

O COMPUTADOR NO ENSINO DE CÁLCULO: O PROBLEMA DO LIXO NA UNICAMP E OUTRAS APLICAÇÕES¹

Vera L. X. Figueiredo*
Sandra A. Santos*

RESUMO No segundo semestre de 1996, trabalhamos de maneira experimental com a Educação em seu sentido mais amplo, integrando o ensino de Cálculo de várias variáveis com projetos envolvendo um tema relacionado com a questão ambiental: *O Problema do Lixo na Unicamp*, com o objetivo de utilizar o Cálculo como ferramenta na resolução de problemas reais e alertar nossos alunos para esta importante questão social. Além disso, visando enfrentar as mudanças que se fazem necessárias no ensino de Cálculo, incorporamos, pela primeira vez, como parte integrante de nossas aulas o uso do computador (programa *Mathematica*), utilizado como ferramenta de apoio na compreensão dos conceitos trabalhados. Esta proposta de ensino, tendo como suporte o programa de tutoria da Pró-Reitoria de Graduação-PAEG (Programa de Apoio ao Ensino de Graduação/Unicamp), foi denominada *Cálculo com Aplicações/PAEG*. Neste trabalho, descrevemos como esta proposta foi implementada e apresentamos o projeto e exemplos de atividades trabalhados pelos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Cálculo; Tutoria; Projetos e Atividades Computacionais.

ABSTRACT In the second semester of 1996, we worked experimentally with education in a broad sense, integrating the teaching of Calculus of several variables with projects dealing with an environmental issue: *The Garbage at Unicamp*. Our aim was not only using Calculus as a tool in the solution of real problems but also that our students became aware of such important social issue. Moreover, with the purpose of dealing with the necessary changes in the teaching of Calculus, we effectively incorporated, for the first time, in our classes the use of the computer (software *Mathematica*) as an auxiliary tool for understanding and exploiting concepts. Such proposal for teaching relied on the tutors of the Program of Support for Undergraduate Teaching - PSUT, of the State University of Campinas and was denominated *Calculus with Applications/PSUT*. In this work, the implementation

¹Este trabalho teve o apoio do projeto PROIN/CAPES - UNICAMP.

*Docentes do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Campinas.

of our proposal is described, including the project and examples of activities that were developed by the students.

KEY-WORDS: Teaching of Calculus; Tutors; Projects and Computational Activities.

No segundo semestre de 1996, trabalhamos de maneira experimental com a Educação em seu sentido mais amplo, integrando o ensino de Cálculo de várias variáveis com projetos envolvendo um tema relacionado com a questão ambiental: *O Problema do Lixo na Unicamp*. O objetivo destes projetos foi utilizar o Cálculo como ferramenta na resolução de problemas reais e atuais, além de alertar nossos alunos para esta questão social de extrema importância. Procuramos, desta maneira, obter um maior compromisso de nossos alunos com a construção de seus conhecimentos nesta disciplina. Além disso, visando enfrentar as mudanças que se fazem necessárias no ensino de Cálculo, incorporamos, pela primeira vez, como parte integrante de nossas aulas o uso do computador (programa *Mathematica*), utilizado como ferramenta de apoio na compreensão dos conceitos trabalhados. Esta proposta de ensino, tendo como suporte o programa de tutoria da Pró-Reitoria de Graduação - PAEG (Programa de Apoio ao Ensino de Graduação/Unicamp), foi denominada *Cálculo com Aplicações/PAEG*. Os tutores do PAEG são alunos em final de graduação ou da pós-graduação de diversos cursos da Unicamp, que trabalham como estagiários em projetos de ensino para disciplinas com altos índices de reprovação e evasão sob a responsabilidade do professor coordenador do projeto e atuam como elo na conexão aluno/professor. Participaram desta experiência seis professores responsáveis por cerca de 400 alunos, com o apoio de seis tutores.²

Os principais objetivos deste trabalho foram a utilização das ferramentas computacionais adquiridas no Cálculo de uma variável como apoio para a consolidação dos conceitos desenvolvidos no de várias variáveis; a incorporação eficiente do trabalho da tutoria dos alunos do Programa PAEG, através de atividades fortemente integradas

²Turma: Engenharia Mecânica (77 alunos), Professora: Vera L. X. Figueiredo - Coordenadora da Disciplina, Tutor: Éder Lima de Albuquerque - Mestrando em Engenharia Mecânica; Turma: Engenharia Elétrica (75 alunos), Professora: Sandra A. Santos - Coordenadora do PAEG - Cálculo, Tutor: Renato da Rocha Lopes - Mestrando em Engenharia Elétrica; Turma: Engenharia de Computação (75 alunos), Professor: Marcelo Santos, Tutor: André Jansen - Graduando em Biologia (ex-aluno da Eng. Elétrica); Turma: Estatística (63 alunos), Professor: Herbert Bazani, Tutor: Belisário Nina Huallpa - Doutorando em Engenharia Mecânica; Turma: Engenharia de Alimentos (67 alunos), Professor: Antonio Carlos Gilli Martins, Tutor: Michel Beleza Yamagishi - Mestrando em Matemática Aplicada; Turma: Engenharia Agrícola (32 alunos), Professor: Eduardo Sebastiani Ferreira, Tutor: Cristiano Gomes de Faria - Mestrando em Química.

com a disciplina, e o estímulo para o aluno utilizar de maneira criativa os conhecimentos teóricos e práticos adquiridos para a resolução de problemas propostos em projetos.

O uso de projetos como apoio no desenvolvimento da disciplina tem por objetivo propiciar um maior envolvimento do aluno com seu processo de aprendizagem. As propostas destes projetos, que foram desenvolvidos por grupos de até três alunos, eram constituídas de questões relacionadas com os tópicos estudados e procuraram ser diferenciadas por grupo, com uma abordagem mais ampla e de aprofundamento dos conceitos trabalhados. Criamos, com isso, a oportunidade para o aluno desenvolver suas habilidades com as ferramentas adquiridas no decorrer do curso e, ao mesmo tempo, estimulamos a criatividade e o trabalho em equipe, fatores essenciais na formação de futuros profissionais.

A filosofia do ensino através de projetos teve seu início na Unicamp em 1990, com as Professoras Maria Alice Grou e Sueli Costa, no projeto Cálculo com Aplicações, para duas turmas experimentais das Engenharias Elétrica e Mecânica. Um relato completo desta experiência pode ser encontrado em COSTA e GROU (1995). Este projeto foi ampliado em 1992 para quatro turmas das Engenharias, com a Participação das Professoras Vera L. X. Figueiredo e Miriam Scanavini e, em 1994, este trabalho foi feito de maneira integrada com a disciplina Geometria Analítica, através da orientação de alunos do PECD (Programa de Estágio de Capacitação Docente/Unicamp) e com a participação da então auxiliar de ensino, Professora Sandra A. Santos.

A presença da informática nos dias atuais deve ser encarada como aliada e não como inimiga. Acreditamos que o uso do computador não deve substituir uma sólida formação teórica, mas, sim, enriquecê-la e permitir a discussão de novas questões. Em particular, nas disciplinas introdutórias de Cálculo ele pode ser benéfico, pois possibilita ao aluno participar de maneira ativa e crítica de seu processo de aprendizagem. O computador pode ser utilizado como um simulador de conjecturas que devem ser provadas para consolidar o conhecimento adquirido ou, ainda, como um instrumento de visualização de conceitos e suporte para uma melhor compreensão e aprofundamento do que está sendo aprendido. Devemos destacar também o computador como uma poderosa ferramenta geométrica e de cálculo algébrico para a resolução de problemas difíceis, com extrema utilidade para diversas situações teóricas e práticas. Neste sentido, deparamo-nos com o desafio da elaboração de propostas criativas de trabalho que incorporassem o conhecimento teórico recém-adquirido e possibilitassem a interação do aluno com a máquina, permitindo que este desenvolvesse uma atitude crítica na interpretação dos resultados fornecidos por ela.

Nossa estratégia de trabalho para este semestre foi subdividir as seis horas semanais do curso em quatro teóricas e duas práticas (uma para laboratório

computacional e outra para exercícios em sala de aula). As aulas práticas foram estruturadas da seguinte maneira: na primeira hora, metade da turma desenvolvia as atividades computacionais monitoradas pelos tutores do PAEG, enquanto a outra parte ficava na sala de aula fazendo exercícios com o professor; na segunda hora, invertia-se a situação. Ao trabalharmos desta maneira, reduzimos a sobrecarga demandada pelo programa de tutoria com aulas extras, como ocorreu no primeiro semestre deste ano. A implementação desta dinâmica de trabalho foi possível devido ao apoio das Unidades envolvidas, que cederam seus laboratórios de ensino e salas de aula próximas a eles, o que estreitou o contato dos alunos com suas Faculdades já no primeiro ano de seus cursos. Cabe observar que esta forma de trabalho permitiu não só o total cumprimento do conteúdo previsto, como também um certo aprofundamento em alguns tópicos.

Para o desenvolvimento da disciplina, foram utilizados os seguintes instrumentos de apoio: listas de exercícios, atividades de laboratório semanais, propostas de dois projetos desenvolvidos pelos alunos e atendimento dos tutores aos alunos (duas horas semanais em horário extra-classe convenientemente combinado). As professoras responsáveis elaboravam propostas de listas de exercícios e atividades de laboratório, baseadas em sugestões da equipe de professores participantes, em experiências anteriores e ao mesmo tempo comprometidas com os objetivos deste trabalho. Tomamos como referência textos elaborados em anos anteriores, livros recentes de Cálculo integrado com recursos computacionais (EDWARDS e PENNEY, 1994 e STEWART, 1994) e livros mais específicos, utilizando o programa *Mathematica* (ABELL e BRASELTON, 1993, BLACHAMAN, 1992 e DAVIS, PORTA e UHL, 1994). Um aluno com Bolsa-Trabalho do SAE (Serviço de Apoio ao Estudante/Unicamp) ficou encarregado da digitação de todo o material elaborado e utilizado neste semestre. Apresentamos, ao final deste relato, um conjunto de atividades práticas trabalhado, a título de exemplo.

Numa oficina de trabalho semanal com o grupo dos professores e tutores da disciplina, as propostas iniciais das atividades eram discutidas, testadas e reestruturadas, se necessário. Estas reuniões foram realizadas em laboratório computacional, permitindo a integração dos pares professor-tutor e do grupo participante. A experiência vivida pelo grupo nestas reuniões foi uma excelente oportunidade para a troca de conhecimentos teóricos e práticos, possibilitando aos tutores desenvolver a atividade a ser realizada com os alunos na semana seguinte e constituindo um espaço para os professores aprenderem a utilizar o recurso computacional. O envolvimento do grupo e a evolução no domínio da nova linguagem criaram um ambiente de pesquisa que resultou em um aprimoramento de nosso trabalho, proporcionando também ao Professor Arlindo José de Souza uma fonte rica para o desenvolvimento de sua pesquisa de campo. Este professor é doutorando da Faculdade de Educação - Unicamp e pesquisa a influência do uso da informática no ensino de Cálculo.

Neste semestre, os temas trabalhados nos projetos foram *Curvas planas e espaciais geradas por processos mecânicos* (ver COSTA, GROU e FIGUEIREDO, 1996) e *Uma questão ambiental: o problema do lixo na Unicamp*, cuja proposta é apresentada no final deste relato. Da experiência obtida no primeiro semestre deste ano, pudemos constatar que o sucesso destes projetos depende muito do envolvimento do grupo de professores participantes. Sendo assim, o segundo tema proposto procurou estimular esta participação tanto quanto possível. O tema *O Problema do Lixo na Unicamp*, aliando o ensino de Cálculo com uma questão ambiental, proporcionou aos nossos alunos, além da utilização das ferramentas adquiridas na procura de soluções para problemas reais, um melhor conhecimento do Campus e um maior envolvimento com a Universidade. No período de 7 a 10 de outubro, por ocasião da Primeira ECO VIDA, encontro organizado pelos alunos do GEA (Grupo de Estudos Ambientais/Unicamp), nossos alunos tiveram a oportunidade de divulgar parte dos projetos desenvolvidos em um painel no saguão do Instituto de Matemática.

A responsabilidade da correção dos projetos foi dos tutores, após discussão dos critérios com os professores. As notas dos projetos entraram na média geral do aluno, mas o critério para aprovação sem exame final continuou sendo a obtenção de nota maior ou igual a 5.0 na média das provas. Incluímos na avaliação provinhas de laboratório, preparadas e aplicadas pelos tutores, sob a orientação dos professores. Permitimos que a terceira prova fosse uma prova "curíngua", isto é, valesse por ela mesma e pudesse substituir uma das notas anteriores. A dinâmica estabelecida neste curso, através do programa de tutoria, das atividades em laboratório, dos projetos e do critério de avaliação, manteve o aluno trabalhando na disciplina até o final do período, aumentando a taxa de aprovação. Na tabela abaixo, resumimos o desempenho das turmas de Cálculo II no segundo semestre de 1993 a 1996, tendo como universo os alunos dos cursos de Estatística e Engenharias Mecânica, Elétrica, de Computação, Agrícola e de Alimentos.

	1993	1994	1995	1996
Matriculados	352	386	297	382
Aprovados	278	289	220	312
%	79	75	74	82

Tabela 1: Desempenho das turmas de MA 211 no segundo semestre - cursos de Estatística, Eng. Mecânica, Eng. Elétrica, Eng. de Computação, Eng. Agrícola e Eng. de Alimentos.

Sem dúvida, a participação integrada dos tutores do PAEG neste semestre foi um ponto importante para a inovação do curso, viabilizando a concretização das atividades computacionais. A tutoria, além de proporcionar o apoio para os alunos, permitiu aos professores sem familiaridade com a máquina que aprendessem a usá-la. Devemos ressaltar ainda a contribuição do programa PAEG para a formação profissional dos tutores, conforme destaca o tutor Michel Yamagishi em seu relatório final de atividades: *O projeto de tutoria tem me dado, através do contato com os professores responsáveis e com os alunos participantes do projeto, uma experiência didática/profissional excelente. Quando nos deparamos com o desafio de ensinar, procuramos transmitir da melhor forma possível o conhecimento que o outro procura; isso ajuda a compreender melhor a matemática nas suas sutilezas.*

A Pró-Reitoria de Graduação, através de uma equipe especializada, está avaliando o programa PAEG implantado no início de 1995. Em particular neste semestre, esta equipe elaborou novos questionários, aplicados entre os alunos deste curso com o objetivo de avaliar a integração do Cálculo com Aplicações com o programa de tutoria. Conforme sugerido no relatório de avaliação do programa no primeiro semestre (BITTENCOURT et al., 1996), enfatizamos a necessidade de se acompanhar o desenvolvimento destes alunos no decorrer dos próximos anos, para uma melhor avaliação do impacto da nossa proposta de trabalho.

Para o encerramento do curso, a equipe de trabalho (professores e tutores) promoveu uma mesa redonda, convidando todos os alunos, que elegeram um representante de cada turma para apresentar oralmente críticas e sugestões para nosso trabalho. As observações e comentários apresentados pelos representantes das turmas foram complementadas por outros alunos, reforçando pontos positivos do trabalho e salientando aspectos que ainda poderiam ser melhorados. A incorporação efetiva da tutoria no horário da aula foi bem aceita pelos alunos. Além disso, destacaram a liberdade proporcionada pela tutoria para perguntar, expor problemas e dúvidas. O aprendizado do pacote *Mathematica* foi avaliado positivamente pelos alunos, principalmente pela forma como foi conduzido, através da análise e visualização dos conceitos envolvidos e não pela simples utilização de comandos e fórmulas. O comentário a seguir foi extraído do relatório final de atividades do tutor Renato da Rocha Lopes e reforça esta opinião:

Acho que o PAEG deste segundo semestre de 1996 foi muito bem sucedido, no sentido de que os alunos compareceram às aulas de laboratório em grande número, demonstrando interesse em participar das atividades propostas. Mais ainda, pelos comentários que se ouviam, as atividades realizadas pareciam de fato auxiliar os alunos na compreensão dos difíceis conceitos de Cálculo II. A utilização do Mathematica foi muito importante para este sucesso. Sua excelente interface gráfica

permitiu a visualização de algumas situações difíceis de serem explicadas no quadro-negro e, conseqüentemente, uma melhor compreensão dos conceitos por parte dos alunos. Cabe ressaltar que o software não foi usado apenas como uma ferramenta que fosse poupar o aluno de saber integrar, por exemplo. Ele foi usado como um auxiliar, permitindo pleno desenvolvimento de raciocínio dos alunos.

O tema trabalhado nos projetos foi considerado importante e atual. Segundo os alunos, além de ajudá-los a estudar mais, os projetos criaram a oportunidade de se pôr em prática o que foi aprendido ao longo do curso, cumprindo o papel de reduzir a evasão e preparando-os para a vida profissional. Este curso, difícil para a maioria dos alunos, foi considerado bem elaborado e, através da estrutura de apoio, tornou-se mais fácil e atraente, saindo da rotina livro/caderno e criando um maior envolvimento dos alunos com a disciplina. Por outro lado, os alunos julgaram que os projetos foram um pouco extensos, e gostariam que o tema trabalhado estivesse mais ligado à área de interesse de cada turma. Sugeriram também que sempre fosse observado o grau crescente de dificuldade nas atividades propostas.

Os resultados preliminares desta experiência nos fazem crer que grande parte dos objetivos propostos foi alcançada. Em todo processo de reestruturação de um curso, é natural o surgimento de novas idéias, não somente para transpor as dificuldades que aparecem, como também para aperfeiçoar a dinâmica adotada. Constatamos que à medida que o curso foi se desenvolvendo, alguns professores que não tinham o hábito de usar o computador no preparo de suas aulas passaram a sentir necessidade de usá-lo. Percebemos também que no final do semestre as atividades propostas em aulas de exercício e laboratório estavam muito mais integradas entre si do que no início do período. Os alunos aprenderam a utilizar a ferramenta computacional, embora na resolução dos problemas práticos detectamos que os conceitos utilizados com maior desenvoltura foram os trabalhados no Cálculo de uma variável. Apesar de as atividades de laboratório terem explorado os conhecimentos recém-adquiridos, observamos que não houve um completo amadurecimento de tais conceitos e conseqüente incorporação na criação de novas idéias para o desenvolvimento dos projetos, pelo menos para boa parte dos alunos. Isto mostra que as oportunidades criadas por esta sistemática de trabalho não são mágicas nem substituem, de forma alguma, a necessidade de o aluno se dedicar à disciplina, fazendo os exercícios e finalizando as atividades de laboratório que eventualmente não tenham sido concluídas em sala de aula. Notamos que o grau de amadurecimento atingido pelos alunos com relação aos conceitos do Cálculo de várias variáveis esteve diretamente vinculado ao envolvimento e exploração do material proposto em forma de listas de exercícios, atividades de laboratório e projetos (ver Atividades Práticas e Projeto a seguir).

A reestruturação na forma do curso despertou o potencial criativo dos professores do grupo, com contribuições enriquecidas por experiências anteriores que o converteram em um curso novo. O vínculo entre os alunos e o tutor, estabelecido pelo trabalho realizado neste semestre, contribuiu para a formação profissional do tutor, através da experiência didática adquirida. Os alunos, por sua vez, saíram fortalecidos por terem participado ativamente desta experiência. Acreditamos, portanto, que o saldo deste trabalho foi bastante positivo e deve-se prosseguir investindo na integração do ensino de disciplinas básicas com projetos e incorporando o computador como parte integrante das aulas. Ressaltamos a importância do resultado da avaliação externa desta experiência como respaldo para a sua continuidade, com as eventuais alterações que se fizerem necessárias.

PROJETO

Exploramos o tema *O Problema do Lixo na Unicamp* trabalhando com os seguintes conceitos do Cálculo: sistema de coordenadas polares, curvas e áreas neste sistema (Parte I); problemas de máximos e mínimos, áreas e volumes (Parte II). Para complementar o processo de sensibilização para a questão do lixo, foi solicitada ainda uma pesquisa sobre políticas recentes de reciclagem e coleta de lixo. Apresentamos, a seguir, as propostas que foram desenvolvidas pelos alunos.

Uma Questão Ambiental - O Problema do Lixo na Unicamp

Parte I) Proposta elaborada pelos professores Vera L. X. Figueiredo e A. C. Gilli Martins

Para avaliarmos a questão do lixo na Unicamp, sugerimos como ponto de partida o mapa desta Universidade, através do qual investigaremos os principais pontos de concentração de lixo. Como estamos trabalhando nesta disciplina com coordenadas polares, propomos que você faça um primeiro levantamento deste problema, utilizando este sistema de coordenadas como referência. Pegue o mapa que você recebeu no seu guia do aluno (Veja Mapa, p. 121), dê uma volta pelo Campus para conhecê-lo melhor e observe os locais mais sujos. Sugestão: aproveite também para curtir os belos espaços de sua Universidade.

Escolha um ponto para ser o pólo (origem de seu sistema de coordenadas polares) e uma direção para ser o eixo polar.

1) Qual é o ângulo formado entre o norte geográfico e o seu eixo polar?

2) Determine, aproximadamente, as coordenadas polares de:
a) seu Instituto ou Faculdade;
b) restaurantes I, II, III e Biblioteca Central;
c) centro de Campinas (escolha um ponto de referência);
d) observatório a olho nu.

3) Identifique, em seu sistema, os pontos de grande concentração de lixo.

4) Estabeleça relações entre o seu sistema e o logotipo da Unicamp, pesquisando sobre o seu significado.

5) Escolha uma rua do Campus e dê a sua equação na forma polar.

6) Aproxime o contorno da Unicamp por curva(s) em coordenadas polares.

7) Calcule a área do setor que contém seu Instituto ou Faculdade.

8) O que mais você sugere? (Possíveis soluções para problemas detectados para a questão do lixo na Unicamp e questões para futuros projetos.)

Parte II) Proposta elaborada pelas professoras Vera L. X. Figueiredo e Sandra A. Santos

Dando continuidade à discussão do problema do lixo na Unicamp e tomando um dos quatro tipos básicos de lixo sólido (papel, plástico, metal ou vidro), o objetivo deste projeto é aliar a teoria adquirida em Cálculo (áreas e volumes, determinação de localizações ótimas) com idéias básicas de geometria para tratar de problemas novos, como o empacotamento e a análise de uma função com vários parâmetros.

A) Escolha um formato para um recipiente de lixo para o tipo escolhido³ e um material adequado para sua construção (inspire-se nos cálculos de volumes propostos nas listas de exercícios). É importante levar em conta que este reservatório deve ser esvaziado funcionalmente e não deve acumular resíduos etc.

B) Pesquise o custo do material escolhido em (A). Você pode combinar diferentes materiais, com diferentes custos.

³Para diferenciar os projetos por grupo, especificamos quatro tipos básicos de lixo: Projeto A: Papel, Projeto B: Plástico, Projeto C: Metal e Projeto D: Vidro.

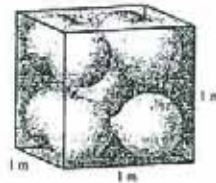
C) Fixado um volume V , determine as dimensões do reservatório de lixo escolhido em (A), que minimizem o custo do material utilizado para sua confecção. Faça um estudo geométrico de sua função e visualize-a no computador.

D) Escolha no Campus pelo menos três fontes importantes do tipo de lixo que você está trabalhando. Determine a localização ótima para seu reservatório. Sugestão: você pode utilizar as idéias dos exercícios da lista de Máximos e Mínimos ou ainda ser mais realista e explorar a "geometria das ruas".

E) Relacionando o volume V do recipiente que você propôs com os volumes dos diferentes objetos nele contidos:

1ª Parte: Esta relação é difícil de ser estabelecida de uma maneira geral. Como uma primeira abordagem para esta análise, considere o seguinte problema:

a) Cada aresta de uma caixa cúbica mede 1m. A caixa contém 9 esferas de mesmo raio r . O centro de uma das esferas está no centro do cubo e esta tangencia as outras 8 esferas. Cada uma das 8 esferas restantes tangencia três faces da caixa, de maneira que as 9 esferas estão perfeitamente encaixadas no cubo. Determine r e calcule a porcentagem de volume desperdiçado quando se utiliza este recipiente para colocar as esferas.

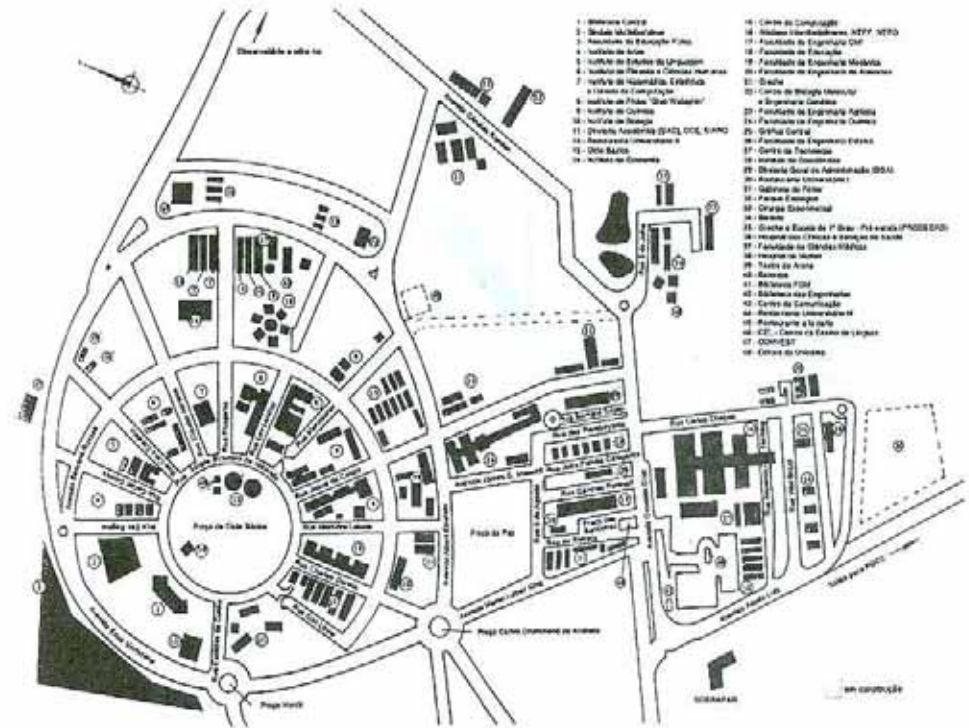


b) Escolha três formas de recipientes (prismas regulares, cilindros etc.) que contenham 9 esferas de raio r encaixadas o mais perfeitamente possível.

c) Supondo que o material para fabricar o recipiente custe p u.f./m² e o transporte custe q u.f./m³, proponha uma estratégia para decidir entre as formas dos itens (a) e (b), qual o recipiente ótimo para todos os possíveis valores de p e q ($p, q \geq 0$). Sugestão: Analise o mínimo entre as funções-custo nas variáveis p e q obtidas para cada um dos quatro recipientes.

2ª Parte: Faça um modelo para determinar a porcentagem de desperdício do seu sistema "Reservatório + Lixo" com a escolha ótima determinada em (C). Hipóteses simplificadoras podem ser úteis.

F) Pesquise sobre políticas recentes de coleta e tratamento de lixo, reciclagem etc. para o tipo de lixo que você está trabalhando.



Mapa do Campus da Unicamp/Guia do Aluno 1996

ATIVIDADES PRÁTICAS

Lista de Exercícios - Integrais Duplas

1. Encontre o volume V do sólido S limitado pelos planos $z = 6$ e $z = 2y$ e pelos cilindros parabólicos $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$ (Figura 1).

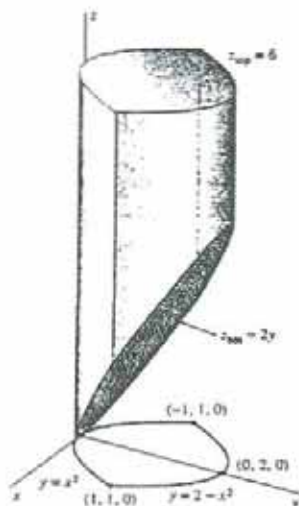


Fig. 1

2. Use integração dupla para encontrar o volume do tetraedro dado na Figura 2.

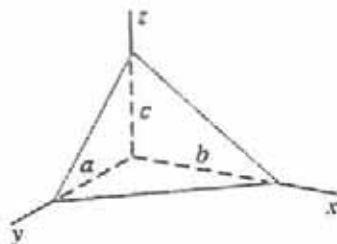


Fig. 2

3. Encontre o volume do sólido limitado pelos parabolóides $z = x^2 + 2y^2$ e $z = 12 - x^2 - y^2$ (Figura 3).

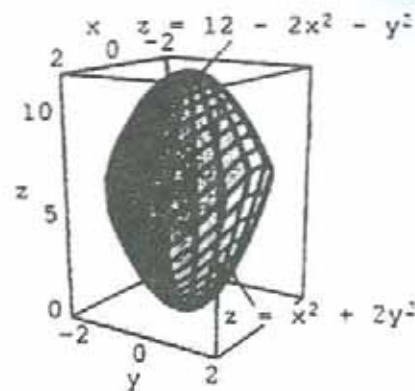


Fig. 3

4. Encontre o volume do copinho de sorvete limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Figura 4).

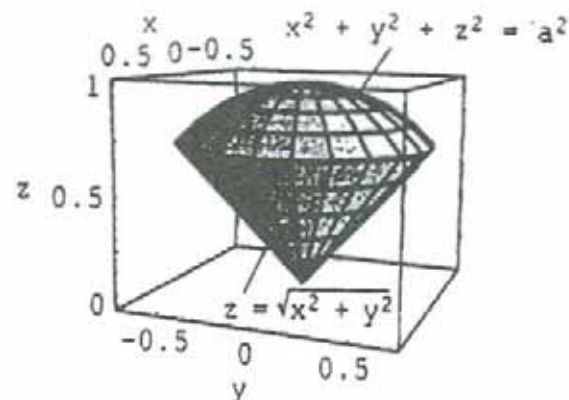


Fig. 4

5. a) Ache o volume V do sólido que está no primeiro octante e é delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ e pelos três planos coordenados. Sugestão: uma ordem de integração é consideravelmente mais fácil que a outra (Figuras 5 e 6).

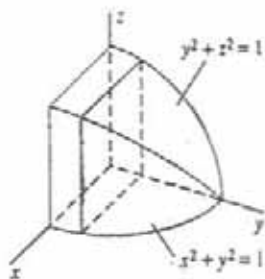


Fig. 5

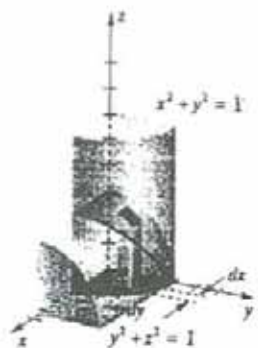


Fig. 6

b) Encontre o volume no 1º octante do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ (Figuras 7 e 8).

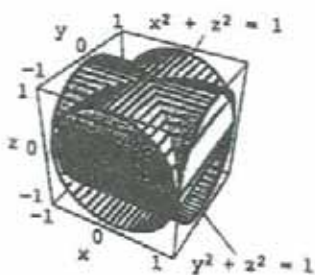


Fig. 7

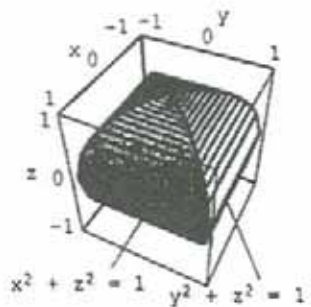


Fig. 8

c) Relacione os volumes calculados em (a) e (b).

d) Histórico⁴: Volumes das cúpulas de algumas catedrais famosas.

Muitas torres de famosas catedrais são construídas a partir de sólidos produzidos pela interseção perpendicular ao longo dos eixos de cilindros circulares de mesmo raio. Um exemplo desta construção pode ser visto nas famosas torres do Mosteiro Beneditino em Einsiedeln, Suíça, construídas entre 1704 e 1719 (Figura 9). Cada torre é obtida tomando-se dois cilindros circulares de mesmo raio r e eixos de simetria x e y , respectivamente (Confira com os problemas acima).



Fig. 9

Este problema também pode ser resolvido utilizando-se cálculo de uma variável. O volume no 1º octante é dado por

$$V = \int_0^r (r^2 - z^2) dz = \frac{2r^3}{3}$$

⁴Este exercício foi criado com base no artigo BELLO, A. J. The Volumes and Centroids of Some Famous Domes. *Mathematics Magazine*, v. 61, p. 164-170, 1988.

Verifique! (Sugestão: Calcule a área das seções planas transversais) (Figura 10).

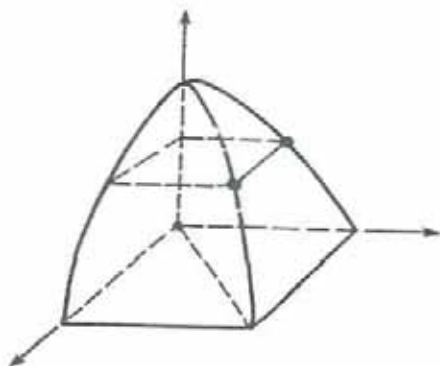


Fig. 10

Observe a curva interseção no plano $x = y$. Que curva é esta?

Considerando agora a abóbada acima e fazendo um giro de 45° em relação a seu eixo de simetria, obtemos outra semelhante. O sólido interseção destas duas abóbadas é produzido pela interseção de 4 cilindros cujos eixos são as retas com equação polar, $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/4$. As seções planas são octógonos e a armação desta estrutura é formada por arcos de elipses. Confira com a torre da Catedral de Florença (1420-1436) (Figura 11). O que ocorre com o sólido interseção à medida que o número de cilindros aumenta?



Fig. 11

Atividade de Laboratório - Cúpulas de Catedrais Famosas

Considere o 5º exercício da lista de integrais duplas: dados dois cilindros circulares de mesmo raio que se interceptam ortogonalmente ao longo de seus eixos. O objetivo desta atividade é visualizar o sólido determinado por esta interseção.

Esta visualização é possível parametrizando-se convenientemente este sólido, o que pode ser feito de várias maneiras. Por exemplo, para descrevermos a porção do sólido no primeiro octante, conforme Figura 12, podemos parametrizar a região (1) no plano xz e analisar a variação de y (mesmo procedimento para a região (2) no plano yz e a correspondente variação de x). Uma outra alternativa seria parametrizar as regiões (3) e (4) no plano xy e então delimitar como z varia em cada uma delas.

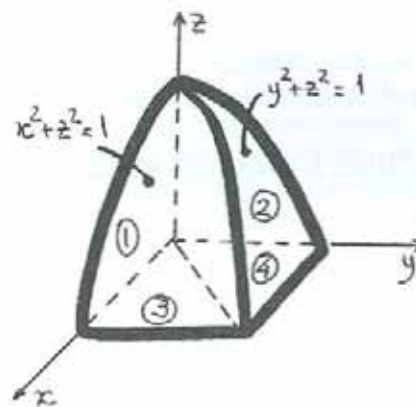


Fig. 12

- Utilizando *ParametricPlot3D* e as idéias acima, construa a interseção dos cilindros no 1º octante.
- Estenda a visualização para a cúpula completa.
- Visualize a armação da cúpula no espaço.

Desafio! Como você faria para visualizar a Catedral de Florença? (Veja descrição matemática na lista de integrais duplas.)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABELL, M. L., BRASELTON, J. P. *Mathematica by example*. Revised Edition, Cambridge: Academic Press, 1993.
- BITTENCOURT, M., LAPLANE, A., MORELLO, R. e HONÓRIO, M. A., *Avaliação do Programa de Apoio ao Ensino de Graduação (PAEG)*. Relatório da Pró-Reitoria de Graduação/Comissão Permanente para os Vestibulares - Unicamp, nov., 1996.
- BLACHAMAN, N. *Mathematica: a practical approach*. New Jersey: Prentice Hall, 1992.
- COSTA, S., GROU, M. A. La enseñanza del cálculo - una cuestion de involucramiento. *Revista Educación Matemática*, 7, p. 100-107, 1995.
- COSTA S., GROU, M. A., FIGUEIREDO, V. *Mechanical curves - a kinematic greek look through computer*. Relatório de Pesquisa RP 48/96, IMECC, Unicamp, 1996.
- DAVIS, B., PORTA, H., UHL, J. *Calculus & Mathematica*. Reading, Addison-Wesley, 1994.
- EDWARDS JR., C. H., PENNEY, D. E. *Calculus with analytic geometry*. 4 ed.. New Jersey: Prentice Hall, 1994.
- STEWART, J. *Calculus*. 3 ed.. Pacific Grove: Brooks/Cole, 1994.

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-PEDAGÓGICA DOS FUNDAMENTOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL: REFLEXÕES METODOLÓGICAS

Arlete de Jesus Brito*
Virgínia Cardia Cardoso**

RESUMO Relataremos, aqui, os mini-cursos ministrados no IV EPEM (janeiro de 1996, São Paulo, SP) e no Encontro de História e Educação Matemática (ICME-8 satellite meeting, julho de 1996, Braga, Portugal) para professores de Matemática do ensino elementar, médio e superior. Tínhamos objetivos em dois níveis distintos. Um deles era levar os professores a uma reflexão sobre os fundamentos do Cálculo Diferencial. Para isso, utilizamos a História da Matemática como fonte de problematização. Pretendíamos questionar as concepções dos professores em relação a vários conceitos. O outro objetivo era examinar os princípios metodológicos que norteiam esta utilização da História da Matemática. Além disso, tentamos sistematizar com o grupo de participantes o significado de "problematização" nessa abordagem. Como procedimentos, utilizamos a leitura de textos e a apresentação de problemas para discussão, primeiramente em pequenos grupos e, a seguir, no grande grupo, buscando a sistematização das idéias envolvidas.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial; Fundamentos; História; Ensino.

ABSTRACT We will report the workshops we gave at IV EPEM (january/1996, São Paulo, SP) and at Meeting of History and Mathematical Education (ICME-8 Satellite meeting, july/1996, Braga, Portugal) to teachers and professors of Mathematics. We had two goals: the first one was to lead teachers and professors to a reflection about the fundaments of differential calculus. We used History of Mathematics to reach this goal. We hoped to pose questions to both, teachers and professors about their conceptions of differential calculus. The second goal was to analyze this methodology that use History of Mathematics to pose questions. Besides, we tried to analyze what was "to pose questions" at this approach. We used both, reading texts and problem discussions as procedure.

KEY-WORDS: Differential Calculus; Fundaments; History; Teach.

*Doutoranda em Educação Matemática - FE - UNICAMP.

**Mestranda em Educação Matemática - IGCE - UNESP - Rio Claro.