001) afirma que a *análise combinatória* é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

A Matemática fornece algumas formas de solução que permitem resolver uma grande quantidade de problemas de *análise combinatória.* São eles: *combinações*, *arranjos* e *permutações*.

Arranjo, *permutação* e *combinação* são definidos da seguinte forma:

> Seja um conjunto de **m** elementos distintos. Recebem o nome de **arranjo** de ordem **n** desses **m** elementos, a todo grupo ordenado formado por **n** elementos tomados dos **m,** de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados (p. 236) [...] **Permutação** de **m** objetos distintos, qualquer agrupamento desses objetos que difere um do outro

> unicamente pela ordem de colocação de seus objetos (p. 241) [...] Seja um conjunto formado por **m** elementos distintos. Recebe o nome de **combinação** de ordem **n** desses **m** elementos, cada grupo formado por **n** elementos tomado dos **m**, tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem. (MERAYO, 2001, p. 269).

Portanto, baseado em classificações anteriores (VERGNAUD, 1983, 1991; NUNES; BRYANT, 1997; BRASIL, 1997) e em Merayo (2001), que não consideram em categorização única todos os tipos de problemas combinatórios, os problemas básicos trabalhados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio são, de acordo com classificação proposta por Pessoa e Borba (2007, 2008)[3]:

Produto cartesiano, produto de medidas ou combinatória

Ex.: Para a festa de São João da escola, há três meninos (Pedro, Gabriel e João) e quatro meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Permutação

Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

Arranjo

---

[3] Todos os problemas de combinatória podem ser resolvidos por meio do *princípio fundamental da contagem*, que é uma estratégia de cálculo que pode ser enunciada da seguinte forma: "Quando um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes, de tal forma que as possibilidades da primeira etapa é m e as possibilidades da segunda etapa é n, consideramos, então, que o número total de possibilidades do evento ocorrer é dado pelo produto $m*n$." (NERY; JAKUBOVIC, 1986). Este princípio também é válido para três ou mais etapas sucessivas.

Ex.: A semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Combinação

Ex.: Uma escola tem nove professores, dos quais cinco devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos de cinco professores podem-se formar?

Essas definições referem-se à contagem dos agrupamentos simples, ou seja, dos grupos em que não há repetição de nenhum elemento. É importante ter consciência de que há também os agrupamentos com repetição, nos quais há um acréscimo no número de agrupamentos simples, correspondente à contagem dos agrupamentos com repetição. As repetições nos *arranjos*, nas *permutações* e nas *combinações* significam que se pode tomar o mesmo elemento mais de uma vez na composição de um mesmo agrupamento.

Na opinião de Morgado et al. (1991), embora a *Análise Combinatória* disponha de técnicas gerais que permitam abordar certos tipos de problemas, a solução de um problema combinatório exige a compreensão plena da situação descrita, sendo esse um dos encantos desta parte da Matemática; e problemas fáceis de enunciar revelam-se, por vezes, difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade e compreensão para a sua solução. É necessário que se tenha a consciência de que o que vai ser contado influi na forma de contar.

Na escola, os alunos, sobretudo os do Ensino Médio, nível em que a maior parte desses tipos de problemas é trabalhada formalmente, podem errar na resolução de problemas de *raciocínio combinatório*, por seguirem pistas semânticas. Eles podem, muitas vezes orientados por palavras-chave, buscar descobrir qual tipo de fórmula deve ser usada para resolver o problema: *combinação*, *arranjo* ou *permutação*. Alunos de anos escolares anteriores não têm conhecimento dessas fórmulas e, portanto, não poderão recorrer a elas para solucionar os problemas.

Estudos que evidenciam dificuldades com os problemas combinatórios

Nesher (1988, apud NUNES; BRYANT, 1997) defende que o tipo de problema multiplicativo mais difícil para as crianças é o de *produto cartesiano,* um dos tipos de problema que envolvem *raciocínio combinatório*. Salienta-se que o produto cartesiano foi o único problema combinatório mencionado por esta autora. Ela aponta duas razões para essa complexidade: (1) o problema envolve dois conjuntos básicos mais um terceiro conjunto, o qual é identificado pela combinação de cada elemento em um conjunto básico com cada elemento do outro conjunto; (2) a correspondência um-a-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal. Cabe ao solucionador do problema descobrir que, para cada elemento do conjunto básico, há uma série de transformações referentes à quantidade do outro conjunto básico.

Diversos estudos empíricos têm evidenciado a dificuldade dos alunos na resolução de problemas de *raciocínio combinatório*, quando comparado com outros problemas multiplicativos. Serão apresentados e discutidos alguns destes a seguir.

Bryant, Morgado e Nunes (1992) realizaram uma pesquisa na qual 32 crianças entre 8 e 9 anos de idade resolveram dois problemas de *correspondência um-para-muitos simples* e outros dois problemas de *produto cartesiano.* O grupo foi dividido em dois subgrupos: o das crianças que dispunham de material manipulativo completo para a resolução dos problemas e o outro subgrupo, que tinha apenas parte do material manipulativo para resolver os problemas. Para as duas faixas etárias, os problemas de *produto cartesiano* apresentaram-se como mais difíceis, quando comparados com os de *correspondência um-para-muitos simples*, tanto para as crianças às quais foi oferecido material completo, quanto para as que receberam material não completo.

Pessoa, Silva e Matos Filho (2005) e Pessoa e Matos Filho (2006a) pesquisaram 153 alunos de 3ª e 5ª série do Ensino Fundamental, de escolas públicas e privadas, em suas habilidades para resolver problemas de estruturas multiplicativas. Foram aplicados 8 problemas multiplicativos envolvendo *produto cartesiano*, *relação um-a-muitos*, *divisão por cotição* e *divisão por partição*. Esses pesquisadores observaram que os alunos pesquisados ainda apresentavam dificuldades em resolver problemas multiplicativos. A pesquisa evidenciou que os alunos, tanto na 3ª quanto na 5ª série, demonstraram maior dificuldade na resolução dos problemas que envolviam o *produto cartesiano*.

Embora essas pesquisas evidenciem dificuldades com o *produto cartesiano*, quando comparado com outros problemas multiplicativos, faz-se necessário, também, investigar quais problemas de *combinatória* entre si são mais fáceis ou mais difíceis.

A seguir serão apresentados estudos que investigaram de forma mais específica os problemas multiplicativos de *combinatória*.

Inhelder e Piaget (1976) buscaram investigar a natureza da dificuldade em problemas de *análise combinatória*, mais especificamente os de *permutação*. Para eles, a estrutura combinatória constitui um dos modelos lógico-matemáticos que caracterizam a etapa das operações formais. A compreensão das operações combinatórias desenvolve-se através de estágios e, segundo esses autores, em torno dos 12 anos de idade, a criança é capaz de encontrar, através de um método sistemático, todas as *permutações* existentes entre os elementos de um conjunto. Os estágios piagetianos referentes ao desenvolvimento dos sujeitos em *permutação* são os seguintes (apud SCHLIEMANN, 1988, p. 93):

Estágio IA – a criança não consegue encontrar todas as *permutações* possíveis entre os elementos e tem dificuldade em compreender que os mesmos elementos podem ser arrumados de várias maneiras diferentes.

Estágio IB – pode encontrar, por ensaio e erro, as possíveis *permutações* entre os elementos, mas não tem certeza de que esgotou todas as possibilidades.

Estágio IIA – encontra todas as *permutações* por ensaio e erro (com combinações menores) e tem a consciência de que as esgotou, mas com combinações maiores não consegue resolver.

Estágio IIB – consegue generalizar para mais elementos a descoberta feita para as combinações com poucos elementos.

Estágio III – todas as possíveis *permutações* são geradas sem necessidade de intervenção.

Schliemann (1988) também realizou uma pesquisa sobre a compreensão da *combinatória* com problemas do tipo *permutação*, porém com participantes adultos. Trabalhou com 20 cambistas de jogo do bicho (com nível de escolaridade variando entre zero e 11 anos); 20 estudantes recém-aprovados no vestibular, que receberam instrução sobre a *análise combinatória* na escola; e 20 trabalhadores pertencentes ao mesmo grupo socioeconômico e com mesmo nível de escolaridade dos cambistas, mas com funções que não exigiam o uso da *combinatória*. O estudo objetivou avaliar como o uso de regras, fórmulas ou algoritmos contribui para a compreensão do sistema combinatório, buscando descobrir como a aprendizagem de procedimentos auxilia a aquisição de conhecimento conceitual. Os participantes de cada um dos três grupos resolveram dois problemas, nos quais era necessário encontrar todas as permutações possíveis entre os elementos.

Dentre outros resultados, Schliemann (1988) observou que (1) os estudantes tiveram um melhor desempenho e a diferença entre eles e os cambistas foi significativa; (2) comparando os cambistas com os outros adultos trabalhadores que apresentavam mesmo nível de escolaridade e socioeconômico (Grupo Controle – GC), os cambistas saíram-se significativamente melhor e (3), mesmo com desempenho mais baixo, alguns trabalhadores do grupo controle atingiram estágios mais altos de desempenho. Observou-se que a escolaridade – não necessariamente a formação específica em *combinatória* – foi o fator que mais influenciou positivamente o desempenho. A experiência profissional, como a dos cambistas, e outras experiências sociais – como a do grupo controle, cujos trabalhadores eventualmente praticavam o jogo do bicho, também se mostraram positivas ao desenvolvimento da compreensão de *permutações*. Este estudo evidencia, portanto, a importância de experiências escolares e extra-escolares na produção de conhecimento, de um modo geral, e, especificamente, relacionado ao *raciocínio combinatório.*

Um estudo que objetivou incluir a sondagem de conhecimento mais amplo de problemas combinatórios foi o de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), no qual foram avaliados os desempenhos de alunos em problemas de *seleção* (nos quais são selecionados *n* elementos dentre *m*), de *distribuição* (de *n* elementos em *m* células) e de *partição* (subdivisão de um conjunto de *n* elementos em *m* subconjuntos). Observaram-se erros de *enumeração não sistemática; uso incorreto de árvores de possibilidade; erros de ordem* (confundindo *combinações* com *arranjos*); *erros de repetição* (não repetindo elementos, quando possível, ou repetindo elementos, quando o caso não permitia); *confusão entre tipos de objetos* (considerando objetos idênticos como distintos ou objetos diferentes como se fossem idênticos); *confusão de tipo de célula* (tipo de subconjunto) em modelos de distribuição; e *incompreensão do tipo de partição requerida*. Os autores concluem haver necessidade de conhecimento por parte de professores da diferenciação entre esses tipos de problema e os respectivos erros que os alunos podem cometer. Salienta-se, porém, que neste estudo foram sondados conhecimentos referentes a *arranjos*, *permutações* e *combinações*, mas não estava inclusa a sondagem do conhecimento de *produtos cartesianos*.

Diferentes estudos foram desenvolvidos com o propósito de superar dificuldades dos alunos; um desses foi realizado por Esteves e Magina (2001), objetivando verificar e trabalhar com as pré-concepções de alunos de 8ª série do Ensino Fundamental sobre a *análise combinatória*. Foi aplicado um pré-teste com alunos de 8ª série (Grupo Experimental - GE) e de 2º ano do Ensino Médio (Grupo de Referência – GR). Construiu-se uma seqüência de ensino — planejada para ser desenvolvida em sete encontros de aproximadamente 1 hora — baseada nas pré-concepções dos alunos. Cada encontro correspondeu à resolução, em dupla, de uma ficha contendo diversas situações-problema de *combinatória*. Com o GR foi utilizada a abordagem comumente adotada no ensino atual. Depois da aplicação da seqüência, foi realizado o pós-teste.

As autoras chegaram à conclusão de que trabalhar *análise combinatória* a partir de resolução de problemas torna o seu ensino bem mais eficiente. Com relação aos erros dos alunos, destacaram a interpretação errônea do enunciado. Quanto ao uso de representações, constataram que nem sempre os alunos conseguem lançar mão de representações que dêem conta de expressar a situação-problema. Observaram, também, que, em algumas situações, a representação utilizada auxiliou e, em outras, gerou uma interpretação errônea, principalmente nos problemas em que o número de possibilidades a serem encontradas era grande.

Para que um trabalho eficiente seja realizado em sala de aula, torna-se necessário investigar concepções e conhecimentos que os professores têm de combinatória, seja em formação inicial, seja continuada. Nesse sentido, Miguel e Magina (2003) realizaram um estudo exploratório das estratégias de solução de problemas combinatórios (*permutação simples e com repetição*, *arranjo simples e com repetição* e *combinação*) com 12 alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática da PUC-SP, aplicando o mesmo questionário utilizado por Batanero, Navarro e Godino (1996). Dentre os resultados encontrados, as pesquisadoras destacam que, apesar de os participantes serem alunos universitários e do Curso de Licenciatura em Matemática, eles encontraram grande dificuldade em resolver os problemas propostos, embora estes envolvessem uma única operação combinatória. Além disso, as autoras afirmam que as estratégias estão relacionadas principalmente à listagem dos elementos, fixando o primeiro elemento e listando os demais, às vezes com sistematização, outras, não. Verificaram também que muitas vezes, quando o número de casos era elevado, não havia finalização na listagem de elementos. Em nenhum dos casos, mesmo quando o aluno teve instrução anterior, o diagrama de árvore foi usado. Portanto, mesmo no Ensino Superior, os alunos apresentam dificuldades em lidar com esses tipos de problemas.

Complementando estudos sobre a formação inicial de professores, outras investigações têm buscado observar como o ensino pode ser efetuado em sala de aula, numa visão de formação permanente de professores. Costa (2003) analisou instrumentos disponíveis para o ensino, por meio de *modelagem*, de *combinatória* no Ensino Fundamental. Os instrumentos avaliados foram os parâmetros nacionais, uma proposta estadual e duas coleções de livros didáticos. Observaram-se, também, os conhecimentos de professores de Ensino Fundamental e Médio sobre essa área da Matemática. Foram constatadas dificuldades no estabelecimento de procedimentos sistemáticos, na justificativa de respostas, no uso de representações adequadas e no reconhecimento da importância, ou não, da ordem de elementos na formação de agrupamentos.

Semelhantemente, a partir de um estudo de sondagem e intervenção, Pedrosa Filho (2008) investigou a aquisição e o desenvolvimento de noções de *raciocínio combinatório* por parte de crianças de 7 e 8 anos de idade. Foi criada uma seqüência de atividades fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, e na Teoria dos Registros de Representação, de Duval, partindo de situações concretas e seguindo os pressupostos de uma Engenharia Didática, como sugerido por Douady. Foi proposto um trabalho em duplas com dois tipos de atividades, para as quais foram confeccionados materiais: uma delas visava a determinação de combinações de roupas em modelos, valendo-se de peças com ímãs; e a outra, de possibilidades de caminhos, em um quadriculado, para chegar a um determinado destino, a partir de lançamentos de um objeto semelhante a uma moeda. Depois de aplicar as atividades a um grupo de alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, foi feita uma análise do comportamento das duplas, dos procedimentos e dos registros obtidos. Os resultados evidenciaram que o uso de material manipulável e o trabalho em duplas favoreceram não só o interesse, mas, também, o desenvolvimento de idéias de organização, leitura, contagem, visualização de resultados e, segundo o autor, dos primeiros passos na relação entre os campos aditivo e multiplicativo, fundamentais para o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Num estudo com faixa etária semelhante, mas com o propósito de aprofundar a análise das estratégias utilizadas por alunos, Moro e Soares (2006) descreveram níveis de *raciocínio combinatório* na resolução de problemas de *produto cartesiano*. Para tanto, propuseram quatro problemas para serem resolvidos por 50 alunos de escola pública, de 7 a 11 anos de idade. Foram observados níveis hierárquicos de elaboração do *raciocínio combinatório* que estavam relacionados à escolaridade dos participantes. Os alunos progrediram de *respostas alheias ao contexto do problema*, passando por *respostas contextualizadas, mas sem indício de combinação,* progredindo para *primeiras aproximações combinatórias* até a presença de *soluções combinatórias*. A maior sistematização nas estratégias de resolução foi apontada como o critério que possibilitou o desenvolvimento progressivo do *raciocínio combinatório*. As conclusões das autoras apontam na direção de iniciar-se formalmente o ensino do *produto cartesiano* desde os primeiros anos de escolarização básica.

Numa investigação com alunos de uma faixa etária mais elevada, Correia e Fernandes (2007) realizaram um estudo em Portugal com 27 alunos de uma turma de 9º ano, com o objetivo de avaliar o potencial das estratégias intuitivas de resolução de problemas de *combinatória.* Foi realizado um teste individual com problemas dos tipos *permutação simples, arranjo com repetição, arranjo simples e combinação simples.* Estes pesquisadores obtiveram como resultado que a maior porcentagem de respostas corretas (70%) deu-se nos problemas do tipo *arranjo com repetição*; nos *arranjos simples*, apresentaram 62% de acertos; 43% nas *permutações simples*; e 16% nas *combinações*. Eles afirmam, ainda, que, quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação, ocorre uma diminuição do número de respostas corretas.

Pelo conjunto de resultados apresentados nos estudos descritos, problemas de *raciocínio combinatório* – avaliados de forma isolada nos diferentes estudos – geram grande dificuldade para alunos de diferentes idades e níveis escolares distintos e até mesmo para alguns professores. Nesse sentido, faz-se necessário dar continuidade à investigação de como os alunos compreendem problemas de estruturas multiplicativas, especificamente no que se refere aos do tipo que envolve o *raciocínio combinatório*.

No presente estudo observou-se quais, dentre os problemas de *raciocínio combinatório* (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*), são os mais facilmente compreendidos, uma vez que os estudos anteriores centraram suas análises em *produtos cartesianos* ou em apenas um ou mais dos outros tipos de problemas *combinatórios* (*arranjos*, *permutações* ou *combinações*). Um dos aspectos inovadores é, portanto, o de incluir estes quatro tipos de problemas num instrumento único de sondagem.

Objetivo do presente estudo

Analisar as estratégias e os desempenhos de alunos da 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental na resolução dos diferentes tipos de problema de *raciocínio combinatório* (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) em relação à série, aos números envolvidos e ao tipo de escola.

Método do estudo

Participaram deste estudo 99 alunos da 1ª à 4ª série de duas escolas, uma particular e uma pública estadual de Pernambuco, com idades variando entre 6 e 12 anos. Esse número corresponde ao total de alunos presentes nas turmas no momento da realização da coleta.

Cada aluno resolveu, individualmente, uma ficha (ver Apêndice A) contendo oito problemas envolvendo o *raciocínio combinatório* (dois de cada tipo: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*). Os quatro primeiros problemas continham números que levavam a maior número de possibilidades na solução, e os quatro últimos envolviam menos possibilidades. Foi dito que os problemas poderiam ser resolvidos da forma que quisessem e considerassem melhor: por desenhos, tabelas, gráficos, contas ou quaisquer outras formas.

A análise que segue foi baseada nas estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem esses problemas. Além disso, analisaram-se os acertos e erros dos alunos por série, por tipo de problema, por números envolvidos e por tipo de escola.

Análise dos resultados

Na Tabela 1 pode-se observar o percentual de acertos por tipo de problema em cada uma das séries e tipo de escola (pública e particular).

Notou-se, de modo geral, que os alunos das séries mais avançadas apresentaram um melhor desempenho que os alunos das séries iniciais. Verificou-se, assim, que houve progressos no que se refere à gradação por série, ou seja, na primeira série, nenhum aluno, quer da escola particular ou da escola pública, apresentou acerto; entretanto, com o avançar das séries, os alunos passaram a apresentar maiores acertos.

O percentual médio de acertos na 1ª série foi zero, ou seja, nenhum aluno foi capaz de completar a solução das situações propostas, e os percentuais foram gradativamente aumentando, chegando a 27% na 4ª série da escola particular, percentual que pode aparentar ser muito baixo, mas a análise que segue dará evidências de que um percentual maior de crianças compreendeu o que se estava buscando, mas não dispunham, ainda, de mecanismos mais sistemáticos de resolução que lhes possibilitasse chegar às respostas finais precisas.

Tabela 1: Percentual de acertos por tipos de problemas, tipo de escola e série

Tipo de problema / questão	P. C.. (Q.1)	P. (Q.2)	A. (Q.3)	C. (Q.4)	A. (Q.5)	P. C. (Q.6)	C. (Q.7)	P. (Q.8)	Percentual médio em cada série/ escola
1ª série pública	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1ª série Particular	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2ª série Pública	0	0	0	0	10	80	30	10	16
2ª série Particular	25	0	6	0	12	31	56	6	17
3ª série Pública	0	0	0	0	5	9	18	5	5
3ª série Particular	89	0	5	0	22	33	22	17	23
4ª série Pública	0	0	0	0	0	80	40	20	17
4ª série Particular	67	0	17	0	50	50	34	0	27
Percentual médio por questão	23	0	3	0	12	35	25	7	

Obs. 1: Q. = questão

Obs. 2: P. C. = *Produto Cartesiano*; P. = *Permutação*; A. = *Arranjo*; C. = *Combinação*

Obs. 3: Os primeiros problemas de cada tipo resultavam em maior quantidade de possibilidades, e o segundo bloco de problemas envolvia menor número de possibilidades; portanto, nesta tabela foram separados estes tipos de problemas.

A melhoria em desempenho pode, em parte, ser creditada ao ensino nas escolas, pois, a partir da 2ª, 3ª e 4ª séries, problemas de *raciocínio combinatório* são, em geral, trabalhados, na maioria das vezes, não de forma explícita, com plena consciência de que diferentes problemas *combinatórios* estão sendo trabalhados. Salienta-se, portanto, que alguns tipos de *raciocínio combinatório,* como os problemas de *arranjos*, *combinações* e *permutações*, não são explicitamente trabalhados nestas séries, e, mesmo assim, alguns alunos foram bem sucedidos em suas resoluções de algumas dessas situações, o que evidencia também um possível desenvolvimento extra-escolar na compreensão do *raciocínio combinatório*. Outra possibilidade a ser considerada, ainda, é a de que conhecimentos escolares diversos – não especificamente relacionados à *combinatória* – podem também auxiliar no desenvolvimento desse tipo de raciocínio, como sugerido por Schliemann (1988).

Sinais de desenvolvimento de *raciocínio combinatório* fora da escola foram também evidenciados por Schliemann (1988), mas essa evidência se deu com participantes adultos que exerciam profissão que lidava com *permutações*, em particular. Os resultados obtidos no presente estudo ampliam esses achados, ao evidenciar a possibilidade de desenvolvimento da compreensão de diferentes problemas combinatórios — não só *permutações*, mas também *produtos cartesianos*, *arranjos* e *combinações* — por parte de crianças também.

Na Tabela 2, que evidencia os acertos por série, focando especialmente nos tipos de problemas, pode-se observar que o melhor desempenho foi observado nos problemas de *produto cartesiano*, único tipo de problema de *raciocínio combinatório* explicitamente trabalhado nestas séries. Nos problemas dos outros tipos: *combinação*, *arranjo* e *permutação*, maiores erros ou dificuldades de resolução ao longo das séries foram evidenciados.

Embora nenhum dos alunos da primeira série tenha acertado qualquer um dos problemas, observou-se que alguns deles iniciaram corretamente as suas resoluções. Suas dificuldades consistiam, em geral, em esgotar todas as possibilidades, ou seja, enumerar todas as possíveis combinações a serem efetuadas, dadas as condições das situações propostas (número de elementos a serem escolhidos dentre os apresentados e se a ordem indicava, ou não, uma combinação diferenciada). A mesma dificuldade pode ser observada nas outras séries (ver análise mais adiante).

Tabela 2: Percentual de acertos por tipos de problemas/série

Tipo de problema	PRODUTO CARTESIANO	PERMUTAÇÃO	ARRANJO	COMBINAÇÃO
1ª série	0	0	0	0
2ª série	34	4	7	22
3ª série	33	5	8	10
4ª série	49	5	17	19
Percentual total (por tipos de problemas)	29	3	8	13

Inhelder e Piaget (1976) já haviam sinalizado que as crianças demoram certo tempo para serem capazes de utilizar métodos sistemáticos de esgotamento de todas as possibilidades de situações combinatórias. Esses autores investigaram o desempenho em problemas de *permutação*, mas o presente estudo também observou essa dificuldade com *produtos cartesianos*, *arranjos* e *combinações*.

Quanto aos tipos de problemas, os de *produto cartesiano*, como já foi visto, foram os que os alunos mais acertaram. Esse é, geralmente, um tipo de problema trabalhado explicitamente nas séries iniciais. Quando a escola começa a trabalhar formalmente a multiplicação, enfatiza, entre os tipos mais comuns de multiplicação, também este tipo de problema. Além disso, conforme pesquisa de Pessoa e Matos Filho (2006b), alguns livros didáticos já introduzem este trabalho com o *produto cartesiano* na 1ª série. Num outro estudo recente de análise de livros didáticos, Barreto, Amaral e Borba (2007) observaram que, embora o *produto cartesiano* seja o único tipo de problema de *raciocínio combinatório* explicitamente trabalhado, os outros tipos de problema (*arranjos*, *combinações* e *permutações*) também são apresentados nos livros de 1ª a 4ª série. Ressalta-se, porém, que nenhum destaque é feito a esses tipos de problemas e/ou a semelhanças e diferenças entre os mesmos.

Possivelmente, o índice de acertos no tipo *combinação* seja mais alto que o dos outros tipos que normalmente também não são trabalhados nas séries iniciais do Ensino Fundamental, porque, nesse tipo de problema, o aluno consegue esgotar as possibilidades mais rapidamente e manipular os números com maior facilidade, quando os números são pequenos, como fica evidente na Tabela 1, analisando-se a grandeza numérica envolvida no primeiro e segundo problemas desse tipo apresentados aos alunos.

Os problemas dos tipos *arranjo* e *permutação* apresentaram percentuais baixos de acertos, provavelmente pela dificuldade em esgotar todas as possibilidades nesses problemas, nos quais a ordem de apresentação dos elementos é importante, ao contrário dos de tipo *combinação,* em que a ordem de apresentação dos elementos não importa. Perceber, então, que todos os possíveis casos foram listados em *arranjos* e *permutações* foi mais difícil para as crianças, pois teriam que atentar, por exemplo, que BRASIL, FRANÇA e ARGENTINA constituíam um caso diferente de BRASIL, ARGENTINA e FRANÇA (em colocações na Copa do Mundo); e que AMOR e AMRO constituíam diferentes possibilidades (no caso de anagramas com essas quatro letras).

Em um dos dois problemas do tipo *permutação* apresentados aos alunos, observa-se que não houve nenhum acerto em nenhuma das séries. Da mesma forma, ocorreu com um dos dois problemas apresentados, do tipo *combinação*. Levanta-se a hipótese de isso ter ocorrido devido à utilização de números muito grandes no enunciado (ver Tabela 1), o que exigia cálculos complexos ou não permitia o esgotamento das possibilidades a partir de uma estratégia que utilizasse o desenho ou a escrita. Nas outras questões desses tipos de problemas (*permutação e combinação)*, porém trabalhando com números menores, há percentuais de acertos a partir da 2ª série. Este fato leva a crer que um dos dificultadores do sucesso na finalização do problema nas séries iniciais seja, além da própria dificuldade com o *cálculo relacional* dos problemas e com a sua familiarização, a grandeza numérica utilizada nos enunciados.

Quanto às grandezas numéricas envolvidas nos problemas, a Tabela 1 mostra que, de um modo geral, nos primeiros problemas de cada tipo os alunos apresentaram maior dificuldade do que nos segundos problemas dos mesmos tipos. A grandeza numérica influenciou os desempenhos, pois, de um modo geral, os primeiros problemas apresentavam, no enunciado, números maiores que os segundos problemas do mesmo tipo. Essa constatação leva à reflexão de que há uma dificuldade de *cálculo numérico* maior, talvez, que a dificuldade de *cálculo relacional* sobre os problemas. Outra possibilidade, mais remota, é a de que os alunos já estivessem mais familiarizados com os problemas, ao resolverem os segundos de cada tipo. Possivelmente este não seja o fator que explique o melhor desempenho nos quatro últimos problemas, pois apenas um problema de cada tipo não parece ser o suficiente para levar ao seu aprendizado.

Quanto ao desempenho dos alunos por tipo de escola, observou-se, de modo geral, um percentual médio de acertos superior nos alunos da escola particular. Na primeira série, nenhum aluno – da escola pública ou da particular – conseguiu determinar o número total de possibilidades das situações propostas, evidenciando que os alunos dessas duas escolas tenham partido, basicamente, do mesmo nível de compreensão dos problemas combinatórios. Com o avançar da escolarização, porém, as diferenças entre as duas escolas foram se evidenciando. Na terceira e na quarta séries observaram-se maiores diferenças entre os desempenhos dos alunos de escola pública e de escola particular. Infelizmente, o tipo de escola ainda é um grande determinante no desenvolvimento de conceitos por parte dos alunos, sendo necessários ainda maiores avanços para que a escola pública ofereça um ensino de qualidade.

Em todos esses tipos de problemas, tem-se a relação um-a-muitos implícita, o que pode ser um dificultador para a compreensão e a resolução pelos alunos. Eles apresentam dificuldades em esgotar todas as possibilidades do problema, e, quanto maiores são os números envolvidos no enunciado, maior é a dificuldade, pois, além de relacional, ela á numérica. Além disso, parece que o produto, nos problemas, ainda não é percebido pelos alunos desse nível escolar.

As análises de cunho mais quantitativo, efetuadas e descritas acima, foram complementadas por análises qualitativas que buscaram identificar as estratégias, bem sucedidas ou não, utilizadas pelos alunos.

Embora, como foi evidenciado, nenhum dos alunos da primeira série tenha acertado nenhum dos problemas, observou-se que alguns deles iniciaram corretamente as suas resoluções. Suas dificuldades consistiam, em geral, em esgotar todas as possibilidades. O mesmo pode ser observado nas outras séries. Apesar de muitos desses alunos não terem conseguido encontrar a resposta correta para os problemas propostos, vale a pena analisar os tipos de respostas e as estratégias por eles utilizadas.

Os tipos de respostas mais freqüentes dos alunos em relação aos problemas propostos são os seguintes:

- **Em branco** – não se pode, nestes casos, saber se o aluno não respondeu porque não sabia, porque não se interessou, porque não quis fazer ou se considerou o problema de difícil resolução.
- **Apenas resposta incorreta** – o aluno dá apenas a resposta errada para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
- **Apenas resposta correta, sem explicitação de estratégia** – o aluno dá apenas a resposta certa para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
- **Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação** (incompreensão do problema) – o aluno apresenta uma resposta

incorreta e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta.

- **Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação** (apresenta certa compreensão do problema) – o aluno erra a resposta; entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema. Na maioria das vezes, porém, neste caso, o aluno não consegue esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
- **Resposta correta com explicitação de estratégia** – O aluno consegue compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, encontrando formas de esgotar todas as possibilidades.

Essa categorização proposta no presente estudo quanto aos tipos de respostas assemelha-se aos níveis hierárquicos de elaboração de *raciocínio combinatório* apontados por Moro e Soares (2006), que vão desde respostas alheias aos problemas até soluções combinatórias.

As formas de resolução apresentadas pelos alunos foram as seguintes:

- **Realiza adição, subtração ou divisão,** utilizando os valores apresentados no enunciado. A resposta, geralmente, é *incorreta sem relação.*
- **Desenha ou escreve** possibilidades, podendo a resposta ser correta ou incorreta, havendo, ou não, o esgotamento de todas as possibilidades.
- **Relaciona o problema a um produto,** podendo a multiplicação ser adequada ou inadequada.

A seguir, podem-se observar algumas das estratégias utilizadas pelos alunos, ao resolverem os problemas propostos.

Adição ou subtração com os valores apresentados no enunciado / resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação

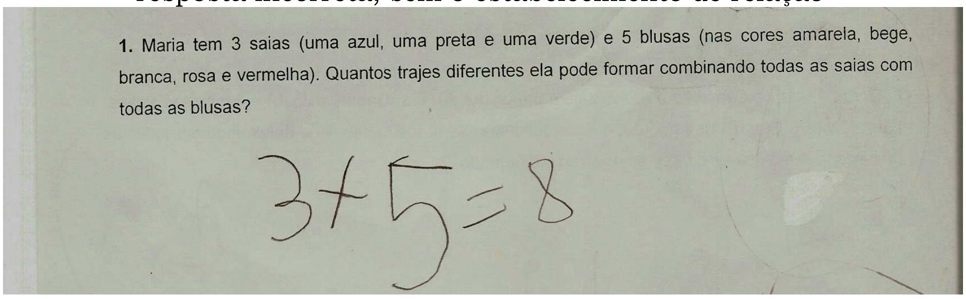


Figura 1: resolução de S., aluno da 1ª série da escola particular.

Os alunos cujas soluções estão evidenciadas nas Figuras 1 e 2, ambos da 1ª série, utilizaram os números presentes no enunciado do problema e fizeram uma adição ou subtração. Essas operações não possuem relação direta com a situação proposta e, dessa forma, parece que não houve compreensão da proposta do problema, pois não há aparente relação com o que foi solicitado.

Nas Figuras 3, 4 e 5 podem-se observar alunos da 1ª, 3ª e 4ª séries, tanto da escola pública quanto da particular, que utilizam como estratégia de resolução a escrita, sem o esgotamento de todas as possibilidades, e a resposta é incorreta, sem relação com o problema. Aparentemente não houve compreensão da lógica do problema. Pode-se inferir que as lógicas utilizadas pelos alunos foram outras que não a solicitada, como, por exemplo, palavras iniciadas pela letra “A” ou uma palavra com cada uma das letras da palavra “amor”.

Desenha ou escreve possibilidades sem o esgotamento de todas / resposta incorreta, sem estabelecimento de relação

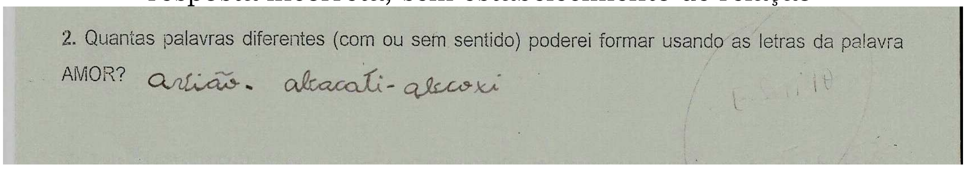


Figura3: resolução de M. E., aluna da 1ª série da escola pública.

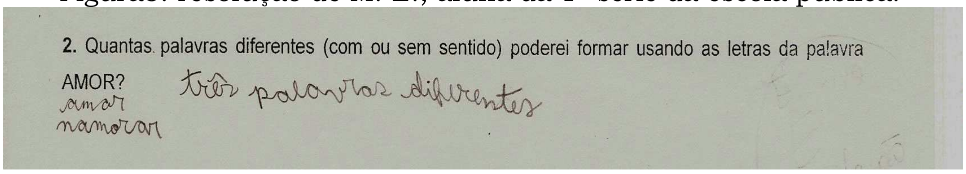


Figura 4: resolução de M. R. S., aluna da 4ª série da escola particular.

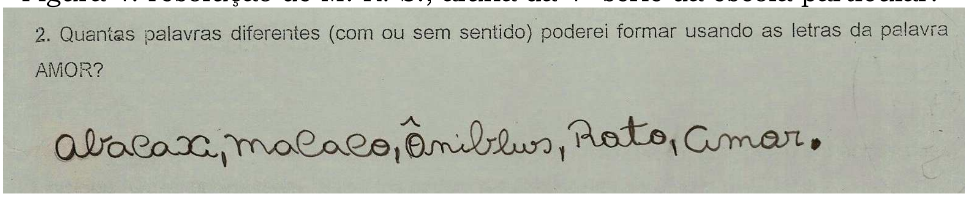


Figura 5: resolução de M. S. S. aluna da 3ª série da escola pública.

A forma de resolução (escrita) é favorecida pelo tipo de problema e pela abordagem do enunciado – que lida com letras do alfabeto. Um dado interessante a ser observado é que este é um erro apresentado por alunos de diferentes séries, embora tenha sido bem mais freqüente na primeira série.

Alguns alunos dão evidências de que, embora não apresentem a resposta correta no final, compreendem as relações implícitas nas situações e propõem estratégias de resolução que evidenciam essa compreensão. As Figuras 6, 7, 8 e 9 são bons exemplos dessa compreensão, pois os alunos iniciam suas soluções, enumerando as diferentes possibilidades, embora não consigam desenvolver um procedimento suficientemente sistematizado que possibilite o levantamento de todas as possibilidades das dadas situações.

As resoluções apresentadas nestas figuras (6 a 9) também são de alunos de diferentes séries; entretanto, apesar de não acertarem a resposta, apresentam interessantes estratégias de resolução, demonstrando que compreenderam o que é solicitado pelos problemas. Pode-se observar também que são estratégias de tentativa de esgotamento das possibilidades nos diferentes tipos de problemas, os quais ainda não foram trabalhados explicitamente nessas séries, e só são introduzidos formalmente no 2º ano do Ensino Médio. O exame cuidadoso dessas estratégias poderá auxiliar na análise de como os alunos compreendem esses problemas antes de sua introdução formal na escola.

Desenha ou escreve possibilidades sem esgotamento de todas / resposta errada, mas com estabelecimento de relação, ou seja, apresenta compreensão do problema

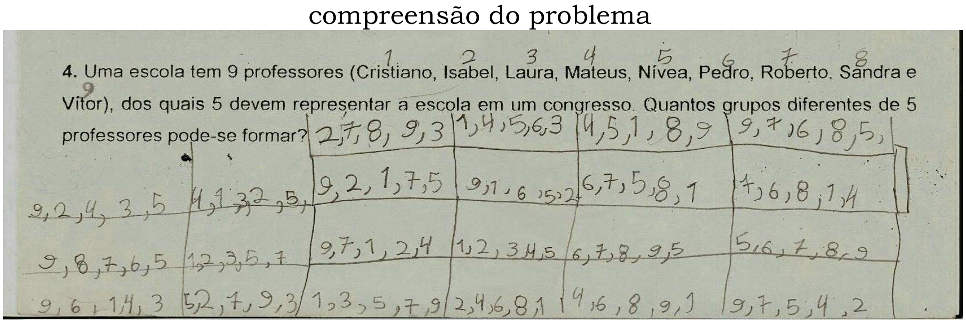


figura 6: resolução de l. s. m., aluna da 2ª série da escola particular.

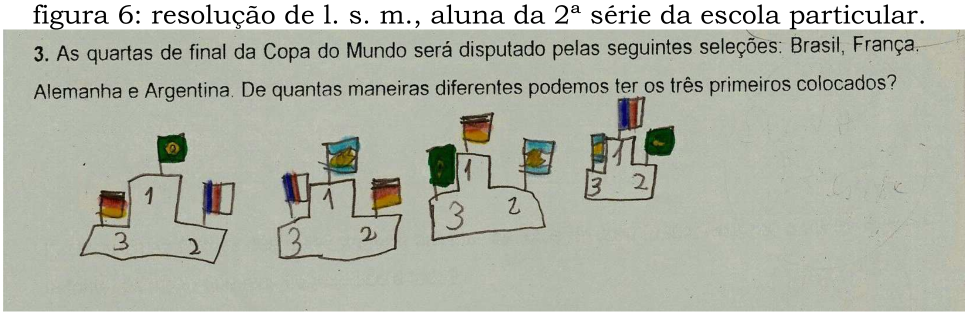


figura 7: resolução de j. a. l., aluna da 2ª série da escola particular.

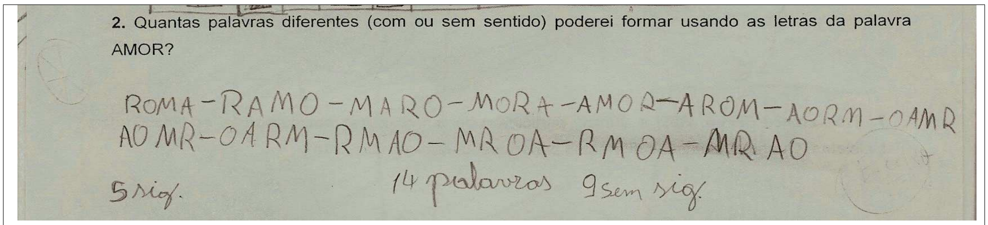


figura 8: resolução de s b s., aluna da 3ª série da escola particular.

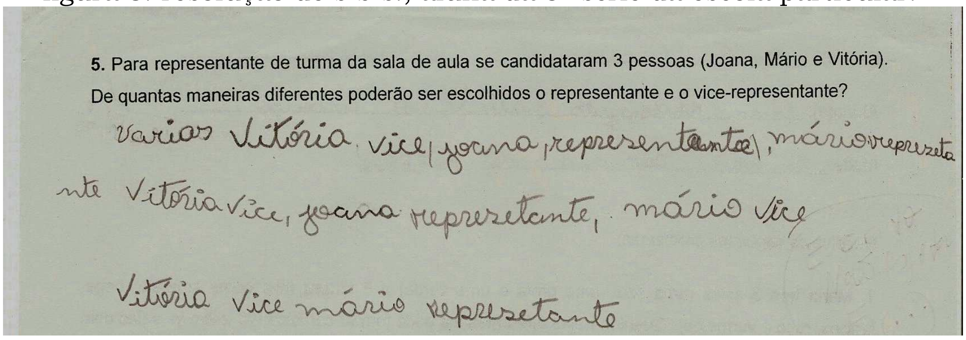


figura 9: resolução de e. r. b. a., aluna da 4ª série da escola pública.

Mesmo lidando com números pequenos, a aluna E. R. B. A. (Figura 9) não controlou as possibilidades, repetindo algumas e não esgotando todas, mas demonstra perceber a lógica implícita no problema, utilizando-se de uma estratégia válida. A aluna L. S. M. (Figura 6) utiliza uma interessante estratégia: substitui as pessoas por números e vai tentando fazer as combinações; entretanto, este é um problema com uma grande quantidade de possibilidades, o que dificulta a sua conclusão a partir desta estratégia. Semelhantemente, outras crianças iniciaram soluções corretamente, mas não conseguiram sistematicamente encontrar todas as possibilidades solicitadas nas situações.

Batanero et al. (1996) apontaram como um dos erros mais persistentes, que impedem avanços na resolução de problemas combinatórios, a enumeração não sistemática dos possíveis casos. No presente estudo também se evidenciou essa dificuldade por parte dos alunos, em especial os das séries mais iniciais. Embora sem esgotamento de todas as possibilidades, ou seja, sem a enumeração de todos os casos possíveis, é importante salientar que desde cedo as crianças podem compreender relações envolvidas em problemas combinatórios e, assim, devem ser estimuladas a explorar esses tipos de problemas desde as séries iniciais.

Outra forma de compreensão das relações implícitas, mas sem solução final correta, é aquela na qual não se atenta para as particularidades da situação, como, por exemplo, se a ordem dos elementos resulta, ou não, em combinações diferenciadas. A aluna K. S. F. C. (Figura 10), por exemplo, demonstra que, de certa forma, compreende o que o problema solicita; entretanto, extrapola as possibilidades, repetindo-as. Este é um problema do tipo *combinação,* no qual a ordem em que os elementos são organizados não importa, ou seja, a combinação Raul e Mário é igual à combinação Mário e Raul. Ela se utiliza da mesma estratégia que usou e foi válida para o 5º problema (ver Figura 16), do tipo *arranjo*, no qual a ordem dos elementos é importante e, portanto, Joana e Vitória é diferente de Vitória e Joana, de acordo com a lógica do tipo de problema.

Resposta errada, mas com estabelecimento de relação, ou seja, apresenta compreensão do problema / desenha ou escreve possibilidades extrapolando-as

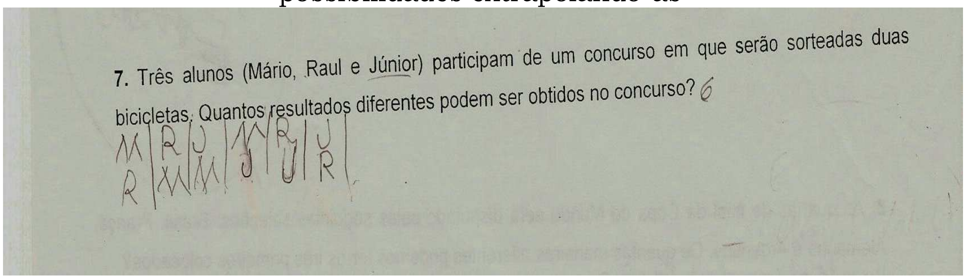
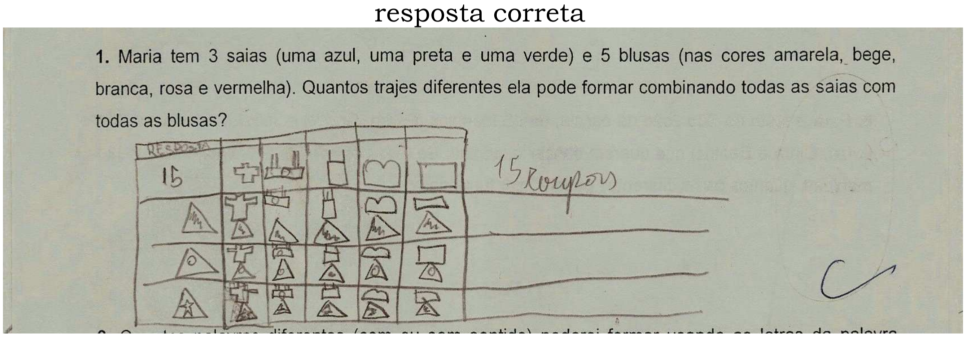


figura 10: resolução de k. s. f. c., aluna da 2ª série da escola pública.

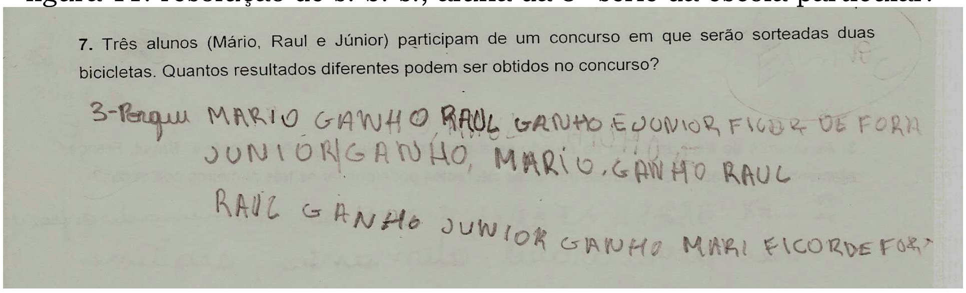
desenha ou escreve possibilidades com o esgotamento de todas / resposta correta


1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas?

15

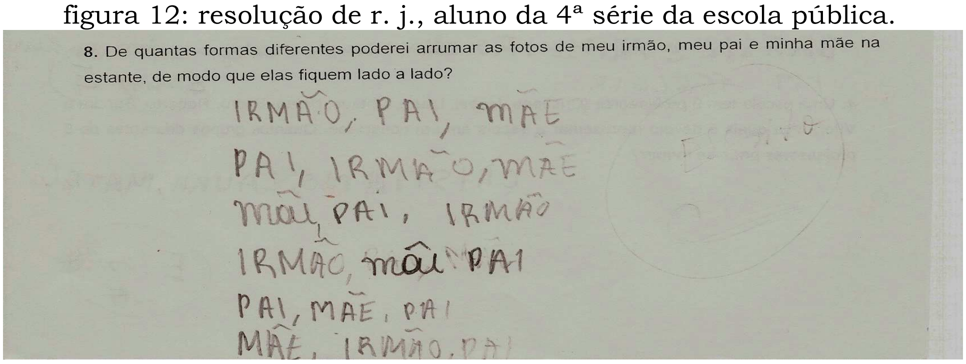
15 Roupas

figura 11: resolução de s. b. s., aluna da 3ª série da escola particular.


7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

3-Porque MARIO GANHO RAUL GANHO E JUNIOR FICOU DE FORA
JUNIOR GANHO, MARIO GANHO RAUL
RAUL GANHO JUNIOR GANHO MARI FICOR DE FORA

figura 12: resolução de r. j., aluno da 4ª série da escola pública.


8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

IRMÃO, PAI, MÃE
PAI, IRMÃO, MÃE
MÃE, PAI, IRMÃO
IRMÃO, MÃE PAI
PAI, MÃE, PAI
MÃE, IRMÃO, PAI

figura 13: resolução de r. j., aluno da 4ª série da escola pública.

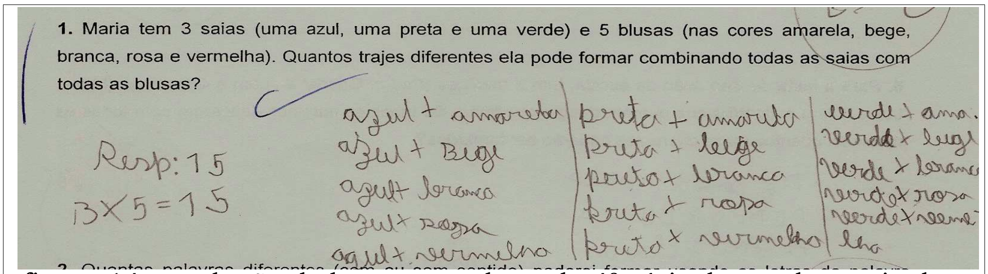


figura 14: resolução de l. s. a. m., aluno da 4ª série da escola particular.

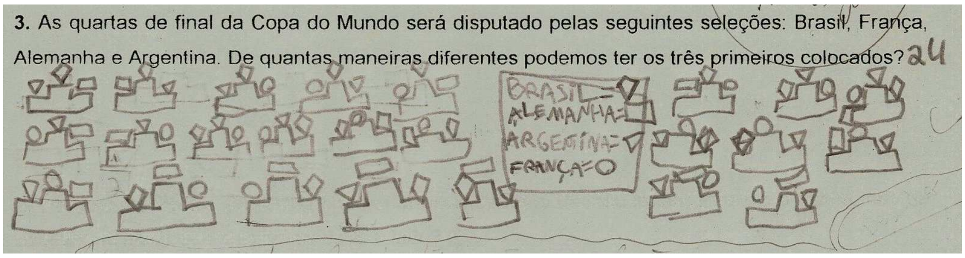


figura 15: resolução do aluno l.l., aluno da 2ª série da escola particular.

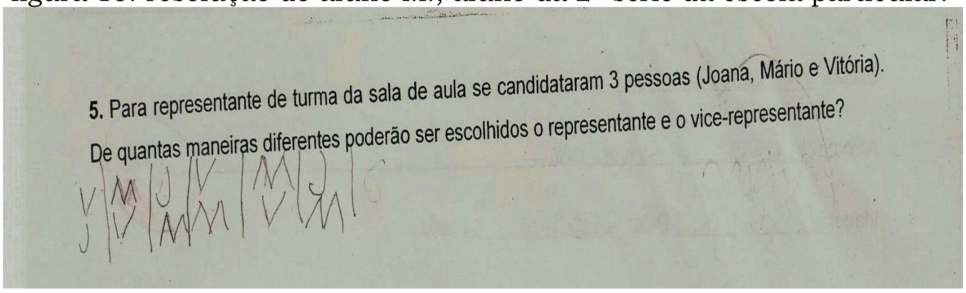


figura 16: resolução de k. s. f. c., aluna da 2ª série da escola pública.

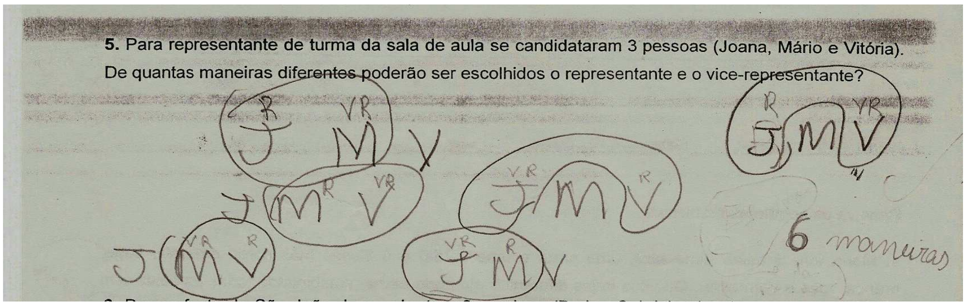


figura 17: resolução de m. e. b. p. c., aluna da 3ª série da escola particular.

As Figuras 11 a 17 mostram resoluções de alunos que conseguiram perceber a lógica dos problemas, acertando as respostas. É importante observar que são alunos das diferentes séries (exceto da 1ª, que, como foi citado anteriormente, não apresentou acertos), tanto da escola particular quanto da pública. A percepção da lógica dos problemas foi se tornando mais evidente para os alunos à medida que aumentava a sua escolarização.

É interessante observar a estratégia do aluno L. L. (Figura 15), assim como a da aluna L. S. M. (Figura 6), resolvendo o quarto problema. Ele substitui os elementos citados no enunciado por outros símbolos, criando uma nova representação. A grandeza numérica trabalhada neste problema é menor que a trabalhada no quarto problema, o que pode ter sido um facilitador para que esse aluno encontrasse a resposta, diferentemente do ocorrido com a sua colega.

Percebe-se que os acertos acontecem, em sua maioria, com os problemas cuja grandeza numérica é pequena, porque as estratégias que os alunos utilizam nesse nível de ensino ainda são bem longas e detalhadas; eles ainda não dominam as fórmulas e, assim, utilizam-se da forma de resolução que melhor se encaixa nas suas possibilidades de resolver e compreender.

Alguns alunos não só compreenderam as relações implícitas e corretamente enunciaram todos os possíveis casos, mas também associaram suas resoluções a produtos (Figuras 18 e 19).

A resolução do aluno R. J. (Figura 19), assim como a de muitos dos alunos pesquisados, está relacionada a uma multiplicação, por se tratar de um problema do tipo *produto cartesiano*, tipo comumente trabalhado na escola. A estratégia da aluna S. B. S. (Figura 18) é bastante interessante, porque ela inicia fazendo as combinações, depois percebe que cada seleção tem seis possibilidades de ser a primeira colocada e, já que são quatro possibilidades de seleção, ela, ao invés de continuar fazendo as combinações, simplifica e multiplica quatro seleções por seis possibilidades cada uma. Ou seja, ao longo da resolução, ela percebeu que se trata de um produto, o que parece ser um grande avanço no que se refere às suas estratégias de resolução e à sua compreensão do problema.

Percebe que o problema está relacionado a um produto

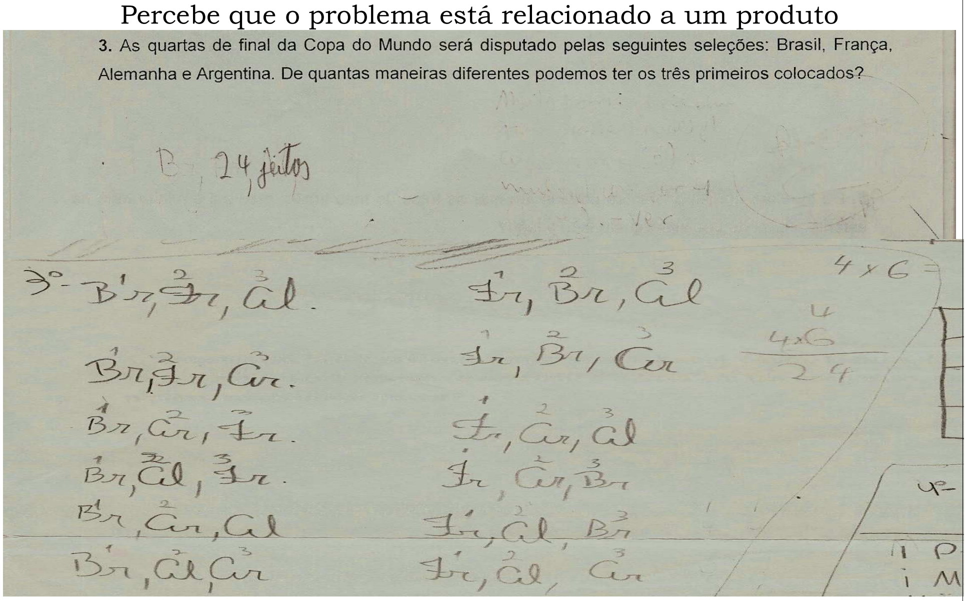


figura 18: resolução de s. b. s., aluna da 3ª série da escola particular.

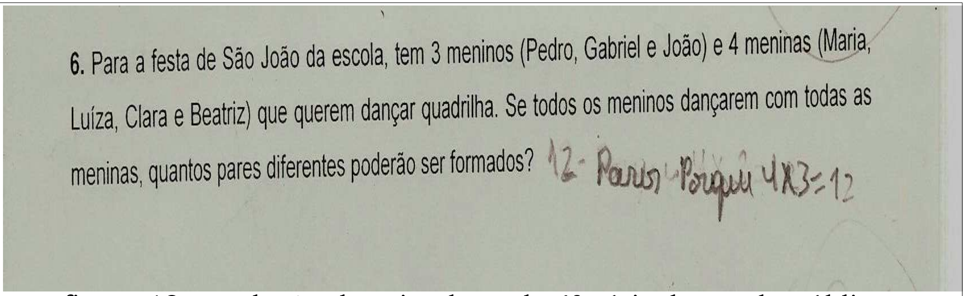

6. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? 12- Pares Porque 4X3=12

figura 19: resolução de r. j., aluno da 4ª série da escola pública.

Conclusões

Diante do que foi observado, pode-se concluir que alunos de séries iniciais desenvolvem compreensões sobre problemas de *raciocínio combinatório*, ora diretamente influenciados pela escola (como no caso dos problemas de *produto cartesiano* – trabalhados explicitamente nas séries iniciais), ora como resultado de experiências escolares não necessariamente relacionadas à *combinatória*, ou, ainda, pelas suas vivências extra-escolares (como no caso de alguns problemas de *combinações*, *arranjos* e *permutações* – não trabalhados explicitamente nas séries iniciais).

Alunos de séries iniciais desenvolvem interessantes estratégias que devem ser aproveitadas pela escola para ajudá-los a avançar na compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual. Para que haja um aproveitamento escolar dessas estratégias, torna-se necessário que os professores tenham conhecimento sobre os diferentes tipos de problemas combinatórios, bem como a respeito dos saberes já possuídos pelos seus alunos e dos erros que estes comentem.

Estes resultados levam à reflexão de que o trabalho escolar é importante, no sentido de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, ou seja, é imprescindível que a escola esteja atenta ao que está trabalhando com os seus alunos, pois esse trabalho, de uma forma ou de outra, tem resultados no seu desempenho. A escola deve, também, reconhecer que os alunos podem desenvolver conhecimentos em atividades extra-escolares. Como alertam Esteves e Magina (2001), no caso particular da *combinatória*, o trabalho realizado a partir da resolução de problemas favorece o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, útil não só em aplicações matemáticas, mas também em outras áreas do conhecimento.

No caso dos problemas de *raciocínio combinatório*, a maior parte dos alunos começa tentando buscar uma compreensão do problema, sendo a maior dificuldade a de esgotar todas as possibilidades que o problema solicita. Os alunos da 1ª e 2ª série são menos bem-sucedidos na enumeração de todos os casos possíveis, e os de 3ª e 4ª série conseguem fazer essa enumeração com maior freqüência. Nesse sentido, a escola deve discutir o esgotamento de possibilidades em seu trabalho de *raciocínio combinatório*, ou seja, o levantamento – direto ou indireto — de todos os possíveis casos. Dessa forma estará possibilitando um maior desenvolvimento dos alunos na compreensão dessas situações.

O papel das representações simbólicas também é uma importante questão a ser considerada, pois não apenas significados dados aos números nos diferentes tipos de problemas, mas também a forma de representá-los, influenciam a sua resolução.

Este estudo, dessa forma, contribui para reforçar os pressupostos teóricos de Vergnaud (1982) sobre a influência de significados, de propriedades invariantes e de representações simbólicas no desenvolvimento conceitual e, em particular, como aqui observado, no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Dessa forma, espera-se que se tenha alcançado, no presente estudo, o objetivo de contribuir para a análise de estratégias de resolução de problemas combinatórios por parte de alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Referências bibliográficas

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia* — UFPE, Recife, v. 2, p. 1-21, 2007.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

BORBA, Rute; SELVA, Ana. Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO (ANPEd), 29., 2006, Caxambu. *Anais*... Caxambu, 2006.

BORBA, Rute; SELVA, Ana. Children's difficulties in dealing with remainders in division problems. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12., 2007, Querétaro. *Anais*... Querétaro, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Matemática. 1ª a 4ª série. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BROWN, Margareth. Number operations. In: HART, Kathleen (Ed.). *Children's understanding of Mathematics:* 11-16. Windsor: NFER-Nelson, 1981. p. 23-47.

BRYANT, Peter; MORGADO, Luísa; NUNES, Terezinha. Children's understanding of multiplication. In: *Proceedings of the Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education.* Tokyo, 1992.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

CORREIA, Paulo; FERNANDES, José António. Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. In: *Libro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía.* Universidade da Coruña, 2007.

COSTA, Claudinei. *As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental.* 161 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

ESTEVES, Inez; MAGINA, Sandra. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001, Rio de Janeiro. *Anais*... Rio de Janeiro, 2001.

INHELDER, Barbel; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Pioneira, 1976.

MERAYO, Felix. *Matemática discreta.* Madri: Thomson Paraninfo, 2001.

MIGUEL, Maria Inez; MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos,. *Anais...* Santos, 2003.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO DE CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo: v. 8, n. 1, 2006, p. 99-124.

NERY, Chico; JAKUBOVIC, José. *Curso de Matemática.* São Paulo: Moderna, 1986.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. *Introdução à Educação Matemática:* os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

PARK, Jee-Hyun; NUNES, Terezinha. The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, volume 16, issue 3, p. 763-773, Jul.-Sept. 2001.

PEDROSA FILHO, Celso. *Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7-8 anos).* Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1a a 4a série. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 2007.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Como crianças de 1a a 4a série resolvem problemas de raciocínio combinatório? In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. *Anais*... Recife, 2008.

PESSOA, Cristiane; MATOS FILHO, Maurício. Estruturas multiplicativas: como os alunos compreendem os diferentes tipos de problemas? In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Recife. *Anais*... Recife, 2006a.

PESSOA, Cristiane; MATOS FILHO, Maurício. Raciocínio combinatório: uma análise dos livros didáticos de matemática de 1ª a 4ª séries. In: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 7., Águas de Lindóia, 2006. *Anais*... Águas de Lindóia, 2006b.

PESSOA, Cristiane; SILVA, Cledjane; MATOS FILHO, Maurício. Como os alunos de 3ª e 5ª série resolvem os problemas de estrutura multiplicativa? In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2005, Salvador. *Anais*... Salvador, 2005.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

SELVA, Ana; BORBA, Rute; CAMPOS, Tânia; BIVAR, Dayse; FERREIRA, Maria Neuza; LUNA, Maria Helena. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? IN: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. *Anais*... Recife, 2008.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, Thomas; MOSER, Joseph; ROMBERG, Thomas. (Ed.), *Addition and subtraction:* a cognitive perspective. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1982.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of mathematics:* concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica,* n. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels. RDM*, v. 10, n. 23, 1990.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad* - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

APÊNDICE A – Problemas propostos aos alunos (na ordem em que foram apresentados)

Escola: ____

Aluno(a): ____

Idade:_______________ Data: ___________ Série: _______________

Resolva os seguintes problemas:

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar, combinando todas as saias com todas as blusas?

(Produto cartesiano)

2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar, usando as letras da palavra AMOR?

(Permutação)

3. As semi-finais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

(Arranjo)

4. Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores podem-se formar?

(Combinação)

5. Para representante de turma da sala de aula candidataram-se 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?

(Arranjo)

6. Para a festa de São João da escola, 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

(Produto cartesiano)

7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

(Combinação)

8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, de meu pai e de minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

(Permutação)