

2. ¿Cuál es el contenido y la estructura del conocimiento del profesor que fundamentan las decisiones de enseñanza del concepto de función?
3. ¿Cuál es el papel del profesor en la definición de las prácticas matemáticas constituidas en el aula durante la enseñanza del concepto función?
4. ¿Cómo desarrollar reflexiones metodológicas en paralelo a las reflexiones realizadas sobre los objeto de estudio en Educación Matemática?

Las primeras preguntas buscan establecer la complementariedad entre perspectivas cognitivas y sociológicas en el análisis del conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas. La última cuestión está dirigida a desarrollar una línea de reflexión de carácter metodológico en las investigaciones en Educación Matemática, y en particular en la agenda de investigación centrada en el conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas.

Metodológicamente las investigaciones realizadas se apoyaron en la colaboración entre profesores e investigadores y se encuadran dentro de la tradición interpretativa en las investigaciones educativas tomando la forma de estudios de casos. Una parte de los datos se obtuvieron desde entrevistas con los profesores centradas en la descripción de sus procesos interpretativos como una manera de caracterizar los contenidos matemáticos como objetos de enseñanza aprendizaje. Para la obtención de los datos y el análisis se realizó una adaptación de la técnica de rejillas desde la Teoría de los Constructos Personales de Kelly (GARCÍA, 1997; GARCÍA & LLINARES, 1998). Otros datos se obtuvieron desde la realización de entrevistas sobre la planificación específica del profesor de una unidad didáctica sobre funciones, desde las grabaciones en video de las clases con entrevistas antes y después de dichas grabaciones y finalmente, el visionado y análisis de las clases conjuntamente entre profesores e investigadores para identificar aspectos relevantes de la práctica del profesor. Además, los profesores también realizaron tareas específicas propuestas por los investigadores como instrumentos alternativos para la obtención de la información. Estas tareas que se le propusieron al profesor fueron el análisis de situaciones de enseñanza hipotéticas y la realización de clasificaciones y análisis de problemas y ejercicios procedentes de libros de texto (ver LLINARES 1996 para una descripción de los instrumentos empleados). Desde el punto de vista analítico a los datos procedentes desde estos instrumentos se les aplicó una aproximación inductiva para su análisis (LLINARES, en prensa). Las dos aproximaciones metodológicas planteadas en estos estudios (adaptación de las rejillas de Kelly y la aproximación inductiva) aportan información sobre el *contenido del conocimiento* profesional del profesor de matemáticas y su práctica permitiendo desarrollar una triangulación de los resultados.

La aproximación inductiva, según la hemos desarrollado, proporciona información sobre *el uso del conocimiento* en diferentes fases del proceso de enseñanza (preactiva, interactiva y postactiva). Además, la adaptación de la técnica de rejillas al análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas permite obtener información sobre *la estructura del conocimiento* (ver GARCÍA & LLINARES, 1998; y LLINARES, en prensa, para una descripción del esquema analítico utilizado). De esta manera, las investigaciones realizadas cumplen un doble papel:

de triangulación (MATHISON, 1988) (sobre el contenido del conocimiento); y proporcionando información de carácter complementario (sobre el uso y la estructura del conocimiento) desde perspectivas psicológicas (estructura del conocimiento) y sociológicas (uso del conocimiento y prácticas habituales en el aula).

## 5. Algunos resultados

En esta sección describiremos algunos de los resultados obtenidos hasta este momento, organizados alrededor de tres aspectos que creemos tienen importancia en la descripción de la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, los procesos de innovación de la enseñanza de tópicos matemáticos específicos y la práctica profesional del profesor de matemáticas. Estos aspectos son:

las formas de conocer el profesor las nociones matemáticas como objetos de enseñanza-aprendizaje (reconstrucción subjetiva);

la relación entre creencias y práctica. La generación de dilemas de enseñanza;

la transparencia en el uso de los modos de representación como una característica del papel del profesor en la definición de las prácticas matemáticas en el aula.

### 5.1. La reconstrucción personal de las nociones matemáticas como objetos de enseñanza-aprendizaje

Los dos profesores de nuestro estudio (SARA y PABLO) tenían una buena preparación en relación al contenido matemático función ya que habían estudiado cinco años de matemáticas en la Universidad (conocimiento de matemáticas), y también conocían las gráficas, las situaciones, las formulas como diferentes formas de representar el contenido durante la enseñanza para fomentar una comprensión sig-

nificativa del concepto en sus alumnos (conocimiento de contenido pedagógico). Los dos profesores también tenían conocimiento de lo que los alumnos llevan a la situación de enseñanza, en relación a lo que suponían eran las concepciones previas de sus alumnos en relación al concepto función. Pero los dos profesores tenían diferentes formas de conocer el concepto función como objeto de enseñanza-aprendizaje. Es decir, los dos profesores enfatizaban diferentes aspectos de lo que constituía el concepto función como objeto de enseñanza- aprendizaje y parecía que habían integrado estos aspectos del conocimiento de forma diferente.

Sara organizaba el contenido del concepto función para su enseñanza alrededor de dos ideas. Por una parte Sara intentaba tener en cuenta las concepciones previas de sus alumnos (por ejemplo que los alumnos identifican las funciones con la función lineal) y lo que podría resultar fácil o difícil (por ejemplo las dificultades en entender la noción de pendiente). Por otra parte, Sara intentaba complementar la idea de la función como un algoritmo en el que la función implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo a una fórmula (que caracteriza una concepción acción de la noción de función) como paso previo a la interiorización de la noción de relación entre variables que pudiera mostrar una concepción proceso. Para desarrollar estas dos ideas (vinculadas a su conocimiento de la imagen del concepto de sus alumnos y búsqueda de la complementariedad de las concepciones sobre las funciones) se apoyaba en la idea de la función como un modelo para estudiar la realidad. Esto la llevó a considerar los modos de representación, las traslaciones entre ellos y las actividades de lectura e interpretación de gráficas como parte del contenido a enseñar.

Por otra parte, la forma de conocer el concepto función de Pablo estaba organizada alrededor de otras dos ideas. De un lado, Pablo parecía enfatizar la existencia de diferentes tipos de funciones (por ejemplo funciones racionales e irracionales, lineales, exponenciales, logarítmicas); y de otro, enfatizaba algunos procedimientos como composición y cálculo de funciones inversas. Estos dos aspectos conllevaban un énfasis sobre el modo algebraico en las representación de las funciones. El papel de los diferentes modos de representación y las relaciones que se pueden establecer entre funciones y contextos reales parecían tener menos importancia en su reconstrucción del concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Estas dos formas de reconstruir el concepto función como objeto de enseñanza-aprendizaje de Sara y Pablo revelan el producto de la elaboración didáctica y transformación heurística del contenido realizado por los profesores. Un aspecto, que muestra como el profesor elabora y transforma el concepto función como objeto de enseñanza-aprendizaje es la identificación del contenido diferente en las dos reconstrucciones realizadas; es decir, la consideración de la imagen del concepto y de las perspectiva proceso del concepto función (Sara) y el énfasis en el modo de representación algebraico (Pablo). Sara quería que los alumnos superaran la imagen del concepto que suelen traer a sus clases, por lo que se apoyaba en un uso flexible de di-

ferentes modos de representación (LLINARES, en prensa). Pablo adoptaba una perspectiva centrada en el contenido matemático enfatizando las relaciones entre el modo de representación algebraico y algunos procedimientos algebraicos.

Los dos profesores se apoyaban en diversos aspectos del concepto función como un objeto de enseñanza-aprendizaje: conocimiento del concepto matemático, conocimiento de contenido pedagógico y conocimiento de las características de aprendizaje de los alumnos. Sin embargo el énfasis que cada profesor colocaba sobre cada una de estas componentes no era el mismo. Por una parte el conocimiento de Sara de la imagen del concepto función en los alumnos estaba muy presente en su forma de actuar, junto a la necesidad de considerar el vínculo entre una perspectiva acción y proceso para el concepto función. Por otra parte, Pablo aunque conocía lo que podía resultar fácil o difícil a los alumnos e incluso conocía que la comprensión de los alumnos está vinculada al tipo de tareas que hacen (por ejemplo un abuso de las funciones lineales puede hacer pensar a los alumnos que las funciones son solo lineales) el énfasis que Pablo colocaba sobre estos aspectos era menor.

Esta situación muestra que el proceso de elaboración del conocimiento en las situaciones prácticas hace que los profesores subrayen aspectos distintos. Este énfasis en aspectos diferentes del contenido matemático que hay que enseñar llega a caracterizar la práctica de los profesores. En este sentido los casos de Sara y Pablo son ejemplos de los procesos de elaboración del contenido que el profesor realiza desde su experiencia y considerando su comprensión del concepto matemático (saber de referencia, conocimiento proposicional), realizando una reconstrucción personal de las nociones matemáticas como objetos de enseñanza-aprendizaje (un análisis detallado de los procesos de reconstrucción personal del concepto función de Pablo y Sara ha sido realizado en GARCÍA, 1997; GARCÍA y LLINARES, 1999; LLINARES, en prensa).

## 5.2. Relación entre las creencias y la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje: la generación de dilemas en la enseñanza

Otro aspecto que ha resultado relevante en la descripción del conocimiento y la práctica profesional del profesor de matemáticas ha sido la relación entre sus concepciones sobre el aprendizaje y la gestión de los procesos de enseñanza-aprendizaje. En cierta medida Sara estaba alineada con una retórica constructivista. Sin embargo podemos considerar que mantenía una perspectiva constructivista "light" ya que aunque creía que hay que apoyarse en la forma en la que los alumnos están aprendiendo para desarrollar nuevas tareas, su planificación de las clases solo eran modificadas en relación al tiempo (la sucesión de tareas previstas era la misma aunque el tiempo previsto para cada una de ellas pudiese variar). Sin em-

bargo, su gestión de los procesos de enseñanza-aprendizaje venía caracterizada por sus intentos de provocar el desequilibrio y favorecer la reflexión entre sus alumnos pidiéndoles que explicaran sus respuestas y propusieran argumentos y potenciando el trabajo en grupo. Por otra parte, Sara también creía que en las matemáticas escolares existen procedimientos que los alumnos deben memorizar primero aunque su comprensión venga luego. Esta manera de dotar de significado a la situación en la que se encuentra (proceso interpretativo) le planteaba un dilema entre lo que podría ser un problema o ejercicio y su utilización en las situaciones de enseñanza. Es decir, Sara desde sus concepciones sobre el aprendizaje se planteaba la relación entre ejercicio y problema en la enseñanza de las matemáticas como una tensión que debía resolver en determinados momentos. Era una preocupación en el nivel de la planificación de las tareas instruccionales que debía presentar a sus alumnos y de las características que debían tener las tareas. Así, por una parte, los problemas eran vistos como medios para que los alumnos doten de significado a los diferentes aspectos del concepto función. Y eso era importante. Sin embargo, por otra parte, Sara pensaba que debía poner ejercicios repetitivos a sus alumnos para que llegaran a memorizar determinados procedimientos aunque no tuvieran una buena comprensión. Esta situación dicotómica le planteaba la tensión al tener que decidir en cada momento donde colocar el énfasis (en los problemas o en los ejercicios) lo que conllevaba la percepción de no saber si estaba haciendo lo correcto (LLINARES, en prensa).

Por otra parte, Pablo también manifestó ciertos dilemas que ponían de manifiesto la complejidad de la relación entre sus creencias y su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, por ejemplo, aunque Pablo conocía la idea de la Reforma de que la enseñanza en grupos y la interacción pueden ser positivas para el aprendizaje de las matemáticas, él pensaba que cuando realmente se aprenden matemáticas es cuando se está trabajando individualmente el problema matemático. Esta idea se reflejaba en su práctica al conceder al trabajo en grupo solo un papel motivador y como inicio de la tarea. También, esta concepción sobre el aprendizaje se reflejaba en su organización de los alumnos por parejas en su clase y no favoreciendo en exceso el trabajo en grupo. El dilema que tenía que manejar Pablo estaba centrado en cuando el profesor debe desarrollar una enseñanza más dirigida y proporcionando información vs. a cuando el profesor debe dejar a los alumnos trabajar en grupo y seguir su propio proceso. La decisión en cada caso conllevaba la percepción de si estaba haciendo lo correcto en cada momento ya que con una enseñanza centrada en el trabajo en grupo y las discusiones colectivas no se adelanta tanto en el currículum, pero sin embargo el currículum previsto hay que trabajarlo en clase (un análisis detallado de este aspecto de la enseñanza de Pablo pueden ser visto en LLINARES, 1999).

En este sentido, las creencias sobre el aprendizaje de los dos profesores integradas en el contenido del conocimiento profesional nos ayudan a entender las formas diferentes en las que los profesores definen y comprenden las situaciones en las que deben tomar decisiones. Así, los dilemas a los que se enfrentan los pro-

fesores durante la enseñanza pueden ser considerados manifestaciones de sus procesos deliberativos (ERAUT, 1994) y muestran la complejidad del papel del profesor. Por otra parte, los dilemas indican que la relación entre las creencias y la gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje no es una relación lineal sino que debe entenderse como una relación de implicación mutua (dialéctica) desde la cual resulta difícil indicar si las creencias son las que dirigen la práctica o al revés. Finalmente cabe señalar que la relación práctica-creencias se articula a través de procesos de reflexión (procesos interpretativos) del profesor.

### 5.3. La transparencia en el uso de los modos de representación como una característica del papel del profesor en la definición de las prácticas matemáticas en el aula

Cuando intentamos describir y caracterizar el papel del profesor en definir lo que sucedía en las aulas de matemáticas nos centramos en su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y se puso de manifiesto la relevancia que podía tener, entre otras cosas, la naturaleza de las interacciones entre profesor, los alumnos y las tareas propuestas. Al estudiar la gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje una de las cosas que identificamos como relevante para nuestro propósito fue determinar cómo el profesor utilizaba algunos recursos de los que disponía para ayudar a caracterizar una práctica matemática particular que se generaba en el aula entre sus alumnos, el mismo y el problema matemático propuesto. Los modos de representación, el lenguaje utilizado y los problemas propuestos (tareas instruccionales) pueden ser entendidos como recursos de los que el profesor hace uso para conseguir sus objetivos (un aprendizaje matemático). Para analizar este aspecto de la gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje utilizamos la noción de *transparencia* (LAVE & WENGER, 1991). Desde esta perspectiva, la noción de transparencia vinculada al uso explícito que el profesor hace de los recursos de que dispone permite caracterizar e identificar algunos aspectos de la gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje como una componente de su práctica profesional. LAVE & WENGER (1991) indican que la noción de transparencia se refiere a la manera en la que:

- el uso de los instrumentos disponibles; y
- la comprensión de su significado;
- interactúan para generar un proceso de aprendizaje.

Por una parte los modos de representación (por ejemplo, las gráficas) deben ser visibles para que los alumnos puedan utilizarlos. Por otra parte, el uso de las grá-

ficas debe ser tal que debe permitir que el alumno pueda llegar a comprender el significado de la noción matemática que es el objeto de la secuencia de enseñanza. Es decir, las gráficas deben llegar a ser invisibles para poder mirar a través de ella. Por ejemplo el uso de las gráficas para ilustrar el significado de la noción de pendiente ("velocidad de crecimiento") de las funciones lineales (LLINARES, 1999b). Aplicamos esta noción al análisis del uso del profesor de los modos de representación como una manera de dar cuenta del papel del profesor en la constitución de una determinada práctica matemática en el aula. Aplicar la noción de transparencia al uso del profesor de los sistemas de símbolos (instrumentos) nos ha permitido dar cuenta de la dualidad que deben desempeñar los recursos en la enseñanza.

Los análisis de la gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje realizados en esta dirección nos han mostrado que en algunos casos el profesor hace un uso consciente de esta dualidad (visible-invisible) de los instrumentos (recursos) empleados en la enseñanza mostrando cierta vinculación con las características de las interacciones que se generan en el aula entre profesor y estudiantes. Una manifestación de esta característica lo tenemos en el caso de Sara que consideraba los modos de representación (gráfica, algebraico, situaciones) y las traslaciones entre ellos (lectura e interpretación de situaciones y gráficas, la traslación de la situación a la expresión algebraica, etc) como un contenido para enseñar. Desde esta posicionamiento, Sara intentaba hacer visible a sus estudiantes los modos de representación como nos había mostrado el análisis de la reconstrucción personal que Sara había hecho del concepto función como objeto de enseñanza-aprendizaje. Pero por otra parte, el análisis de las interacciones con sus alumnos (LLINARES, 1999-b) ha mostrado el intento de Sara de hacer invisible el modo de representación (las gráficas) para ayudar a sus alumnos al construir el significado de la noción matemática que era el objetivo de la secuencia de enseñanza (por ejemplo la noción de pendiente de una función lineal).

## 6. Comentarios finales

La caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas (sus formas de conocer) y de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje como aspectos de la práctica profesional del profesor de matemáticas resulta una tarea compleja. El contexto de reforma de la enseñanza de las matemáticas y la innovación curricular definen una situación en la cual poder mirar los procesos de transición de los profesores y las influencias que ejercen diversas variables. Como consecuencia de dicha complejidad es necesario adoptar perspectivas complementarias que nos permitan mirar diferentes aspectos. Además es necesario utilizar diseños de investigación que hagan uso de diferentes tipos de instrumentos y esquemas analíticos. Las

investigaciones que hemos realizado hasta estos momentos nos han permitido obtener información sobre diferentes aspectos que condicionan la práctica profesional del profesor de matemáticas. Posiblemente la información que estamos obteniendo viene caracterizada por las perspectivas teóricas adoptadas y el tipo de instrumento y esquemas analíticos utilizados. Sabemos que posiblemente estas perspectivas nos permitan ver algunas cosas pero no otras. Sin embargo creemos que los resultados obtenidos hasta estos momentos nos están permitiendo comprender mejor lo que sucede en las aulas y la identificación de factores que influyen como una manera de dar cuenta del conocimiento y la práctica profesional del profesor de matemáticas.

En particular, la identificación de los procesos interpretativos de los profesores como un medio a través del cual dar cuenta de las razones de una determinada organización del contenido matemático en la enseñanza y de la reconstrucción personal que de las nociones matemáticas realiza el profesor, nos ha mostrado la complejidad de las relaciones existentes entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico del profesor en la caracterización de su práctica profesional. El énfasis del profesor colocado sobre diferentes aspectos del contenido matemático como objeto de enseñanza aprendizaje nos ha mostrado la importancia de *las formas de conocer* del profesor como una manifestación de la interacción dialéctica entre el profesor y la situación (SCHÖN, 1983) indicando que el proceso de elaboración del conocimiento en las situaciones prácticas hace que los profesores subrayen aspectos distintos. Además, el análisis de las regularidades en el aula y la caracterización de las interacciones entre el profesor, los alumnos y los problemas matemáticos está permitiendo identificar nociones teóricas en la caracterización del papel del profesor en la constitución de las prácticas matemáticas en el aula. Por otra parte, el análisis de las relaciones dialécticas entre las creencias mantenidas y la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje nos ha indicado cómo el profesor plantea y se enfrenta a determinados dilemas en la enseñanza y cómo los procesos de reflexión-sobre-la-acción generados como consecuencia de la colaboración en los proyectos de investigación permiten explicitar dichos dilemas.

Dos comentarios para finalizar. En primer lugar en relación a la necesidad de ampliar las investigaciones a la enseñanza de otros tópicos matemáticos. Los análisis de la práctica profesional del profesor en la enseñanza de diferentes nociones matemáticas nos deben ayudar a determinar hasta qué punto las nociones teóricas que estamos utilizando puedan generalizarse y ser utilizadas como instrumentos analíticos en nuestro empeño de describir las formas de conocer del profesor y su utilidad en la caracterización del papel del profesor en la constitución de las prácticas matemáticas generadas en el aula. En segundo lugar, señalar que una de las características de las investigaciones que estamos realizando se apoyan en la estrecha colaboración entre profesores e investigadores. Esta colaboración la vemos como una moneda con dos caras. Por parte del profesor están los procesos de de-

sarrollo profesional y su interés en mejorar su propia práctica. Desde este punto de vista, la colaboración en un proyecto de investigación permite explicitar aspectos de su práctica a través de los procesos de reflexión-sobre-la-acción que por otra vía serían difíciles de hacer explícitos. Por parte de los investigadores la colaboración nos ha permitido intentar comprender mejor la práctica del profesor desde sus propias referencias, al mismo tiempo que nos permite caracterizar lentes teóricas a través de las cuales desarrollar nuestra comprensión y reflexiones teóricas.

## Referencias

- ADLER, J. The dilemma of transparency: Seeing and seeing through talk in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 1999, pp. 47-64.
- BROMME, R. Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. BIEHLER, R. SCHOLZ, R.; STRÄEBER y B. WINKELMAN (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Pb, 1994.
- BROMME, R. y TILLEMA, H. Fusing experience and theory. The structure of professional knowledge. *Learning and instruction*, vol. 5, 1995, pp. 261-267.
- BROPHY, J. *Advances in Research on Teaching. Vol. 2: Teachers knowledge of subject-matter as it relates to their teaching practices*. JAI Press Inc. London, 1991.
- BRUNER, J. *Acts of meaning*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.
- CHEVALLARD, Y. Familiere et problematique. La figure du professeur. *Recherches en didactique des Mathematiques*, 17(3), 1997, pp. 17-54.
- CHRISTIANSEN, B. & WALTHER, G. Task and activity. En CHRISTIANSEN, B., HOWSON, A.G. & OTTE, M. (Eds.) *Perspectives on Mathematics Education*, 1986, pp. 243-307. D. Reidel Pb. Co: Dordrecht.
- CLARKE, D.M. The changing role of the mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 1997, pp. 278-308.
- COBB, P. & BAUERSFELD, H. (Eds.) *The emergence of mathematical meaning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass., 1995.
- CONNELLY & CLANDININ. Personal Practical knowledge and the modes of knowing: Relevance for teaching and learning. En EISNER & ELLIOT (Eds.) *Learning the way of knowing. The 1985 Yearbook of the National Society for the Study of Education*. Chicago, The University of Chicago Press, 1985.

- CONNELLY & CLANDININ (1998) Teachers' personal practical knowledge on the professional knowledge landscape. *Teaching and Teachers Education*, 13(7), 1998, pp. 665-674.
- COONEY, T. y WILSON : Teachers' Thinking About Functions: Historical and Research Perspectives. En T. Romberg, E. FENNEMA y T. CARPENTER (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. LEA: Hillsdale, NJ, 1994.
- DOYLE, W. Classroom Organization and management. En M.C. WITTRICK (Ed.) *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan, 1986, pp. 392-431.
- DUBINSKY, E. y HAREL, g. The nature of process conception of function. En G. HAREL y E. DUBINSKY (Eds.) *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington DC: MAA, 1992, pp. 85-106.
- ERAUT, M. *Developing Professional knowledge and competence*. The Falmer Press: London, 1994.
- ESCUADERO, I. & SÁNCHEZ, V. *The relationship between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity*. Comunicación aceptada para ser preentada en el PME-23, Israel, 1999-a.
- ESCUADERO, I. & SÁNCHEZ, V. *Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Documento no publicado, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla, 1999-b.
- FENSTERMACHER, G. : The Knower and the Know: The Nature of Knowledge in Research on Teaching. En L.DARLING-HAMMOND (Ed.) *Review of Research in Education*. AERA: Washington, 1994.
- FENNEMA, E. y FRANKE, M. : Teachers' knowledge and its impact. En D. GROUWS (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan: New York, 1992.
- FENNEMA, E. y NELSON, B.S. *Mathematics Teachers in Transition*. Lawrence Erlbaum Ass., Pb.: NJ, 1997.
- GARCÍA, M. *Análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y el concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje. Aportaciones metodológicas*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.[Publicada como *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza aprendizaje*. GIEM-Universidad de Sevilla, España.], 1997.
- GARCÍA, M. y LLINARES, S. Un método para el análisis del contenido y estructura del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de secundaria. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17, 1998, pp. 65-82.

- GARCÍA, M. y LLINARES, S. *Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño*. Documento no publicado, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla, 1999.
- GROSSMAN, P., WILSON, S. y SHULMAN, L. Teachers of Substance: Subject matter Knowledge for Teaching. En M. REYNOLDS (Ed.) *Knowledge Base for the Beginning Teacher*. Pergamon Press: Oxford, 1989.
- JACKSON, P. *La vida en las aulas*. Madrid: Ediciones Morova, 1975.
- JANVIER, C. (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: LEA, 1987.
- KRAINER, K. *Learning from Gisela- or: Finding a bridge between classroom development, school development, and development of educational systems*. Conferencia pronunciada en International Conference on Mathematics Teacher Education, Taipei, Taiwan, 1999.
- LAMPERT, M. How do teachers manage to teach? Perspectives on problems in practice. *Harvard Educational Review*, 55(2), 1985, pp. 178-194.
- LAVE, J. & WENGER, E. *Situated learning. Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- LEINHARDT, G. Situated knowledge and expertise in teaching. En J. CALDERHEAD (Ed.) *Teachers' professional learning*, pp 146-168. Falmer Press: London, 1988.
- LEINHARDT, G., PUTMAN, R.T.; STEIN, M.K. y BAXTER, J. : Where Subject knowledge matters. En BROPHY, J. (Ed.) : *Advances in Research on Teaching. vol. 2. Teachers' Knowledge of Subject Matter As It Relates To Their Teaching Practices*. Jai Press, INC: Greenwich, Connecticut, 1991.
- LEINHARDT, G. & GREENO, J. The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), 1986, pp. 75-95.
- LEINHARDT, G.; ZALAVSKY, O. y STEIN, M.K. Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1990, pp. 1-64.
- LLINARES, S. Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza. Implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. BLANCO y V. MELLADO (coord.) *La Formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. DDCCEE-DM: Badajoz, 1995.
- LLINARES, S. Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J.P. da PONTE et al (Coord.) *Desenvolvimento Profissional dos professores de Matemática. Que*

*Formação?*. Secção de Educação Matemática. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Lisboa, Portugal, 1996.

- LLINARES, S. *Aprendizaje del profesor de Matemáticas y Reforma*. Conferencia pronunciada en el Congreso PROFMAT97. Figueira da Foz. APM: Lisboa: Portugal, 1997, pp. 37-43.
- LLINARES, S. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 1998.
- LLINARES, S. *Looking into the teaching of functions. Characteristics of one secondary mathematics teacher's transition process*. Documento no publicado. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, España, 1999.
- LLINARES, S. *Intentando comprender la práctica del profesor de Matemáticas*. Conferencia preparada para la Escuela de Verano de Educación Matemática Portuguesa-Española-Italiana, Santarem, Portugal. Julio, 1999-b.
- LLINARES, S. Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching. Theory into Practice*, en prensa.
- LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. : El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas. En S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Alfar: Sevilla, 1990.
- MATHISON, S. Why Triangulate?. *Educational Researcher*, March, 1988, pp. 13-17.
- MCEWAN, H. y BULL, B. The Pedagogic Nature of subject matter Knowledge. *American Educational Research Journal*, 28(2), 1991, pp. 316-334.
- MEIRA, L. Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 1998, pp. 121-142.
- NOODING, . Professionalization and mathematics teaching. En D. GROUWS (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan: New York, 1992.
- PONTE, J.P. Concepções dos professores de matemática e processos de Formação. En M. Brown, D. FERRANDES, J.F. MATOS y J.P. PONTE (Eds.) *Educação Matemática. Temas de investigação*. (SEM-SPCE: Lisboa), 1992.
- SÁNCHEZ, V. *El profesor y el aula de matemáticas: Un contexto para una reflexión*. Conferencia invitada en PROFMAT99, 1999.
- SCHOENFELD, A. A Discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 1994, pp. 697-710.

- SCHÖN, D. *The reflective Practitioner: How professionals Think in Action*. Jossey-Bass: New York, 1983.
- SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 1986, pp. 4-14.
- SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. En G. HAREL y E. DUBINSKY (Eds.) *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington DC: MAA, 1992, pp. 25-58.
- SIMON, M. Y TZUR, R. Expliciting the teacher's perspectives from researchers' perspective: Generating accounts of mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), 1999, pp. 252-264.
- SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1992, pp. 1-36.
- STEIN, M.K.; BAXTER, J. & LEINHARDT, G. Subject-matter knowledge for elementary instruction: a case from functions and graphing. *American Educational Research Journal* 27(4), 1990, pp. 639-663.
- TOM, A.R. & VALLI, L. Professional knowledge for teachers. En W.R. HOUSTON (Ed.) *Handbook of research on teacher education*. New York: Macmillan, 1990, pp. 373-392.
- VINNER, S. Y DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Reserach in Mathematics Education*, 20(4), 1989, pp. 356-366.
- VOIGT, J. Pattern and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Matematiques*, 6(1), 1985, pp. 69-118.
- WAGNER, A.C. 'Knots' in teachers' thinking. En J. CALDERHEAD (Ed.) *Exploring teachers' thinking*. Cassell Education: London, 1987.
- WATSON, A. (Eds.) *Situated cognition and learning of mathematics*. Oxford: Center for Mathematics Education Research of the University of Oxford, 1998.
- WILSON, S.; SHULMAN, L. & RICHERT, A. '150 different ways of knowing: representations of knowledge in teaching. En J. CALDERHEAD (Ed.). *Exploring teachers' thinking*. London: Cassell Education, 1987, pp. 104-124
- WOOD, T. An emerging practice of teaching. En P. COBB & H. BAUERSFELD (Eds.) *The emergence of mathematical meaning*. Hillsdale, NJ: LEA, 1995, pp. 203-227.

## Número Racional: uma teia de relações<sup>1</sup>

Mauro Carlos Romanatto<sup>2</sup>

**RESUMO:** O número racional é um assunto considerado importante na escolaridade básica de Matemática e o modo como se apresenta para os alunos tal tópico tem se revelado na maioria das vezes como um obstáculo para a sua plena compreensão. Um dos aspectos que pode justificar tal situação é a própria complexidade com que esse assunto se manifesta. O número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos. Esse estudo pressupõe que a plena compreensão do número racional passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural. Relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número são "personalidades" que o número racional assume, representadas por notações da forma  $a/b$ , decimal e percentual.

**PALAVRAS-CHAVE:** Número racional; Educação Matemática .

**ABSTRACT:** Rational Number: a net of relationships

*Rational number is a subject that is considered an important subject in the basic education of Mathematics, and the way it is taught to the students may be an obstacle to its full comprehension. One of the aspects that*

<sup>1</sup> Este estudo é um dos resultados da Tese de Doutorado defendida pelo autor na FE - UNICAMP (ROMANATO, 1997).

<sup>2</sup> Docente do Departamento de Didática da Faculdade de Ciências e Letras - UNESP - Campus de Araraquara