REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABELL, M. L., BRASELTON, J. P. *Mathematica by example*. Revised Edition, Cambridge: Academic Press, 1993.

BITTENCOURT, M., LAPLANE, A., MORELLO, R. e HONÓRIO, M. A., *Avaliação do Programa de Apoio ao Ensino de Graduação (PAEG)*. Relatório da Pró-Reitoria de Graduação/Comissão Permanente para os Vestibulares - Unicamp, nov., 1996.

BLACHAMAN, N. *Mathematica: a practical approach*. New Jersey: Prentice Hall, 1992.

COSTA, S., GROU, M. A. La enseñanza del cálculo - una cuestion de involucramiento. *Revista Educación Matemática*, 7, p. 100-107, 1995.

COSTA S., GROU, M. A., FIGUEIREDO, V. *Mechanical curves - a kinematic greek look through computer*. Relatório de Pesquisa RP 48/96, IMECC, Unicamp, 1996.

DAVIS, B., PORTA, H., UHL, J. *Calculus & Mathematica*. Reading, Addison-Wesley, 1994.

EDWARDS JR., C. H., PENNEY, D. E. *Calculus with analytic geometry*. 4 ed.. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

STEWART, J. *Calculus*. 3 ed.. Pacific Grove: Brooks/Cole, 1994.

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-PEDAGÓGICA DOS FUNDAMENTOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL: REFLEXÕES METODOLÓGICAS

Arlete de Jesus Brito*
Virginia Cardia Cardoso**

RESUMO Relataremos, aqui, os mini-cursos ministrados no IV EPEM (janeiro de 1996, São Paulo, SP) e no Encontro de História e Educação Matemática (ICME-8 satellite meeting, julho de 1996, Braga, Portugal) para professores de Matemática do ensino elementar, médio e superior. Tínhamos objetivos em dois níveis distintos. Um deles era levar os professores a uma reflexão sobre os fundamentos do Cálculo Diferencial. Para isso, utilizamos a História da Matemática como fonte de problematização. Pretendíamos questionar as concepções dos professores em relação a vários conceitos. O outro objetivo era examinar os princípios metodológicos que norteiam esta utilização da História da Matemática. Além disso, tentamos sistematizar com o grupo de participantes o significado de "problematização" nessa abordagem. Como procedimentos, utilizamos a leitura de textos e a apresentação de problemas para discussão, primeiramente em pequenos grupos e, a seguir, no grande grupo, buscando a sistematização das idéias envolvidas.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial; Fundamentos; História; Ensino.

ABSTRACT We will report the workshops we gave at IV EPEM (january/1996, São Paulo, SP) and at Meeting of History and Mathematical Education (ICME-8 Satellite meeting, july/1996, Braga, Portugal) to teachers and professors of Mathematics. We had two goals: the first one was to lead teachers and professors to a reflection about the fundaments of differential calculus. We used History of Mathematics to reach this goal. We hoped to pose questions to both, teachers and professors about their conceptions of differential calculus. The second goal was to analyze this methodology that use History of Mathematics to pose questions. Besides, we tried to analyze what was "to pose questions" at this approach. We used both, reading texts and problem discussions as procedure.

KEY-WORDS: Differential Calculus; Fundaments; History; Teach.

*Doutoranda em Educação Matemática - FE - UNICAMP.

**Mestranda em Educação Matemática - IGCE - UNESP - Rio Claro.

INTRODUÇÃO

Esse texto é o resultado de nossas reflexões geradas a partir da apresentação de dois mini-cursos, de seis e três horas, respectivamente, ministrados nos seguintes encontros: IV Encontro Paulista de Educação Matemática (1996, S Paulo, SP) e Encontro de História e Educação Matemática (ICME-8 Satellite Meeting, 1996, Braga, Portugal).

Nossas abordagens foram diferentes nas duas apresentações. Na primeira, abordamos alguns aspectos importantes para o desenvolvimento de noções de Cálculo Diferencial, tais como o problema da continuidade, dos infinitésimos, traçado de tangentes a curvas, diferenciais, derivadas e limites. Para tanto, buscamos na História da Matemática problemas que levaram ao desenvolvimento desses conceitos. Com tais problemas, não enfatizamos somente os aspectos lógico e matemático, mas também os histórico e filosóficos do Cálculo Diferencial.

A ordem de apresentação desses conceitos não seguiu aquela em que geralmente os mesmos se apresentam nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral. Abordamos, num primeiro momento, alguns problemas estudados na Antigüidade e Idade Média, que levaram à emergência dos conceitos anteriormente citados e, num segundo momento, discutimos as respostas das idades Moderna e Contemporânea a esses problemas.

Gostaríamos de ressaltar que não pretendíamos esgotar o assunto nesses dois momentos e também que escolhemos alguns entre muitos problemas que poderiam ser discutidos.

Para a segunda apresentação, em Portugal, reformulamos o curso, retirando alguns temas discutidos na primeira, e acrescentamos uma análise dos princípios metodológicos que norteiam essa utilização da História da Matemática em sala de aula. Nessa parte do trabalho, tentamos sistematizar as idéias do grupo sobre o que é problema, por que problematizar e como problematizar a partir da História da Matemática.

Nos dois mini-cursos, buscamos realizar uma reconstituição histórica, tendo em vista a formulação de problemas que, de algum modo, pudessem contemplar algumas dúvidas dos alunos freqüentemente observadas no processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial.

A seguir, relataremos, parte da reconstituição histórica apresentada, alguns dos problemas e os conceitos matemáticos abordados a partir deles.

PROBLEMAS HISTÓRICOS TRABALHADOS

ZENÃO E OS PARADOXOS DA TARTARUGA E DA FLECHA

Como sabemos, Zenão de Eléa viveu em c. 460 a.C.. Foi discípulo de Parmênides de Eléa que desenvolveu uma filosofia que defendia a unidade e a imutabilidade absoluta do ser.

Zenão é muito conhecido devido aos paradoxos que formulou. Os historiadores discordam em suas interpretações sobre os paradoxos e principalmente sobre a influência que eles exerceram sobre a matemática grega. Por exemplo, Paul Tannery (apud SZABÓ, 1960) acreditava que os argumentos de Zenão eram particularmente dirigidos contra a idéia pitagórica de pluralismo.

Já SZABÓ (1960) interpreta de outro modo os paradoxos de Zenão. Segundo ele, esses argumentos têm a finalidade de demonstrar, por absurdo, fatos que são opostos à experiência do senso comum. Para SZABÓ (1960), os pitagóricos incorporaram o modo de argumentação por absurdo da filosofia eleática, pois ela lhes permitia demonstrar a existência das medidas incomensuráveis.

De qualquer maneira, podemos considerar que, com seus paradoxos, Zenão pretendia demonstrar a impossibilidade de compreensão do movimento.

De acordo com STRUIK (1989, p. 81-82):

> *Os paradoxos de Zenão entraram em conflito com algumas concepções antigas e intuitivas sobre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande. Os gregos acreditavam que a soma de um número infinito de quantidades se podia tornar tão grande quanto se quisesse, mesmo que cada quantidade fosse extremamente pequena* ($\infty \times \epsilon = \infty$)*, e também que a soma de um número finito ou infinito de quantidades de dimensão zero era zero* ($n \times 0 = 0$).

A crítica de Zenão desafiou essas concepções e colocou em questão processos matemáticos que as utilizavam, como, por exemplo, o cálculo do volume da pirâmide. Há, nesses paradoxos, o problema da discussão filosófica sobre o "infinito potencial" e o "infinito atual"[1]. Além da noção de infinito, neles também é discutida a noção de "conjunto" contínuo e "conjunto" discreto.

[1] As definições de "infinito potencial" e "infinito atual" estão baseadas nos princípios aristotélicos de forma, privação da forma e matéria. São esses os princípios de todo movimento (mutação). Se um ser está em uma forma, ele é um "ser em ato", se está na privação dessa forma, é um "ser em potência", ou seja, um "ser em potência" determina a possibilidade da transformação desse ser em uma forma. Segundo Aristóteles, não se pode negar a existência do infinito, porque é necessário que o tempo não tenha começo nem fim, que a série dos números seja infinita e que as grandezas se dividam ao infinito, mas como o infinito em ato (atual) é impossível, devemos reconhecer-lhe uma existência potencial (Cf. GARDEIL, 1967).

Em nosso curso, dos quatro paradoxos de Zenão, escolhemos os dois seguintes com o intuito tanto de arrolar os conceitos matemáticos envolvidos nesses paradoxos quanto de desenvolver uma discussão sobre os conceitos de conjunto contínuo e conjunto denso, uma vez que sabemos serem freqüentes as confusões entre eles:

Suponhamos o espaço e o tempo contínuos.

1) "Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direção, ao longo de uma linha reta. Aquiles é mais veloz do que a tartaruga, mas para alcançá-la ele tem de passar primeiro pelo ponto P, do qual a tartaruga já partiu. Quando chega a P, a tartaruga já avançou para o ponto P1. Que raciocínio devemos fazer para concluir que Aquiles nunca poderá alcançar a tartaruga?"

Suponhamos o espaço e o tempo discretos e, portanto, com uma unidade menor que não pode ser dividida.

2) "Uma flecha, para ir de A a B, deve estar, em cada instante (indivisível), em um espaço (indivisível). Que raciocínio deveríamos fazer para concluir que a flecha nunca chegaria a B?"

3) Quais são os conceitos envolvidos nesses paradoxos?

Após os raciocínios envolvidos e a discussão dos paradoxos, os professores participantes levantaram os seguintes conceitos envolvidos nesses paradoxos: continuidade, limite, séries, densidade, enumerabilidade, ponto de acumulação, sucessão geométrica e conceitos ligados à topologia. Além disso, observaram que as relações entre espaço e tempo e entre infinito potencial e infinito atual também estavam neles envolvidas.

A discussão seguiu em torno da diferença entre conjunto contínuo e conjunto denso e, ao final, apresentamos e analisamos as definições abaixo, exemplificando-as com os conjuntos dos números reais e racionais.

As definições de conjunto contínuo e de conjunto denso são formuladas, atualmente, sobre a relação de ordem linear. Esta última, por sua vez, é definida matematicamente como sendo a relação menor (<).

Postulado de Dedekind: Se k1 e k2 são dois conjuntos disjuntos contidos em k, tais que $k1 \cup k2 = k$ e que todos os elementos de k1 precedam k2, então, existe $x \in k1$, tal que: a) para todo $a \in k$, tal que $a < x \rightarrow a \in k1$; b) para todo $b \in k$, tal que $x < b \rightarrow b \in k2$.

Postulado da densidade: Se a e b são dois elementos quaisquer de k, então, existe $c \in k$, tal que c está entre a e b.

Seqüências discretas: São aquelas que satisfazem o postulado de Dedekind e os seguintes postulados: Todos os elementos de k, à exceção do último, têm sucessor imediato. Todos os elementos de k, à exceção do primeiro, têm precedente imediato.

Conjunto denso: É aquele que satisfaz o postulado da densidade.

Conjunto contínuo: É todo conjunto denso que satisfaz o postulado de Dedekind.

ARQUIMEDES E O TRAÇADO DA RETA TANGENTE À ESPIRAL

Arquimedes viveu de 287-212 a.C. em Siracusa (Itália). Suas obras mais conhecidas são: "O arenário", "O método", "Sobre medidas do círculo", "A quadratura da parábola", "Sobre espirais". Sua geometria era, em certos aspectos, diferente do restante da geometria grega, pois baseava-se em métodos mecânicos que utilizavam balanças, alavancas e corpos em movimento para descobrir e estudar curvas geométricas. No entanto, em suas demonstrações geométricas, Arquimedes aplicava o método de exaustão que era muito utilizado por todos os geômetras gregos da Antigüidade de que temos notícias.

Em nosso curso, apresentamos a construção da Espiral de Arquimedes[2] – Fig. 1 – pelo método mecânico e por coordenadas polares.

O método de coordenadas polares já era conhecido pelos professores participantes do curso. Para mostrar o método mecânico, inventamos um material construído do seguinte modo: fixamos uma régua em um ponto de uma folha, de modo que ela pudesse girar em torno desse ponto. Assim, tentamos girar a régua ao mesmo tempo em que deslizávamos sobre ela uma caneta. Nosso objetivo, aqui, foi discutir as dificuldades inerentes à aplicação do método mecânico quando utilizado em sala de aula com um material rudimentar e o porquê da necessidade das coordenadas polares.

[2] A espiral de Arquimedes é o lugar geométrico dos pontos que partem de uma origem O e se movem com velocidade constante ao longo de uma barra, que, por sua vez, gira em torno de O, também com velocidade constante. Ambos os movimentos são simultâneos.

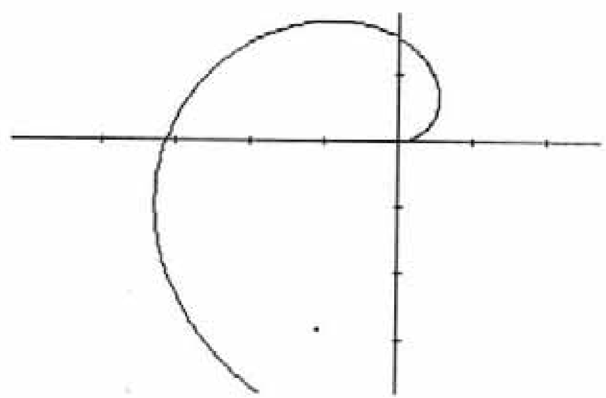

Figura 1

Após isso, apresentamos o traçado da reta tangente à espiral, pelo método de Arquimedes, descrito abaixo:

- Dada a espiral de centro **O**, traçaremos a reta tangente a ela, pelo ponto **P**.
- Trace o raio vetor **OP** e o arco de circunferência **PK** (centro **O**, raio **OP**, sendo **K** o ponto do eixo horizontal).
- Trace **OT** perpendicular a **OP** e de comprimento igual ao arco **PK**.
- **PT** é a tangente à espiral.

Um dos problemas importantes para o desenvolvimento posterior do Cálculo Diferencial foi o da busca por métodos gerais para traçados de tangentes a curvas geométricas. Por isso, apresentamos esse método de traçado da tangente à espiral com o intuito de discutir a possibilidade, ou não, de sua generalização para outras curvas.

Para isso, perguntamos aos professores se este método seria válido, também, para o traçado da tangente a uma circunferência e, em caso positivo, que tentassem traçar essa tangente.

Nossa expectativa era de que os professores percebessem que o método não era generalizável a outras curvas, assim como muitos outros conhecidos por matemáticos da Antigüidade. Historicamente, essa impossibilidade de generalização levou à busca de um método geral, o que só ocorreu na Idade Moderna, após os estudos sobre o movimento realizados na Idade Média.

Entretanto, em nosso curso, nem todos os professores perceberam essa impossibilidade. Alguns, após a tentativa de traçado, explicaram o fracasso com base

na imprecisão dos instrumentos (régua e compasso). A maioria demorou algum tempo para perceber que, para o caso da circunferência, o método de traçado de tangente a espiral seria válido somente se existissem triângulos com dois ângulos retos na geometria euclidiana.

Isto ocorreu tanto no EPEM como no HEM, o que fez com que levantássemos duas conjecturas para explicar a não percepção ou a percepção tardia dessa impossibilidade de generalização: ou esse fato era devido ao conhecimento dos professores sobre o fato de os traçados de tangentes serem um conhecimento local[3], ou à uma tradição escolar de não se propor problemas sem solução, com várias soluções ou com uma solução negativa no ensino da Matemática.

DEMÓCRITO E O DILEMA DO CONE

A teoria atomista foi criada por Leucipo (c. de 430 a.C.), e seu defensor mais conhecido foi Demócrito (c. 400 a.C.). Para os atomistas, *o universo era composto de infinitos átomos e de um espaço infinito e vazio* (BARON, 1985, p. 19). Para a geometria, havia a noção de átomo geométrico. Segmentos de retas, superfícies e sólidos eram compostos por um número finito, mas muito grande, de átomos. Assim, por exemplo, uma superfície seria o átomo geométrico de um sólido.

O método dos atomistas permitia encontrar resultados, tais como o volume da pirâmide e o volume do cone; porém, não era rigoroso como o método da exaustão, e não sabemos se havia algum outro método para demonstrações com raízes na filosofia atomista. Mesmo assim, o método dos atomistas foi usado por vários matemáticos anteriores a Newton, especialmente por Kepler e Cavalieri, para cálculos de volumes, áreas e comprimentos.

Em nosso curso, apresentamos aos participantes o **Dilema do cone**, criado por Demócrito:

> *Se cortarmos um cone por um plano paralelo à base (plano bem próximo à base), o que podemos dizer das superfícies que formam as seções? Elas são iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, tornarão o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser constituído por círculos iguais e não diferentes: o que é um absurdo* (HEATH apud BARON, 1985, p. 20).

[3]O conhecimento local tem duas características básicas: ele é um conhecimento correto em alguns limites e o aluno ignora a existência desses limites. Para uma discussão aprofundada sobre "conhecimento local", ver LÉONARD, F., SACKUR, C. (1990, p. 205-240).

Após isso, perguntamos aos professores quais conceitos matemáticos poderiam estar relacionados ao Dilema do Cone. Segundo eles, os conceitos envolvidos seriam: função contínua, integração, conceitos da geometria projetiva, limite, densidade. Nosso objetivo ao propormos esta atividade era debatermos o possível uso desse dilema no desenvolvimento destes conceitos em sala de aula.

OS MÉTODOS DE DERIVAÇÃO DE NEWTON E DE LEIBNIZ

No início da Idade Moderna, Descartes realizou estudos sobre tangentes a curvas e desenvolveu um método geral de natureza algébrica para o traçado de tangentes. Redefiniu reta tangente a uma curva como sendo a perpendicular à reta normal num ponto. Porém, na prática, seu método se mostrou de difícil aplicação devido à sua complexidade. Somente com os cálculos diferencial e integral de Newton e Leibniz foram desenvolvidos métodos gerais e mais simples de serem aplicados.

Tanto Newton como Leibniz buscavam, com o Cálculo, demonstrar a inteligibilidade da natureza. Porém, cada um compreendia a natureza de forma diferente e desenvolveu um Cálculo diferente.

Para Newton, o Universo podia ser compreendido como uma máquina regida pela lei de causa e efeito e composta de várias engrenagens que se encaixavam como a maquinaria de um relógio. O método mecanicista consistia em decompor cada fenômeno em elementos mais simples e depois reconstruí-lo a partir destes elementos para compreendê-lo. Os princípios universais encontrados por Newton eram leis pré-determinadas e imutáveis e os fenômenos eram sempre regidos por estas leis.

Para Leibniz, o Universo era composto por mônadas concebidas não como unidades aritméticas, puramente numéricas, mas como unidades dinâmicas (isto é, unidades sempre em mutação). Leibniz, em seu Cálculo, buscava as leis de transformação desse Universo. Para ele, o todo não era composto de partes mecânicas, mas era compreendido por uma totalidade orgânica. Cada parte continha um "todo" em potencial.

Newton desenvolveu seu Cálculo (a **Teoria das Fluxões**) como instrumento auxiliar para suas pesquisas sobre mecânica. Tal teoria foi desenvolvida com base nas obras de Descartes e Wallis. Seus temas centrais eram as séries de potências, tratamento algorítmico, diferenciação como inversa da integração e concepção de variável. Newton escrevia uma curva como uma série de potências e, dessa forma, conseguia aplicar seu método de quadraturas para qualquer curva. Como decorrência, descobriu que a derivada era a inversa da integral. Esta era uma conseqüência imediata de sua definição de integral. Desenvolveu algoritmos gerais para calcular máximos, mínimos, tangentes e curvaturas. Em sua teoria, utilizava os conceitos de 'fluentes' e 'fluxões'. Fluentes são as quantidades que fluem (quantidades que se modificam). É o que hoje em dia

chamamos de variáveis. Fluxões são as velocidades com que fluem, é o que chamamos de derivadas. Para Newton, derivada é uma velocidade de fluência.

Leibniz desenvolveu seu Cálculo (a **Teoria dos Infinitesimais**) como uma linguagem universal que tentava exprimir todas as teorias matemáticas até então conhecidas. Sua idéia era reduzir a Lógica ao Cálculo. Ao contrário de Newton, sua interpretação dada ao Cálculo não era física, mas filosófica. Um diferencial dx era uma diferença infinitesimal entre dois valores de x infinitamente próximos. A derivada era uma diferenciação sucessiva de infinitésimos, enquanto a integral era uma soma sucessiva de infinitésimos. Dessa maneira, concluiu que integral e derivada eram operações inversas, mas isso não era uma conseqüência direta da sua definição de integral. Criou os símbolos $\int$ e dx e os usava como operadores. Isso tornou sua teoria mais analítica, enquanto a de Newton era mais geométrica, e também mais aplicada às várias funções, devido a sua notação mais simples e mais apropriada.

Nem Newton, nem Leibniz deram fundamentação suficientemente consistente para o Cálculo. Conseguiram chegar a métodos gerais e notação adequada; porém, persistia o problema dos fundamentos. Ambos trabalharam com quantidades infinitamente pequenas e estavam conscientes das dificuldades lógicas inerentes a esse uso.

Em nosso curso, apresentamos o seguinte processo de derivação newtoniano, com o intuito de discutir esses problemas de fundamentos. Solicitamos aos grupos que procurassem algum erro na argumentação apresentada. Não era nossa intenção criticar o processo de Newton a partir de nosso conhecimento atual, mas entender a natureza das críticas que foram feitas na época e a conseqüente necessidade de fundamentação do Cálculo. O processo de derivação apresentado foi o seguinte:

Sejam : a função $y = x^3$, $\dot{x}$ a fluxão de x, $\dot{y}$ a fluxão de y, t um infinitésimo de tempo.
Assim, $\dot{x}t$ é um incremento para x e $\dot{y}t$ é um incremento para y.

$$y + \dot{y}t = (x + \dot{x}t)^3$$
$$y + \dot{y}t = x^3 + 3x^2\,\dot{x}t + 3x\,\dot{x}^2\,t^2 + (\dot{x}t)^3$$
$$x^3 + \dot{y}t = x^3 + 3x^2\,\dot{x}t + 3x\,\dot{x}^2\,t^2 + (\dot{x}t)^3$$
$$\dot{y}t = 3x^2\,\dot{x}t + 3x\,\dot{x}\,t^2 + \dot{x}t^3$$
$$\dot{y} = 3x^2\,\dot{x} + 3x\,\dot{x}^2\,t + t^2\,\dot{x}$$

Como t é um infinitésimo, podemos considerar que $y = 3x^2\,\dot{x}$.

Essa discussão foi muito frutífera, pois foram levantadas questões sobre a dificuldade da notação; sobre o fato do infinitésimo ser considerado nulo em um momento e em outro não; sobre o fato de o infinitésimo $\dot{x}t$ ser considerado um produto. A seguir, apresentamos as críticas feitas na época por Michel Rolle e George Berkeley.

Michel Rolle (1652-1719) abriu um debate em julho de 1700, ou seja, logo após as publicações dos trabalhos de Leibniz (1686) e de Newton (1671), que perdurou por dois anos com Varignon (1654-1722). Foram debatidos dois aspectos problemáticos do Cálculo: um com relação aos conceitos e princípios fundamentais e outro referente ao fato de o Cálculo conduzir a erros. No primeiro aspecto, discutia-se a falta de rigor lógico dos conceitos, destacando a falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande (principalmente sobre os diferenciais de ordem superior); os diferenciais de Leibniz, segundo Rolle, podiam ser interpretados tanto como quantidades não nulas determinadas, quanto como zero. Rolle sustentava que no Cálculo o todo era igual à parte, pois uma grandeza x somada ao seu diferencial dx era igual a ela própria; e que, além disto, os diferenciais eram manipulados diferentemente, conforme as necessidades para se atingir a solução do problema (a solução já era conhecida anteriormente). Varignon, com base no método newtoniano, respondeu a essas críticas de Rolle; porém, não satisfatoriamente, pois usou apenas um jogo de palavras que não esclareceu nada.

No segundo aspecto, Rolle usou três curvas para calcular máximos e mínimos como exemplos de que o Cálculo conduzia a resultados diferentes da regra de Hudde e de Fermat (todos algébricos). Nesse caso, Varignon respondeu satisfatoriamente, mostrando que Rolle não tinha aplicado o Cálculo corretamente e que não havia diferença entre os resultados obtidos pelos três métodos.

George Berkeley (1685-1753) publicou "O Analista" em 1734, no qual criticava os matemáticos incrédulos, que rejeitam a religião, mostrando que os métodos infinitesimais do Cálculo são tão obscuros quanto os mistérios da fé. Suas críticas eram de dois tipos. Os resultados obtidos pelo Cálculo, durante os trinta anos passados, já tinham se mostrado seguros e fecundos; assim, as críticas de Berkeley se dirigiam aos fundamentos, à falta de rigor e tentavam mostrar que esses resultados eram exatos devido a um jogo de compensação de erros.

As críticas de Berkeley foram um dos fatores que levaram os matemáticos da época a iniciarem uma busca para fundamentar melhor o Cálculo. Outros fatores foram a separação entre a pesquisa em Matemática e a pesquisa em Física e a necessidade de ensino do Cálculo nas escolas Politécnica e Normal, criadas logo após a Revolução Francesa. Com esse objetivo surgiram os trabalhos de Euler, dos Bernoulli (Nicolas e Daniel), com relação à estruturação da Análise, de D'Alembert e Robins, com relação à idéia de limite e de Lagrange, Laplace, Cauchy e outros com relação à formalização da Análise.

O MÉTODO DE DERIVAÇÃO DE KARL MARX

Marx (1818-1883) começou a se interessar pelo Cálculo devido às suas aplicações às leis econômicas enunciadas em "O Capital" (1867). Achava que no Cálculo havia uma pura manifestação dialética e, em seu "Manuscritos Matemáticos", publicados apenas em 1933 (publicação de parte da obra) e 1968, fez críticas ao Cálculo de Newton e Leibniz:

> *Quando dx não é uma diferença normal entre duas grandezas, quer dizer, quando dx não é um número normal, como é que se pode justificar a aplicação das regras para números normais?* (MARX apud GERDES, *1983, p. 37).*
>
> *Os diferenciais eram escamoteados para se obter o resultado correto. (...) Marx achava místico o cálculo de Newton e Leibniz por eles terem introduzido metafisicamente os diferenciais, ou seja, sem clarificar seu nascimento e desenvolvimento, nem ter analisado a natureza das suas propriedades específicas* (MARX apud GERDES, 1983, p. 38)

Propusemos aos professores que observassem o processo de derivação pelo método de Marx, abaixo, e o comparassem ao processo de Newton, visto anteriormente.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{(x_1)^3-(x_0)^3}{x_1-x_0}=\frac{(x_1-x_0)\,.\,\{(x_1)^2+x_1\,.\,x_0+(x_0)^2\}}{x_1-x_0}=(x_1)^2+x_1x_0+(x_0)^2$$

Marx chamava de derivada provisória a expressão $(x_1)^2 + x_1x_0 + (x_0)^2$. Segundo ele, quando a variável x_1 regressa a x_0, teremos:

I) à direita, a expressão $(x_1)^2$ vai para $(x_0)^2$; a expressão $x_1.x_0$ vai para $x_0.x_0$, ou seja, $(x_0)^2$.

Então, a derivada provisória transforma-se em $(x_0)^2 + (x_0)^2 + (x_0)^2 = 3.\ (x_0)^2$.

Essa última expressão chama-se derivada definitiva.

Deste modo, a derivada definitiva seria a derivada provisória reduzida ao seu valor mínimo.

II) à esquerda, x_1 regressa até x_0 e finalmente fica igual a x_0. Após x_1 ter chegado a x_0, temos:

$x_1 - x_0 = 0$, o que implica $\Delta x = x_1 - x_0 = 0$

$\Delta y = y_1 - y_0 = (x_1)^3 - (x_0)^3 = 0$.

O membro da esquerda, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, transforma-se em $\frac{0}{0}$.

Segundo Marx, não precisaríamos nos preocupar com esse quociente, pois o lado direito da igualdade está bem fundamentado. Além disso, Marx denomina o símbolo dy/dx de derivada definitiva e trabalha com ele como símbolo operacional.

Os professores, após realizarem a comparação, concluíram que os problemas de fundamentos não haviam sido resolvidos por Marx, uma vez que ele desconsidera o quociente $\frac{0}{0}$. A partir dessa conclusão, apresentamos a mais nova tentativa de fundamentação do Cálculo Diferencial, a Análise Não-Standard.

A TENTATIVA DE ROBINSON DE FUNDAMENTAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Em 1966, Abrahan Robinson (1918-1974) publicou o livro *Análise não-standard*, no qual apresentava um novo conjunto numérico: o dos números hiper-reais, formado pelos números reais, pelos infinitos e pelos infinitésimos. Nesta obra, Robinson apresenta a mais nova tentativa de fundamentação do Cálculo Diferencial.

Em nosso curso, como exemplo de aplicação dessa teoria, apresentamos o seguinte processo de derivação:

a derivada de $y = x^2$:

$dy = d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2.x.dx + dx^2 - x^2 =$

$2.x.dx + dx^2 = dx.(2x + dx)$

$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$

A derivada é a parte standard do hiper-real $\frac{dy}{dx}$, ou seja, 2x.

Com a apresentação da análise não-standard, encerramos a primeira parte do trabalho. A parte seguinte – de considerações metodológicas – só foi realizada no HEM.

REFLEXÕES PEDAGÓGICAS ACERCA DE UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO CÁLCULO

Nessa segunda parte do curso, discutimos com os professores a maneira como usamos a História da Matemática nesse trabalho, ou seja, como **fonte de problematização** de alguns conceitos construídos e reformulados ao longo do tempo. Iniciamos essa discussão, explicitando o que estávamos entendendo por problema.

Adotamos as seguintes noções de situação-problema:

> *(...) a situação problema é uma situação suscetível de evoluir e fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Trata-se, não de comunicar os conhecimentos que se deseja ensinar, mas de encontrar uma situação na qual esses conhecimentos sejam a estratégia ótima – dentre as possíveis – para obter o resultado buscado pelo aluno* (BROUSSEAU, 1983, p. 179).

Segundo HIGUERAS e FERNÁNDES (1989, p. 130), *o objetivo de uma situação problema é permitir que o aluno adquira novos conhecimentos, tomando, em primeiro lugar, a consciência da insuficiência de seus antigos conhecimentos*.

Ao utilizarmos a História da Matemática como fonte de problematização, nosso intuito era realizar uma discussão que pudesse ser pedagogicamente esclarecedora.

Segundo MIGUEL (1993, p. 109),

> *(...) para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Tais histórias, no meu modo de entender, tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros, determinados problemas e métodos e não outros, a enfatizar a reconstituição, não tanto dos resultados matemáticos, mas dos contextos epistemológicos, psicológicos, sócio-políticos e culturais de sua produção, contribuindo, desse modo, para a explicação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas.*

É interessante esclarecermos que a parte histórica apresentada neste texto também o foi nos cursos, sempre com o objetivo de levantar alguma problematização. Entendemos que a participação da História da Matemática no processo de aprendizagem por meio da mera narração dos, assim denominados, "fatos históricos" não fornece subsídios para que os alunos desenvolvam novas concepções de Matemática além da tradicional. A história unicamente narrativa também não colabora para a construção de conceitos matemáticos. Devido a isso, optamos por uma abordagem da História da Matemática que privilegiasse seus aspectos filosóficos e fornecesse problemas que pudessem ser utilizados naquela construção. Esses problemas não foram necessariamente obstáculos epistemológicos na formação histórica dos conceitos, mas possibilitam discutir algumas dúvidas que, em nossa prática discente e docente, percebemos serem freqüentes na construção pedagógica de alguns conceitos envolvidos no tema. O levantamento dessas dúvidas não foi obtido por meio de uma pesquisa sistemática.

Encerramos nosso curso, perguntando aos professores se as concepções que tinham do Cálculo Diferencial haviam mudado após o trabalho que haviam desenvolvido nesse curso e por quê.

Quase metade dos professores presentes respondeu que suas concepções de Cálculo não haviam mudado. Destes, alguns disseram que o curso os havia alertado para problemas de fundamentos relativos ao ensino desse tema; outros afirmaram que o curso havia servido para colocar mais dúvidas sobre o assunto.

A outra parte dos professores respondeu positivamente à questão, apontando que foram abordados muitos aspectos que não conheciam, como, por exemplo, as questões do rigor, das mudanças históricas que ocorrem na definição de um conceito, e que muitas idéias se estabeleceram devido a conflitos. Entre esses, alguns também colocaram questões relativas ao ensino. Uma participante, professora de Cálculo Diferencial, relatou-nos o seguinte: *muitas vezes, ensino os conceitos e não dou atenção a detalhes que, tanto para mim quanto para meus alunos, trariam uma visão e conhecimento mais sólidos, possibilitando, assim, uma ampliação dos conhecimentos.*

Todos eles afirmaram que a participação no curso os deixou com a necessidade de aprofundar seus estudos sobre o tema.

Para concluir, gostaríamos de explicitar que tínhamos consciência da impossibilidade de qualquer mudança de concepção em um curso de três horas e que nossa pergunta foi no sentido de conseguirmos uma avaliação de nosso trabalho. Porém, acreditamos que essa abordagem da História da Matemática foi adequada aos nossos objetivos de problematizar os fundamentos e o ensino do Cálculo Diferencial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. Epistemologie et didactique. *Recherches en didactique des mathematiques*, v. 10/2.3, p. 242-283, 1990.

BARON, M. *Curso de História da Matemática: as origens e desenvolvimento do Cálculo*. Brasília: UnB, 1985, 3. v.

BLAY, M. Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley. *Revue d'historie des sciences*. Paris, Tome XXXIX, p. 223-253, Juillet-septembre, 1986.

BROSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, Paris, v. (4).2, 1983.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*, 7ª ed. Lisboa, 1978.

EDWARDS JR, C. H. *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979.

GARDEIL, H. D. *Iniciação à filosofia de São Tomás de Aquino - Cosmologia*. São Paulo: Duas Cidades, 1967.

GERDES, P. Karl Marx, Arrancar o véu misterioso à matemática. *Tlanu Revista de Educação Matemática*, Maputo, n. 5, s/d.

GRABINER, J. V. Is mathematics truth time-dependent? *The american mathematical monthly*, april, 1974.

________. The mathematicians, the historian, and the history of mathematics. *Historia Mathematica*, v. 2 p. 439-447, 1975.

GRATTAN-GUINNESS, I. *Del Cálculo a la teoria de Conjuntos*. Madrid: Alianza Universidad, 1984.

HIGUERAS, L. R., FERNÁNDES, J. L. R. *Los obstaculos en la enseñanza de la matematica.* IV Jornada Andaluza de Educación Matematica - Thales. Benalmadena - Málaga, p. 125-132, set./89.

JONES, P. The history of mathematics as a theaching tool. *Historical topics for the mathematics classroom*. Washington, D.C.: NCTM, 1969.

LEONARD, F., SACKUR, C. Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en didactique des mathematiques*, v. (10)2.3, p. 205-240, 1990.

MIGUEL, A. *Três estudos sobre História e Educação Matemática*. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 1993. (Tese, Doutorado).

NEWTON, I. *Principia-princípios matemáticos de filosofia natural*. S. Paulo: Nova Stella Editorial, 1990, v. 1.

STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1989.

SZABÓ, A. The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definions an axioms. *Scripta Mathematica*, v. XXVII, n. 2, p. 113-139, 1960.

Resenha Crítica[1]

Knijnik, Gelsa. *Exclusão e Resistência: Educação Matemática e Legitimidade Cultural*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

Samuel Edmundo López Bello*

Este livro teve sua origem na tese de Doutorado intitulada "Cultura, Matemática, Educação na luta pela terra", desenvolvida pela autora – Dra. Gelsa Knijnik – no curso de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tanto o título do livro como o da tese representam desde já uma postura e um compromisso político assumido pela autora, que, partindo do questionamento sobre *que relações de poder são (re)produzidas no processo de apropriação e uso dos saberes populares e acadêmicos*, teve como objetivo problematizar sociologicamente a questão da diferença cultural, especificamente as inter-relações entre os saberes populares e os saberes acadêmicos no contexto da Educação Matemática de grupos socialmente subordinados; neste caso, do Movimento dos Sem-Terra (MST).

Atualmente, vivemos uma ordem social, política e cultural muito diferente daquela existente há anos atrás. Grupos cultural e/ou socialmente diferentes – minoritários – não se mantêm mais invisíveis, mas explicitam suas diferenças e apresentam suas necessidades específicas. Neste novo contexto de inter-relações entre grupos "subordinados" e grupos "dominantes", a Educação, especialmente a Educação Matemática, deve incorporar em seu trabalho prático e no desenvolvimento teórico não só questões meramente econômicas, mas também problemas de discriminação social, de pressão, de desigualdades. No marco da Sociologia da Educação, essas relações tensas de poder são vinculadas à Educação Matemática através do que a autora denomina "abordagem Etnomatemática", a qual se caracteriza pela sua natureza e vinculação ao estudo e tratamento da diversidade em seus vários aspectos.

O livro como um todo, está estruturado em cinco capítulos, além de um prefácio preparado pelo professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio, uma parte introdutória e uma seção destinada às referências Bibliográficas.

[1]Muitas das idéias contidas nesta resenha foram produto de uma discussão a respeito da versão original da tese de Doutorado da autora junto com os mestrandos Pedro Paulo Scandiuzzi e Wanderleya Nara Gonçalves. Essa discussão foi feita na disciplina de Tópicos Especiais de Educação Matemática, no interior do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da FE-UNICAMP, no 1º semestre de 1996.

*Doutorando em Educação Matemática – FE/UNICAMP