da revista e também serão submetidas à aprovação de pelo menos dois membros do Conselho de Pareceristas. No artigo que inaugura esta seção, o autor discute e polemiza com as idéias apresentadas por José Mário Martínez e Lucio Tunes dos Santos, ambos professores do IMECC-UNICAMP, no artigo *Comparação de duas estratégias no ensino de 'Complementos de Matemática'*, publicado em Zetitiké, Volume 6, Número 9, janeiro/junho de 1998, p. 89-108.

Finalmente, este número da revista apresenta ainda um catálogo de resumos de teses de doutorado e dissertações de mestrado relativas à educação matemática, produzidas/defendidas entre 1976 e 1994 na Faculdade de Educação da UNICAMP.

Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição)*

*Gert Schubring***

*Tradução: Pedro Goergen****

RESUMO: Este artigo busca abordar uma função da história da matemática que transcende aquela tradicional e insatisfatória da motivação para a aula: como fundamento da formulação de teorias na educação matemática. Para tanto, serão expostas e relacionadas entre si novas propostas da historiografia e da didática matemáticas. Disso resulta uma convergência estrutural, baseada na análise tanto do aluno quanto do pesquisador enquanto membros de uma comunidade social interativa. Paralelamente, será examinada a estreita relação entre o ensino e a elaboração do conhecimento.

ABSTRACT: The article intends to emphasize a function of mathematics history which transcends the traditional but unsatisfactory one of motivator for classroom practice: as a foundation for theory construction in mathematics education. For this purpose, reccent approaches in mathematics historiography and in mathematics education are presented. Discussing them yields a structural convergence which is due to the view which conceptualizes the researcher and the learner as respective members of an interacting social community. At the same time, the close connection between teaching knowledge and developing knowledge is analyzed.

---

* A versão original deste artigo foi publicada na revista "Zentralblatt für Didaktik der Mathematik", t. 20, 1988, p. 138-148. Agradecemos a autorização dada pela ZDM para publicar esta versão em português na Revista Zetetiké.

** Professor-pesquisador do Instituto de Didática da Matemática da Universidade de Bielefeld - Alemanha.

*** Professor Titular do Departamento de Filosofia e História da Faculdade de Educação da UNICAMP.

1. Introdução

Inicialmente, parece ser uma tarefa um tanto ingrata falar sobre o significado da história da matemática para a didática e o ensino. Tantos especialistas em didática, sobretudo tantos matemáticos já se manifestaram sobre este tema que parece duvidoso que algo substancialmente novo possa ser acrescentado ao que já foi dito – ainda mais se posso mencionar, como exemplo mais recente desta fecunda reflexão sobre o aproveitamento da história no ensino da matemática, o caderno 19/1986 da Revista ensinar matemática (*mathematik lehren*).

Se mesmo assim ouso ocupar-me do tema, é porque, de fato, existem novas evoluções, tanto na história da matemática quanto na didática da matemática, que permitem esperar resultados interessantes, aos quais quero dar especial destaque no presente trabalho. Como característica comum às novas propostas pode-se ressaltar a consideração da subjetividade na construção do conhecimento – tanto por parte do aluno quanto do pesquisador.

Gostaria de iniciar com um texto bastante característico: *History in the mathematics curriculum* (WILDER, 1972), do conhecido matemático R .L. Wilder. A exemplo de muitos outros matemáticos, Wilder desenvolveu, após sua aposentadoria, um forte interesse pela história da matemática, passando a defender, enfaticamente, a inclusão da história no currículo do curso de matemática, para contornar as crescentes críticas de uma prática de pesquisa cada vez mais especializada. História da matemática é por ele recomendada para melhorar a motivação e desenvolver um sentido subjetivo da matemática. É bastante revelador o modo como Wilder separa técnica e cultura na matemática: Enquanto o atual tipo de pesquisa matemática deve continuar a ser desenvolvido sem alterações, pretende-se, de outra parte, reforçar a legitimidade de tal propósito, pela inclusão da matemática na *Cultural history*.

Além desta divisão da matemática em dois domínios, outra fraqueza essencial da função motivadora da história da matemática – na verdade, a melhoria da motivação é, sob diferentes formas, o principal argumento sempre aduzido – consiste no fato de se pressupor que a abordagem histórica reforça o interesse e a motivação. Essa pressuposição subentende que, numa cultura, existe, de modo geral, uma disposição positiva em relação a interrogações históricas. Enquanto no século XIX e também na primeira metade do século XX, o historicismo foi certamente uma das principais características da formação da burguesia intelectual alemã, a partir dos anos 60 do atual século, tal convicção desapareceu quase por completo. Por esta razão, duvido seriamente que as abordagens históricas ainda tenham significado similar para os alunos de hoje – independentemente do fato de os professores terem formação e visão históricas.

Contra o papel não apenas acidental da história da matemática há uma outra objeção ainda mais forte, à qual já me referi ao mencionar a fase de pesquisador ativo e a posterior fase, menos produtiva, de recuperação histórica da disciplina. No quotidiano filosófico da matemática, dominante na comunidade científica, nega-se, em geral, que a história tenha qualquer função produtiva para a ciência atual. Esta concepção foi certa vez elegantemente traduzida por Whitehead com as seguintes palavras: "*Uma ciência que tarda em esquecer seus fundadores está perdida*" (apud KUHN 1967, p. 184). De acordo com esta filosofia quotidiana, a matemática de hoje comprende o racional, a lógica da história: As questões e etapas anteriores encontram-se nela inseridas e respondidas, ou em termos Hegelianos: A história está "incorporada" ("*aufgehoben*")* na ciência atual.

Fica claro que nessa concepção acumulativa, a história não pode ir além de uma função motivacional, resultando disso, de um ponto de vista mais geral, que a função da história da matemática no ensino e na didática dependa, diretamente, da concepção de desenvolvimento da matemática que está subentendida ou posta como fundamento.

2. O método genético de Toeplitz

Observemos, a partir dessas considerações, esta que é certamente a mais conhecida proposta de aproveitamento da história no ensino e na didática, o *método genético* de Otto Toeplitz. É bem conhecida a famosa passagem de sua conferência de 1927, na qual ele se refere aos "requisitos canonizados" do ensino da matemática e em cuja formulação nunca se toca na questão do porquê e da origem. Nesta passagem Toeplitz constata:

> *Todos estes requisitos...devem, em algum momento, ter sido objeto de uma estimulante busca, de um trabalho excitante, justamente no instante em que foram criados. Se seguíssemos as raízes dos conceitos, desapareceria deles a poeira dos tempos e eles ressurgiriam, diante de nós, como seres vivos. E a partir daí abrir-se-ia para nós um duplo caminho para a praxis: ou se apresentaria diretamente aos estudantes a descoberta em toda a sua dramaticidade, fazendo, dessa forma, surgir ante seus olhos os questionamentos, os conceitos e os fatos – e isto eu chamaria o método genético direto – ou nós mesmos buscaríamos assimilar, a partir dessa análise histórica, o verdadeiro sentido, a essência de cada conceito, derivando daí, para o ensino desse conceito, conseqüências que, como tais, já não teriam relação com a história – o método genético indireto* (TOEPLITZ, 1927, p. 92 ss.).

* O conceito hegeliano "Aufheben" implica no duplo movimento de superar os elementos retendo-os (Nota do tradutor).

Enquanto o primeiro - o método genético direto - faz parte da mencionada função motivacional, o segundo - o método genético indireto -, além de ter sido para Toeplitz o mais interessante, oferece geralmente fundamentos importantes para o nosso tema.

Se analisarmos as concepções de Toeplitz e sua aplicação no ensino superior e na formação de professores, fica bastante claro que, para ele, a compreensão de um conceito depende da transmissão de saber acerca deste conceito, de metasaber portanto, e que o seu método genético indireto visa à construção de um metasaber nos estudantes de magistério (cf. SCHUBRING, 1978, p. 256).

Além disso, Toeplitz insiste que a história tem uma função produtiva, não servindo apenas como contexto externo, estimulante:

> "*Não se trata da história, mas da gênese dos problemas, dos fatos e demonstrações, das decisivas viragens desta gênese*" (TOEPLITZ, 1927, p. 94).

No entanto, por mais notável que seja este programa, sua formulação concreta no seu manual sobre o cálculo diferencial (TOEPLITZ, 1972) é pouco apropriada para desvendar tais pontos de viragem no desenvolvimento dos conceitos. Tanto no que se refere a processos envolvendo a noção de infinito quanto no conceito de número, Toeplitz parte do ponto de vista de que o essencial já havia sido realizado pelos gregos e de que, depois deles, seguiriam apenas desdobramentos, modificações formais etc. de algo já existente. Nesse sentido, Toeplitz coloca-se ao lado de Lipschitz na controvérsia desse com Dedekind a respeito do conceito de número real: Lipschitz havia defendido contra Dedekind que o essencial já se encontrava em Eudoxo, enquanto Dedekind insistia na diferença fundamental da formação conceitual, chamando atenção especialmente para o fato do conceito de continuidade (*Vollständigkeit*) não existir entre os gregos e nem poder ser derivado implicitamente da geometria.[1]

Toeplitz ficou, portanto, preso a uma visão contínua e cumulativa da história da matemática, na qual não ocorre desenvolvimento qualitativo, razão pela qual o método genético indireto não pode ser efetivamente usado. Embora Toeplitz afirme que a história é uma fonte inesgotável para a metodologia didática, ele enquadra a história num esquema que lhe é estranho na medida em que vê o desenvolvimento do conceito matemático como uma "suave progressão do leve ao pesado" que poderia ser transformado em recurso metodológico para o ensino (TOEPLITZ, 1927, p. 95).

1. Ver (SCHUBRING, 1978, p.286-292). A troca de correspondência entre Dedekind e Lipschitz já anteriormente publicada por O. Becker e P. Dugac foi agora completado por SCHARLAU(1986).

O exemplo da concepção de Toeplitz também mostra que a problemática central do aproveitamento da história da matemática em termos de conteúdo consiste na concepção adequada do desenvolvimento. Ao passo que, a partir dos inovadores trabalhos de Thomas Kuhn, em quase todas as outras ciências foram analisadas e reconhecidas "revoluções" no sistema conceitual e rupturas nos campos conceituais, a matemática parece continuar fechada a tais inovações epistemológicas: excessivamente soberba parece continuar sendo a imagem unívoca da "rainha das ciências" que se desenvolve cumulativamente, permanecendo sempre idêntica consigo mesma.

Um exemplo característico desse comportamento ante a matemática é o filósofo francês Gaston Bachelard o qual descreveu, incisivamente, rupturas e obstáculos nas ciências naturais, mas excluiu, expressamente, a matemática dessa análise:

> "*A história da matemática é uma maravilha de regularidade. Ela conhece períodos de calmaria. Mas ela não conhece período de equívocos*"(BACHELARD, 1975)[2].

3. Novas concepções na história da matemática

Felizmente, no entanto, há neste campo, desde há alguns anos, importantes inovações conceptuais. Especialmente notável é que estas mudanças derivam de uma reavaliação da relação entre pesquisa e ensino. Nesta relação, a pesquisa era, tradicionalmente, o lado ativo fornecedor, sendo a didática o lado passivo e receptor que apenas transferia para o ensino o recebido. Por isso, a relação entre o saber científico e o saber escolar era sempre definida como uma relação unidirecional. Em 1978, Wilhelm Kuyk, o autor de "*Komplementarität in der Mathematik* ("*Complementaridade na Matemática*") denunciou esta visão unilateral com a bela imagem dos estalactites e estalagmites: o ensino não pode ser visto simplesmente como stalagmites sobre as quais a ciência, ao crescer como estalactites, deixa cair algumas gotas (cf. SCHUBRING, 1981, p.32).

Minha intenção é mostrar que a reavaliação da relação entre pesquisa e ensino também abre a perspectiva de uma nova concepção de desenvolvimento. Esta reavaliação foi programaticamente formulada no artigo de Judith Grabiner: *Is mathematical truth time dependent*? (GRABINER,1974). Na mesma época Wussing chamou a atenção para o fato de que a exigência da ensinabilidade geral da mate-

2. Bachelard 1975, 25, tradução minha, G.S.

mática a partir do final do século XVIII impôs não apenas novos padrões de precisão, tornando falsas proposições até então tidas como verdadeiras, como também deu à pesquisa novos impulsos e orientações:

> "Caracteristicamente a fundamentação da análise é devida a matemáticos que estavam fortemente envolvidos com o ensino" (WUSSING, 1974, p. XVIII).

No mesmo ano, Eccarius, no seu trabalho sobre Crelle, defendeu a tese segundo a qual o ensino da matemática influenciou na Prússia o desenvolvimento também do conteúdo da ciência matemática, isto é, da matemática pura:

> *"A formação de professores era...(depois de 1810), especialmente para o ensino da matemática, a única forma de sobrevivência: sem a afluência dos estudantes de magistério seu desenvolvimento teria sido muito mais restrito e provavelmente teria seguido em outra direção. Ao menos o rápido desenvolvimento da matemática pura teria enfrentado obstáculos maiores se a relativamente "desinteressada" formação de professores não tivesse sido predominante em relação à formação técnica"* (ECCARIUS, 1974, p. 91).

De fato, minhas pesquisas sobre o desenvolvimento da matemática na Prússia mostraram claramente que a profissão de professor de matemática nas escolas não representava apenas a base social da matemática das escolas superiores, mas também a base metodológica para o desenvolvimento do conteúdo da matemática pura (Cf. SCHUBRING, 1983). Em particular, o tipo de publicação dos programas escolares mostra (SCHUBRING, 1986c) a enorme contribuição que os professores de ginásio, na Prússia reconhecidos como "cultos", trouxeram para o avanço da reflexão básica e para o esclarecimento dos fundamentos da matemática.

As pesquisas sobre a relação entre o ensino e a ciência que assumiram esta nova abordagem matemático-histórica são, sob diversos pontos de vista, significativas para a questão de uma adequada concepção de desenvolvimento:

- antes de mais nada, elas mostram que as aulas e o ensino influenciaram o desenvolvimento da ciência e que, por isso, estas dimensões devem ser levadas em conta para a compreensão da história da matemática.

- Simultaneamente, elas mostram que as rupturas e os recomeços na história da matemática decorrem, em grande medida, de mudanças epistemológicas que são expressão de mudanças no contexto do sistema científico.

- E, finalmente, as análises de orientação didática do desenvolvimento da ciência fornecem meios e categorias para o exame mais detalhado do próprio processo de desenvolvimento.

Particularmente, as duas últimas teses buscam a inclusão da subjetividade do aluno e do cientista na análise teórica. Para esclarecer melhor estas duas últimas teses, gostaria de percorrer um aparente desvio e discutir duas teorias didáticas que adquiriram grande significado na didática da matemática como pontos de partida da análise do "subjetivo" para, a seguir, devidamente adaptadas, usá-las na análise de campos conceituais históricos: trata-se da teoria dos "erros" e da teoria dos "obstáculos".

4. Erros dos alunos

Há cerca de duas décadas, tanto na didática alemã quanto na americana, os erros dos alunos vêm constituindo área de especial interesse da pesquisa. Aos poucos, reconheceu-se que os erros não são apenas expressão da incapacidade subjetiva, falta de atenção etc., razão pela qual também não podem ser evitados apenas através da repetição ou de cuidados disciplinares relativos à atenção do aluno. Em 1979, H. Radatz resumiu da seguinte forma a situação da pesquisa acerca do erro:

> "Os erros dos alunos na aula de matemática não são simplesmente conseqüência da ignorância ou acasos situacionais, decisões erradas dos alunos não nascem, como se imaginava no início da teoria behaviorista do ensino, prioritariamente das inseguranças, dispersão ou condicionantes ocasionais. Erros de alunos são muito mais o resultado ou o produto de experiências anteriores nas aulas de matemática. Considerando os conhecimentos atualmente disponíveis sobre a pesquisa acerca do erro, pode-se constatar que os erros de alunos:
>
> *- são causalmente determinados e muitas vezes sistemáticos,*
>
> *- sem a ação do professor são persistentes podendo perdurar ao longo de vários anos escolares, - são análisáveis e descritíveis como técnica de erros,*
>
> *- podem ser reduzidos, quanto às suas causas, a determinadas dificuldades dos alunos na apreensão e elaboração de informações no processo de aprendizagem da matemática ou então a problemas interacionais com relação às variáveis que intervêm no processo de aprendizagem da matemática (professor, currículo, alunos, meio-ambiente escolar...) Erros de alunos são imagens de dificuldades individuais"* (RADATZ, 1979, p. 57).

Por importante que seja não simplesmente declarar defeituoso o processo de pensamento do aluno, mas antes pesquisar as estratégias intelectuais dos alunos, de outro lado, corre-se o risco de excluir e declarar como objetivo algo que pode ser uma variável dos erros de alunos: o conhecimento em si mesmo. Na investigação dos erros é bem possível que se busque as causas dos erros dos alunos fora dos alunos, por exemplo, nos professores. Mas o conhecimento matemático é considerado fonte de erros dos alunos quando muito na medida em que podem existir defeitos na sua inserção curricular. Característica dessa forma de ver é um trabalho de H. -D. Gerster no qual ele expõe o resultado de amplas pesquisas sobre erros de alunos:

> "*Certas características das tarefas (isto é, certas exigências de conteúdo das tarefas,...) provocam nos alunos determinados modelos de erros...a freqüência desses modelos de erros aponta para correspondentes lacunas no desenvolvimento do ensino – tanto em manuais de ensino quanto na execução de unidades de ensino através do professor*" (GERSTER, 1984, p. 56).

Em interpretações desse tipo, que realçam lacunas curriculares, em geral sanáveis, como causa de erros, coloca-se a matemática como saber objetivo, omitindo-se que o próprio conhecimento pode conter problemas epistemológicos ou de conteúdo não explicados que um professor experiente talvez nem perceba, mas nos quais alguém não-iniciado pode tropeçar. Já nos anos 50, Karl Menger alertou a respeito de tais fontes de erro nos seus magistrais artigos. *Why Johnny hates Math, Gulliver in the Land without One, Two, Three*, e *Gulliver in Applyland*, sem, no entanto, merecer maior atenção por parte da ciência e da didática[3].

Significativamente, é exatamente sobre esta dimensão de problemas epistemológicos internos não esclarecidos da matemática que recaem as exigências do ensino como impulso para o desenvolvimento da matemática ou mesmo como ruptura com opiniões até agora aceitas. O filósofo francês Destutt de Tracy descreveu este efeito de forma plástica no ano de 1801, ao final da primeira época histórica iniciada na França em 1794, na qual a divulgação geral do saber científico tornou-se o centro do interesse público. Destutt de Tracy resumiu a experiência de redigir obras elementares:

> "*Freqüentemente, nota-se, quando se pretende representar um fato simples, que ele exige, antes, novas observações, e, examinado com mais cuidado, ele se apresenta desde um ponto de vista completamente novo: Outras vezes são*

3. Como tais áreas problemáticas Menger refere-se à indistinção entre função e valor de função, à confusão entre diferentes significados do conceito de variável e a relações inexplicadas entre números e grandezas.

> *os próprios princípios que devem ser retrabalhados, ou a gente deve, para relacioná-los uns com os outros, preencher inúmeras lacunas; numa palavra, não se trata apenas de divulgar a verdade, mas também de descobrí-la*" (apud SCHUBRING, 1982b, p. 114)[4].

Uma vez que o saber escolar é mais acentuadamente uma condensação da evolução histórica do que o conhecimento resultante de pesquisa atual, podemos, desde já, considerar um primeiro aproveitamento produtivo da história da matemática para a didática: a análise de problemas técnicos ou epistemológicos do saber matemático que provocam erros por parte dos alunos.

5. Obstáculos

Retornemos, uma vez mais, para a concepção didática do erro. O nível epistêmico dessa categoria, quase totalmente ausente na pesquisa alemã e americana, é notavelmente a principal característica da pesquisa do erro na França. De fato, lá usa-se para a didática uma categoria que, inicialmente, foi desenvolvida para o exame da história da ciência: precisamente, a já mencionada categoria obstáculos epistemológicos criada, pela primeira vez em 1936, pelo filósofo G. Bachelard e usada com maior influência depois da nova edição de 1975. A concepção de Bachelard foi ampliada por Guy de Brousseau para uma teoria geral dos obstáculos, num excelente trabalho de 1976 que foi reeditado de forma ampliada em 1983. A teoria dos obstáculos serve para superar a atribuição dos erros à subjetividade dos alunos, diferenciando, para tanto, três diferentes tipos de distúrbios de aprendizagem segundo sua origem:

- Obstáculos ontogenéticos (as explicações de Brousseau sobre isso são bastante cursivas; ele tem em mente limitações num determinado momento ao longo do desenvolvimento espiritual do indivíduo, p.ex., de natureza neurofisiológica e remete para a teoria dos estádios de Piaget)

- Obstáculos didáticos ou didactogênicos, ou seja, dificuldades que resultam da concepção de aula, do currículo etc.

4. Citado segundo SCHUBRING, 1982b, p.114 (traduzido por mim, G.S.). Por causa da influência da doutrina sobre o desenvolvimento da ciência, nesta fase da reforma radical do livro didático (1794-1800) ao excepcional autor de livro didático era atribuida uma posição semelhante à do inventor (compare SCHUBRING, 1987b, p.43).

- Obstáculos epistemológicos (estes residem na natureza do conhecimento matemático, razão pela qual – segundo Brousseau - não podem ser evitados, já que são constitutivos dos respectivos conhecimentos; eles podem ser encontrados e identificados na história dos conceitos) (BROUSSEAU, 1983, p.171 e 176 ss.).

O aspecto especialmente interessante dessa concepção consiste nas conseqüências que a didática tira da constatação dos obstáculos epistemológicos para o ensino.

Brousseau evita conscientemente enunciar teses a respeito de uma tal conversão valorativa enquanto houver tão poucos estudos de caso a respeito do efeito dos obstáculos epistemológicos sobre desenvolvimento de conceitos matemáticos; preventivamente, porém, ele alerta a respeito de uma aplicação do paralelismo biogenético (BROUSSEAU, 1983, p.194; Compare SCHUBRING, 1978, p. 192 ss.).

Daí decorre, como mais uma exigência da didática ante a história da matemática, a detalhada reconstrução do desenvolvimento histórico de campos conceituais. "Detalhado" significa: não devem ser apresentadas apenas as contribuições dos "grandes", senão que devem ser averiguadas também as controvérsias em todas as suas relações contemporâneas, para, dessa forma, entender as conotações conceituais, o alcance almejado da solução de problemas e as epistemologias subjacentes. Um exemplo de uma tal reconstrução é o conhecido estudo de caso de Lakatos (LAKATOS, 1976).

O programa de Brousseau incentivou na França o surgimento de vários estudos que examinam dificuldades de aprendizagem na perspectiva descrita. Gostaria de mencionar aqui dois desses estudos: A dissertação de Bernard Cornu (CORNU, 1983) a respeito dos obstáculos na aprendizagem do conceito de limite na Análise e o trabalho de Colette Laborde (LABORDE, 1985) sobre as concepções dos alunos a respeito de conceitos geométricos básicos (ponto, reta, segmento de reta). Ambos os estudos encontram nas respostas de alunos de hoje elementos de soluções que ao longo da história foram dadas por matemáticos. Em ambos pode-se reconhecer a tendência de estabelecer um paralelo entre o desenvolvimento de conceitos matemáticos como caminho do empírico ao abstrato e o progresso intelectual dos alunos. Contudo, estes estudos evitam generalizações uma vez que, num caso, a história do conceito ainda não foi suficientemente pesquisada e, no outro, a fonte histórica, os velhos manuais de geometria, são descobertos apenas aos poucos.

Gostaria de apresentar agora alguns resultados de um abrangente estudo de caso de minha autoria a respeito da história dos números negativos (ver SCHUBRING, 1986 a). De fato, este estudo revelou uma grande quantidade de indícios a respeito da eficácia de representações epistemológicas no desenvolvimento da matemática.

Meu objetivo era examinar se, partindo do uso de números negativos por Viète e Stevin, realmente podemos falar de um reconhecimento não-problemático

desses números, como se ouve dizer por parte dos matemáticos. Para tanto, examinei o status desse conceito na França, na Inglaterra e na Alemanha – os três países que, na época, tinham as maiores comunidades de matemáticos – desde a segunda metade do século XVIII. As principais fontes nas quais me baseei foram livros-texto de aritmética e álgebra, além de monografias e artigos de revistas. Encontrei não apenas um debate sobremodo amplo e intensivo sobre o status dos números negativos, mas também claras diferenças nacionais a respeito do reconhecimento desses números como legítimos conceitos matemáticos. De passagem lembro que, no contexto da segunda metade do século XVIII, estas diferenças abrangiam posicionamentos tanto de rejeição quase absoluta na Inglaterra, de ambivalência na França, quanto de clara aceitação na Alemanha. Estas atitudes refletiam a posição das respectivas comunidades matemáticas como um todo, uma vez que à época ainda não existiam comunidades de matemática escolar.

As posições antagônicas podem ser, *grosso modo*, assim caracterizadas: na Inglaterra, sem dúvida no contexto da filosofia do "common sense", a subtração ficou limitada aos casos "exeqüíveis", ou seja, o subtraendo não podia ser maior que o minuendo e negava-se absolutamente que equações de segundo grau pudessem ter duas raízes e, em especial, que existissem duas raízes quadradas de um mesmo número.

Na Alemanha, certamente com base num correspondente suporte filosófico, não havia reservas com relação à formação abstrata de conceitos, sem um manifesto correlato material ("substância"). Neste país havia sido desenvolvida uma teoria fundante própria, a "teoria das grandezas opostas", que derivava da filosofia, e na qual eram especificadas as condições da mútua superação de grandezas. De acordo com isso, uma série de livros didáticos incluíam, antes mesmo de tratarem das operações aritméticas básicas, um capítulo sobre grandezas opostas ou sobre simetria em geral. Em decorrência dessa possibilidade filosófica, segundo a qual grandezas podem ser opostas com relação a uma qualidade e, se relacionadas, podem anular-se mutuamente, foi introduzido um conceito geral de subtração o qual não ficava limitado ao caso de o subtraendo ser menor que o minuendo. Na seqüência disso, desenvolveu-se na Alemanha um debate de fundo no qual, já antes de 1800, se chamava atenção para a especificidade das leis das operações para cada domínio de números. Distinguia-se claramente entre o sinal de operação e o sinal que precede um número, e entre o conceito empírico de grandeza e o conceito puro de número, de tal forma que o professor do ginásio de Danzig, W.A.Förstemann, pode desenvolver, em 1817, uma teoria matemático-formal dos números negativos (FÖRSTEMANN, 1817).

Mais interessante ainda foi o debate na França: de um lado, por causa do posicionamento dúbio em virtude do qual confrontavam-se diferentes posicionamentos básicos; e, de outro, por ter ocorrido neste país, em torno de 1800, uma ruptura no reconhecimento dos números negativos e um giro para a sua negação. Representativos da posição ambígua são artigos da famosa Enciclopédia: O artigo "*Négatif*" de d'Alembert rejeitava os números negativos como solução da equação de algum problema. Uma tal solução negativa isolada exige, segundo d'Alembert, uma reformulação do problema que está na base da equação. O conceito teórico, em vias de surgimento, encontra-se aqui em contradição com as interpretações quotidianas tradicionais, ainda dominantes, de termos matemáticos. De outra parte, num outro artigo da mesma enciclopédia, os números negativos são admitidos como equivalentes aos positivos e designados como "menores que nada", uma representação que d'Alembert havia considerado "absurda". Depois de 1800, aconteceu um giro empírico na filosofia francesa que foi transposto para a matemática por Carnot: ele negou que a álgebra tivesse qualquer função autônoma, apenas admitindo a possibilidade da tradução de conceitos e asserções geométricas, não porém uma generalização que fosse além disso. Esta fixação empírico-geométrica dos conceitos matemáticos básicos alcançou uma aceitação generalizada na França a partir de 1800, rompendo a relativa aceitação dos números negativos até então vigente. Esta ruptura pode ser facilmente comprovada pela brusca mudança nos textos das edições dos livros didáticos de álgebra de Lacroix. Esta mudança não afetou apenas a área escolar que se firmava nesta época, mas também os livros didáticos da escola politécnica que definiam como absurdas as soluções negativas isoladas[5].

Um dos efeitos mais notáveis dessa não-aceitação foi, na França, a separação radical entre álgebra e aritmética que persistiu até há poucos anos atrás: a aritmética ocupava-se exclusivamente dos números positivos, ao passo que os números negativos foram introduzidos a partir da segunda metade do século XIX, na álgebra, a qual, porém, se destinava às séries mais avançadas das escolas superiores.

Aqui apenas podem ser mencionados alguns resultados do estudo de caso para os obstáculos epistemológicos e para a didática. Um primeiro resultado foi que a famosa regra dos sinais (menos por menos igual a mais), que também foi considerada pela beletrística um objeto especialmente misterioso[6], não chegou a ser um problema no desenvolvimento da ciência; constituiu-se muito mais um obstáculo de caráter didático: teve como efeito que os professores construíssem uma imagem da matemática segundo a qual esta ciência tem condições de provar todas as suas proposições - razão pela qual os professores também sempre tentaram provar a regra dos sinais.

5. Por exemplo, num livro didático muito usado de L.B.Francoeur (*Cours complète de mathématiques*, tomo I, 1819). Por essa razão, é também notável que Cauchy tenha considerado necessário oferecer praticamente um curso intensivo de álgebra elementar no anexo I, "*note sur la théorie des quantités positives et négatives*", do seu famoso livro didático "*Cours d'Analyse*"(1821).

6. Em conferências a cientistas da área de ciências humanas pude constatar que especialmente a regra dos sinais lhes ficara na memória como incompreensível.

Assim, nos anos de 1883 e 1884, a Revista *Zeitschrift für matematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* promoveu um debate extremamente animado com inúmeras contribuições a partir da posição de um professor, com moderna formação em fundamentos da matemática e recém egresso da Escola superior, que defendia a ousada tese de que a regra dos sinais era uma convenção e não podia ser demonstrada. Só muito a contragosto foi, finalmente, aceito o fato da não-demonstrabilidade. Contudo, o obstáculo didático da regra dos sinais representa, de fato, um manifesto obstáculo para o aluno, como pude constatar num exemplar do livro didático de Carlo Bourlet, de 1896 (um dos primeiros livros didáticos franceses com uma notavelmente clara introdução aos números negativos, na qual também a regra dos sinais aparece explicitamente como uma convenção), no qual a tabela com as regras dos sinais traz a visível marca dos dedos de alunos que buscavam superar este percalso (Ver figura 1)[7].

Convention. — a *désignant un nombre algébrique, le symbole* + a *représente aussi ce nombre et le symbole* — a *représente le nombre égal et de signe contraire à* a.

EXEMPLES :

$$\begin{aligned} +(+4) &= +4; \\ -(+3) &= -3; \\ +(-2) &= -2; \\ -(-1) &= +1. \end{aligned}$$

Cette convention peut encore s'énoncer ainsi : *deux signes consécutifs équivalent à un signe unique qui est le signe* + *ou le signe* — *suivant que les deux signes sont les mêmes ou sont contraires.* C'est ce qu'on appelle la *règle des signes* qui se résume dans le tableau suivant :

+ +		+
+ —		—
— +		—
— —		[illegible]

Figura 1: extraída de um exemplar para aluno de Bourlet (1896), p.2

7. Este exemplar do livro de Bourlet encontra-se na *Bibliothèque Ste.Généviève*, Paris. Os muitos sinais de trabalho mostram que o livro foi efetivamente usado por alunos.

Além disso, os números negativos colocavam em questão elementos essenciais da arquitetura e da filosofia da matemática. O reconhecimento desse novo domínio de números não é apenas uma questão de avanço técnico como, por exemplo, na diferenciação entre um número e o seu valor absoluto ou entre os sinais de operação ou o sinal que precede um número. Neste sentido, é de fato compreensível uma resistência epistemológica: a matemática havia sido entendida até aquele momento como "a ciência das grandezas", sendo que grandeza – com seus elementos de 'grandeza discreta' e 'grandeza contínua' – era um conceito básico que envolvia toda a matemática, sendo aplicável em todas as situações. O conceito de números negativos, no entanto, implicava não apenas uma outra compreensão, não-empírica, da matemática – na medida em que não lhe correspondia nenhuma "realidade direta" do mundo material – mas também colocava em questão a tradicional arquitetura unívoca da matemática. Isto porque, os acima mencionados aspectos técnicos dos números negativos, implicavam uma transição do conceito geral de grandeza para o conceito abstrato de número. Este conceito abstrato de número não pode ser mais usado como fundamento da geometria e, por isso, colocava-se de forma ineludível a questão acerca do posicionamento mútuo da aritmética/álgebra e da geometria: se estes dois domínios devem ser dispostos um ao lado do outro (com a conseqüência da falta de conceitos básicos comuns) ou se uma disciplina deve ser entendida como preposta à outra. Muitos autores – partindo de uma perspectiva cultural e educacional – quiseram evitar a assim anunciada perspectiva do programa de aritmetização, segundo o qual a geometria viria a ser uma aplicação da matemática e da álgebra.

Em conseqüência disso, por mais importantes que sejam os fatores epistemológicos para o desenvolvimento da matemática numa ou noutra direção (o conceito dos números negativos teve conseqüências significativas para outros domínios da matemática), os números negativos não podem ser tomados como demonstração positiva da eficácia dos obstáculos no sentido de Bachelard. Para Bachelard os obstáculos epistemológicos têm um caráter *normativo;* eles representam etapas do progresso intelectual necessário da humanidade em direção a um domínio sempre científico-racionalista do mundo. Quem não superou algum obstáculo é, portanto, alguém que ficou para trás. Agora pode-se afirmar com segurança que o conceito unívoco de grandeza, no sentido de Bachelard, foi uma "generalização precipitada" (BACHELARD, 1975, p. 66) que impediu interessantes diferenciações como, por exemplo, o conceito de função e de variável. De outro lado, aparece muito claramente em Carnot que epistemologias alternativas lhe são conhecidas e que ele faz uma opção consciente. Penso que uma tal escolha não pode ser assimilada à noção de obstáculo no sentido de Bachelard. Parece-me antes essencial assinalar que não existe uma generalidade total no sentido de Bachelard: o desenvolvimento de conceitos ocorre no interior de determinados

grupos sociais, sendo influenciado pelos respectivos contextos culturais. Por esta razão, também não existe uma absoluta simultaneidade ou paralelismo no desenvolvimento de conceitos em diferentes culturas.

Ademais, o fato de Bachelard excluir a matemática de sua análise da evolução de erros para a verdade, declarando-a essencialmente livre de erros (idem p. 25), fundamenta-se no seu ponto de vista normativo: seguindo a tradição do racionalismo francês, ele entende o progresso da ciência como um progresso na sua matematização e realização dos ideais da "clarté" da matemática. Por conseguinte, sendo a matemática a medida ou a norma do desenvolvimento das outras ciências, não pode ter parte das fraquezas de seus progressos.

6. Erros na matemática?

Como já apresentei pontos de partida para a análise de erros na didática, a posição de Bachelard oferece-me a oportunidade de passar para a reflexão sobre erros na ciência matemática. Como foi mencionado, parece em geral inimaginável, no contexto da filosofia quotidiana de hoje, admitir a possibilidade de erros importantes na história da matemática. Noutras épocas, esta questão parece ter sido tratada de forma mais serena. Assim, Gebhardt destacou no seu importante tratado sobre a história da matemática, na parte referente ao ensino da matemática, o significado metodológico de erros os quais, ao contrário, no contexto de concepções de desenvolvimento contínuo, são mencionados apenas como casuais e breves desvios no caminho da necessidade histórica.

> "*Com a prova histórica que também na matemática o erro e a controvérsia têm sua função e significado, desaparece em grande parte aquele abismo que a separa de outras ciências, especialmente das ciências naturais*" (GEBHARDT, 1912, p. 83).

Por erros ele não entende "aqueles que podem ser cometidos por qualquer um que se ocupa da matemática... mas muito mais... aqueles... que são próprios de toda uma época, conferindo-lhe uma marca própria" (idem). Em oposição direta a Bachelard, Gebhardt é, portanto, da opinião de que épocas inteiras podem estar caracterizadas por erros. Como exemplo, ele menciona a prova de Leibniz, assumida por Euler, de que a série 1-1+1-1+... tem o valor limite de ½.

De qualquer forma, na virada do século, lidava-se de forma despreocupada com erros: não só foi fundada, em 1896, uma revista chamada *Schülerfehler* ('*Erros*

Infantis")[8], a qual examinou, com intenção terapêutica, os erros de crianças, também a ciência não foi poupada: assim, em 1904, E. Maillet sugeriu a um dos editores da revista francesa *"L'Intermédiaire des Mathématiciens"* que publicasse erros de matemáticos famosos:

> *"Il serait intéressant de former une collection des erreurs comises par les mathématiciens renommés (propriétés nettement inexactes, démonstrations fausses, erreurs de calculs, etc.) ou de leurs avis contradictoires"* [9].

O apelo não tinha nenhuma intenção de denúncia, mas de autoreflexão. Os informes publicados a partir de então constituem a fonte de uma interessantíssima coleção de erros publicada em 1935 a qual, no entanto, parece não ter encontrado, até o momento, qualquer repercussão na discussão da história da ciência ou da didática. Esta coleção foi publicada por Lecat, um matemático especialista em cálculos de variações (LECAT, 1935).

A coleção – que também não tinha como intenção a denúncia mas a reflexão – menciona cerca de 500 erros de 330 matemáticos. Entre eles encontram-se várias figuras periféricas, mas também matemáticos importantes. Lecat constata que existiu apenas um grande matemático que nunca havia cometido um erro. Este matemático era E.Galois. Por esta razão, Lecat lhe prestou uma homenagem na coleção[10].

Seria particularmente importante para o meta-saber dos estudantes de magistério que a imagem da matemática fosse "normalizada' através da história da matemática, no sentido de Gebhardt, para livrá-la do atual culto tecnológico de elite. Esta poderia ser uma contribuição contra a ideologia de que tudo é possível de ser realizado tecnicamente.

8. Esta revista foi editada a partir de 1896 pelo *Deutsche Verein zur Fürsorge für jugentlichen Psychopathen* e a *Gesellschaft für Heilpädagogik*. De 1906 a 1944 ela foi editada com o título *Zeitschrift für Kinderforschung*. Além disso, foram editados vários cadernos complementares.

9. Em: *L'Intermédiaire des Mathématiciens 11 (1904)*, p. 285. A revista publicava perguntas-problema e respostas-solução.

10. Num anexo, Lecat descreve o *affair* a respeito da falsificação dos autógrafos, ao qual estava exposto o historiador da matemática e geômetra M.Chasles e que manteve a academia parisiense em suspense pelo período de dois anos (1867 até 1869), e que chegou a ofuscar o *affair* em torno dos diários de Hitler: ponto de partida foram cartas de Descartes a Pascal que Chasles apresentou à Academia, segundo as quais nem Leibniz nem Newton, mas sim Pascal, teria desenvolvido o cálculo diferencial. Chasles buscava contornar as dúvidas a respeito das evidentes contraditoriedades entre as cartas com a apresentação de sempre novas e sempre mais antigas cartas (que lhe eram fornecidas por um falsificador de assinaturas, mais tarde condenado). Embora as contradições entre as "provas" crescessem sempre mais, Chasles apenas se deu por vencido quando uma carta de João Batista a Jesus, que estava escrita em francês, tornou definitivamente patente a fraude. Ver a respeito (PISKO, 1870).

Para aqueles a quem a persistência de "erros" na avaliação da convergência de séries parecer demasiado pré-histórica, quero citar um exemplo de persistência do século XIX: trata-se de Legendre e suas demonstrações do axioma das paralelas. Nas doze primeiras edições de seus *Eléments de Géometrie*, Legendre publicou, a partir de 1794, cinco demonstrações diferentes do famoso axioma. No seu Tratado para a Académie des Sciences, de 1833, Legendre passou em revista as demonstrações, declarando apenas duas como não rigorosas. Enquanto outros teriam ficado contentes com uma demonstração apenas, Legendre não só afirmava dispor de três como acrescentou outras três demonstrações: ao todo, portanto, seis demonstrações! Todas as demonstrações suplementares de 1833 usam o método da comparação de superfícies infinitas (ver SCHUBRING,1982a). Não posso aprofundar aqui a análise, já realizada em outro contexto, da aceitabilidade das demonstrações de Legendre na França, o que fica claro pelo fato de terem sido publicadas pela Académie. Apenas quero lembrar que na França daquele tempo existia uma notável aceitação positiva de grandezas infinitas, de modo que também não existiam maiores reservas com relação aos métodos de demonstração de Legendre (ver SCHUBRING, 1986b).

Com as demonstrações de Legendre do axioma das paralelas, acabo de mencionar um segundo exemplo da especificidade nacional e cultural do rigor matemático, segundo a qual asserções e teorias que são reconhecidas como parte do saber matemático no interior de uma cultura, numa cultura estranha são rejeitadas como não-matemáticas.

7. – e uma resposta social-construtivista

A relação aqui tematizada entre erros de alunos e erros de cientistas deve ser melhor fundamentada através de uma tese que, por enquanto, ainda tem um caráter um tanto especulativo: faz parte da lógica do mencionado desenvolvimento da pesquisa de erros que, no construtivismo social, tal como foi desenvolvido por Bauersfeld, Krummheuer e Voigt (ver BAUERSFELD e outros, 1983), e para os quais o significado e o sentido de conceitos somente se constituem na interação social, os assim chamados erros de alunos não sejam mais caracterizados como "erros" quando eles se enquadram numa estratégia reconhecida pelo seu grupo social. No entanto, este construtivismo deve responder à questão de como podem coexistir o relativismo social e a objetividade atribuída à matemática[11]. Do contexto das observações históricas apresentadas, surge a tese de que esta objetividade não existe e que também na ma-

11. Na concepção construtivista de fundamentação psicológica, como foi representada especialmente por von Glasersfeld, não existe resposta satisfatória a respeito da "certeza" do saber matemático. A declaração a respeito do caráter dedutivo-hipotético da matemática implica numa acepção unilateral do objeto da matemática (ver GLASERSFELD, 1987, p.19-21).

temática, enquanto ciência, os significados dos conceitos são estabelecidos socialmente e que a imposição de teorias e epistemologias ocorre, inicialmente, no ordenamento de um contexto cultural. Ou seja, existe um sujeito social na história da matemática: a comunidade social dos matemáticos, à qual, por exemplo, é comum uma epistemologia marcada por um determinado ambiente cultural (pelo menos até certo ponto).

A tese pode ser comprovada, por exemplo, ali onde se encontram duas culturas com diferentes concepções de conhecimento. A transmissão de conhecimentos matemáticos de uma cultura para outra permite, pois, estudos de caso a respeito do contrutivismo social.

Existe um tal estudo de caso a respeito da transmissão do campo conceitual das frações decimais da matemática indiana para a matemática árabe que parece confirmar a minha tese (ABDELJAOUAD, 1978). Os números entre nós conhecidos como arábicos, como também o *zero* e o sistema decimal, vêm da matemática indiana. Tanto árabes quanto gregos, ao contrário, usam, inicialmente, letras do alfabeto para designar números. Verificou-se que aqui o sistema arábico mais antigo tem sua origem no sistema fenício das letras/número. Entre os árabes estavam em uso duas tradições distintas de frações: o sistema babilônico sexagesimal e as frações unitárias egípcias. Na época áurea da ciência árabe, entre os séculos VIII e X, os números indianos e as frações decimais não obtiveram reconhecimento e um excelente livro didático, escrito por Al-Uqlidisi no ano de 952, que apresentava estes novos ensinamentos, foi esquecido e redescoberto apenas em 1966 (SAIDAN, 1966). Fortes demais eram ali as resistências contra a concepção indiana de matemática, como deixa claro o severo juízo de Al-Biruni do século XI:

> "*Os indianos não têm filósofos como os gregos os quais apresentavam nos seus escritos o objeto de forma puramente científica; eles não produziram quase nenhum livro que não fosse uma colcha de retalhos nas quais se misturavam em total desordem todos os tipos de crenças populares. Entre eles reinava o espírito da autoridade. Eu asseguro, por isso, que os seus livros de cálculo e de matemática só podem ser comparados com montes de pedras nos quais se encontram cacos de cerâmica ou com pérolas misturadas ao estrume de camelo*" (apud ABDELJAOUAD, 1978, p.14).

Além disso, existiam também epistemologias específicas de certos domínios totalmente contraditórias: não só o *zero* não era reconhecido como número, mas também o *um*, uma vez que os números eram apresentados como múltiplos da unidade e ela mesma não era reconhecida como número (idem p. 15). Apenas no século XIV, os números indianos e as frações decimais foram reconhecidos pelos árabes, mas as tradições mais antigas permaneceram em uso até final do século XIX.

8. Transposição didática

Um outro domínio que permite interessantes estudos sobre a forma de influência de grupos sociais como sujeitos da produção ou transformação de saber é o da elementarização do conhecimento matemático. Embora a didática do conteúdo e seu programa de pesquisa da elementarização represente uma das mais antigas tradições da didática da matemática, surpreendentemente, não existem, que eu saiba, concepções teóricas abrangentes a respeito desse programa, se não se levar em consideração o livro de Lenné (LENNÉ, 1969), o qual, no entanto, foi concebido com intenção crítica. Tanto mais importante torna-se agora o livro do especialista francês em didática da matemática Chevallard (CHEVALLARD, 1985).

O estudo examina os processos através dos quais o saber científico é transformado em saber escolar e representa, por isso, uma contribuição essencial sobre os fundamentos da didática, a qual examina pela primeira vez em profundidade o processo da elementarização do saber. Neste momento, esta obra não pode ser apreciada, razão pela qual limito-me a fazer penas uma observação crítica: na concepção de transposição de Chevallard o *savoir savant* (saber científico) tem sempre uma função proeminente: ela é a única fonte de conhecimento novo e a partir disso o saber novo transita para outras formas sociais do saber como, p. ex., a matemática escolar. Um modelo tão limitado e unilinear corresponde não apenas à imagem inicialmente citada de Kuyk, mas também vai de encontro a microestudos históricos a respeito da produção do saber: segundo estes estudos, existem, numa dada sociedade, vários grupos mantenedores de saber, muitas vezes separados entre si, que, ao mesmo tempo, produzem e difundem saber novo. A difusão e a aceitação do saber por outros grupos depende de mecanismos sociais de negociação. Por exemplo, na Prússia do século XIX, os professores de ginásio formaram um desses grupos mantenedores que produziam saber (ver SCHUBRING, 1983 e 1986 c).

9. – um exemplo: o primeiro livro escolar de teoria dos conjuntos, setenta anos antes de Bourbaki!

É precisamente a teoria dos conjuntos, considerada o exemplo padrão da introdução de concepções científicas na escola, que mostra que a transferência do novo saber para o saber escolar não precisa necessariamente tomar o caminho da comunidade dos cientistas. Para minha própria surpresa, nas pesquisas que realizei sobre o desenvolvimento da matemática escolar no século XIX, deparei com um livro escolar que não só foi a primeira transferência didática da teoria dos conjuntos de Cantor, mas que, ao mesmo tempo, propagava a reconstrução radicalmente nova da aritmética e da álgebra para a escola, sobre a base dos conceitos da teoria dos conjuntos - setenta anos antes da influência de Boubarki.

A análise deste livro didático e seu contexto exigem uma exposição detalhada que deve ser realizada num outro momento. Aqui há espaço somente para alguns comentários. Trata-se do livro: Friedrich Meyer - *Elementos de Aritmética e de Álgebra*, Halle 1885[12]. Meyer nasceu, em 1842, nos arredores de Kulm, freqüentou o ginásio de Kulm, estudou em Breslau e Halle, mas principalmente na Universidade de Berlim, sob a orientação de Kummer. Em 1868, tornou-se professor de matemática no Ginásio de Halle, onde permaneceu, reconhecido e admirado como erudito e educador, até sua morte prematura em 1898. Especialmente renomada era sua vasta cultura que ultrapassava em muito o campo da matemática e das ciências naturais. Em 1894, recebeu da Universidade de Halle o título de *Doutor Honoris Causa*, como reconhecimento pelo seu livro sobre a teoria dos conjuntos[13]. Cantor era um apreciador desse livro e o recomendava aos professores de matemática[14]. Wilhelm Lorey – conhecido como historiador tanto da matemática como do ensino da matemática – destacou com ênfase os méritos dessa obra no discurso que pronunciou na festividade do septuagésimo aniversário de Cantor:

> "*(Meyer) foi um dos primeiros que reconheceu o amplo significado de suas idéias. Numa época em que, também na nossa pátria, o mundo científico rejeitava estas idéias, ele já havia exposto com grande clareza, nos seus elementos destinados à escola, os principais conceitos da teoria dos conjuntos, recomendando 'acaloradamente' o estudo de seus escritos aos professores de matemática*" (LOREY, 1915, p.273).

O trabalho de Meyer torna-se ainda mais significativo se levarmos em conta que, em 1885, as idéias de Cantor a respeito da teoria dos conjuntos ainda não haviam sido apresentadas integralmente; na sua forma mais elaborada elas foram publicadas apenas em 1895/96 (partes importantes já eram conhecidas desde 1883).

12. Esta edição está designada como segunda impressão; a primeira não pôde ser encontrada.

13. Agradeço ao Sr. H.Schwabe, Diretor do Arquivo da Universidade de Halle, pelas suas pesquisas e informações.

14. Ver (HOFFMANN, 1899, p.552). Numa carta a Bendixson, com quem Cantor trabalhou temporariamente sobre a teoria dos conjuntos, Cantor manifestou, com relação ao livro de Meyer, ao lado de elogios a Meyer como pedagogo, reservas a respeito do rigor das provas (PURKERT/ILGAUDS,1987, p.132) – do ponto de vista do cientista ambicioso, mas sem restrições acerca do caráter inovador do livro.

Isto mostra, concretamente, que as idéias de Cantor foram para Meyer apenas o impulso para o desenvolvimento de concepções básicas que há muito haviam sido apresentadas por professores de matemática. De fato, Meyer não apresenta o conceito de conjunto como algo novo, mas como parte de uma tradição que remonta aos gregos antigos. Pessoalmente, também já tive oportunidade de mostrar que não apenas Johann Schultz usou, em 1788, o conceito de conjunto na sua concepção de infinito para distinguir os conceitos de grandeza e de número (SCHUBRING, 1982a), mas que na segunda década do século passado já existiram livros didáticos que desenvolviam a aritmética a partir de um conceito de conjunto (SCHUBRING, 1983, p.189).

Além disso, o livro de Meyer é também sobremodo interessante como forma de disseminação das concepções de Cantor, pois, como mostrou Walter Purkert, o próprio Cantor não havia ficado surpreso com as antinomias dos conjuntos, já que estas lhe eram há tempo conhecidas, e também porque pensava ter excluído conjuntos inconsistentes através das suas definições. Em cartas dirigidas a Hilbert, Cantor explicita que a sua definição de 1895 (inclusão de determinados objetos diferenciados... num todo) exercia igualmente a função de excluir conjuntos inconsistentes, o mesmo ocorrendo com a sua definição de 1883: "*Qualquer multiplicidade pode ser pensada como um*" (PURKERT, 1986, p. 18ss.; ver também PURKERT/ILGAUDS, 1987). É notável também que Meyer tenha introduzido essa definição de conjunto, de 1883, no seu livro didático.

A respeito do conteúdo do livro quero aqui apenas observar que se trata de um livro didático elaborado de forma moderna e estruturado axiomaticamente. Assim, nas operações com números já encontramos a apresentação dos axiomas da identidade, da comutatividade, associatividade e distributividade. O conceito de número é derivado do conceito de conjunto e de potência.

Também o exame das influências do livro didático de Meyer traz resultados notáveis. Num primeiro momento, o livro parece ter deixado os colegas de disciplina mudos uma vez que nas três grandes revistas – o *Archiv für Mathematik und Physik*, a *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* e a *Zeitschrift für Mathematik und Physik* - que constantemente publicavam resenhas de um grande número de livros didáticos de matemática, não apareceu nenhuma resenha. No entanto, ao final, obteve não apenas o reconhecimento de eminentes colegas de área como Max Simon (HOFFMANN,1899, p.552), como também muito rapidamente proporcionou aos professores de matemática o acesso à teoria de conjuntos de Cantor (ver LIETZMANN,1909, p.61). O livro de Meyer não foi adotado oficialmente como livro didático na sua escola, mas a intenção do livro era "*servir aos especialistas da mesma instituição como base de atuação conjunta*" (MEYER, 1885, p.iii) e diversas evidências indicam que Meyer o usou nas aulas das classes mais avançadas do ginásio (*Oberstufen*)* (por exemplo, MEYER, 1891, p. 29). Lietzmann era cético quanto à possibilidade de se ensinar a teoria dos conjuntos como base do ensino da matemática, como fica claro a partir de sua observação:

> "*infelizmente, não se pode depreender do livro, de que forma o autor nele fundamentou suas aulas*"[15].

Mas, de outro lado, Lietzmann admite que, no início do século XX, a teoria dos conjuntos era considerada um objeto possível de ensino na Oberstufe. Wieleitner, p. ex., apresentou num artigo de 1906 sugestões a esse respeito. Independentemente da questão da ensinabilidade, já naquela época, teoria dos conjuntos era consensualmente reconhecida como conhecimento básico indispensável para os professores. A Enciclopédia de Matemática Elementar[16], de certo modo clássica, inicia o primeiro capítulo a respeito dos fundamentos da aritmética (no primeiro volume sobre aritmética e álgebra) com um item sobre "teoria elementar dos conjuntos".

Considerando a rápida aceitação da teoria dos conjuntos de Cantor pelos matemáticos e a discussão a respeito de sua inclusão ao menos como conteúdo nas séries superiores, coloca-se a questão do porque "Bourbaki", a partir dos anos 60, ter sido considerado uma radical reorientação nas escolas alemãs. Aparentemente, aquele movimento iniciado por volta de 1910 foi interrompido. As razões dessa ruptura ainda não são conhecidas. Como primeira hipótese oferece-se a tese de que o movimento por uma renovação da aritmética e álgebra com base na teoria dos conjuntos tenha sido amortecido pelo movimento de muito mais poderosa encenação, iniciado em 1902, a favor de uma interpenetração geral entre o ensino de matemática e o conceito de função. Ponto central da discussão para os últimos anos do ginásio tornou-se o cálculo diferencial (sobre a encenação do movimento da reforma, ver SCHUBRING, 1987 a).

10. Observação final

Concluindo, gostaria ainda de chamar atenção para um ponto crítico. Foram apresentadas aqui numerosas provas a favor da função produtiva e impulsionadora do ensino para o desenvolvimento da matemática. De outra parte, porém, não podemos fechar os olhos para o fato de que da escola também partem impulsos dogmatizantes e formalizantes que afetam o desenvolvimento da ciência tal como o exagêro fundamentalista de bases seguras. No entanto, pode ser uma tarefa meritória para a história da matemática descobrir aqueles pontos nos quais a busca justificada de fundamentos se converte em formalismo.

* Trata-se dos três últimos anos do ginásio quando os alunos estão entre o 11º e o 13º ano de escolaridade e têm entre 16 e 18 anos (nota do tradutor).

15. (LIETZMANN, 1909, p.61). Esta observação aplica-se naturalmente a todos os livros didáticos; a explanação requerida caberia num tratado didático, não num livro didático. Não há nenhum artigo de Meyer deste tipo.

16. A primeira edição apareceu em 1903, a terceira já em 1909.

Referências Bibliográficas

ABDELJAOUAD, M.: Vers une épistémologie des décimaux. – In: Miftah-al-Hissab (1978) Nr. 50, p.1-27.

BACHELARD, G.: La formation de l'esprit scientifique. – Paris: Vrin, 1975 (deutsch: Die Bildung des wissenschaftlichen Geistes. – Frankfurt/M.: Suhrkamp, 1978).

BAUERSFELD, H. u.a.: Lernen und Lehren von Mathematik.-Köln: Aulis, 1983 (Untersuchungen zum Mathematikunterricht; Bd.6).

BOURLET, C.: Leçons d'algebre élémentaire.- Paris: Colin, 1896.

BROUSSEAU, G.: Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. – In: Recherches en didactique des mathématiques 4 (1983) 2, p. 164-197.

CHEVALLARD, Y.: La transposition didactique.- Grenoble: Edition Sauvages, 1985.

CORNU, B.: Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. – Université 1 de Grenoble, Thèse de 3ème cycle, Mathématiques, 1983.

ECCARIUS, W.: Der Techniker und Mathematiker A.L. Crelle und sein Beitrag zur Förderung und Entwicklung der Mathematik im Deutschland des 19. Jahrhunderts.- Univ. Leipzig, Diss., 1974 (Autorreferat in: NTM 12(1975), p. 38-49).

FÖRSTEMANN, W.A.:Über den Gegensatz positiver und negativer Größen.- Nordhausen, 1817.

FÜHRER, L. (Hrsg.): Mathematik-Geschichte(n). – mathematiklehren (1986) H. 19.

GEBHARDT, M.: Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht. – Leipzig: Teubner,1912(IMUK-Abh.; Bd. IV, 6).

GERSTER, H.-D.: Lerndefizite als Folge von Lehrdefiziten? – Erfahrungen aus der Analyse von Schülerfehlern bei den schriftlichen Rechenverfahren. – In: Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis/ J.H. Lorenz (Hrsg.) (Untersuchungen zum Mathematikunterricht; Bd. 10), Köln: Aulis, 1984, p. 56-70.

GLASERSFELD, E. von: Subjektive Erfahrungsbereiche und Konstruktion der Wirklichkeit. – In. Interdisziplinäres Kolloquium. Heinrich Bauersfeld zu Ehren. Bielefeld: IDM, 1987 (Occasional paper; Nr. 96), p. 7-22.

GRABINER, J.: Is mathematical truth time - dependent? – In: American Mathematical Monthly 81 (1974), p. 354-365.

HOFFMANN, J.C.V.: Zum Andenken an Dr. Friedrich Meyer. – In: Zeitschrift f. math. u. nat. Unterricht 30(1899), p. 551-553.

KUHN, T.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. – Frankfurt/M.: Suhrkamp, 1967.

LABORDE, C.: Punkt, Gerade, Strecke – Alte Gegenstände der Geometrie. – In: Mathematikdidaktik – Bildungsgeschichte – Wissenschaftsgeschichte / H.G. Steiner, H. Winter (Hrsg.). Köln: Aulis, 1985, p. 108-113.

LAKATOS, I.: Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery. – Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

LECAT, M.: Erreus de mathématiciens des origines à nos jours. – Bruxelles/Louvain, 1935.

LENNÉ, LIETZMANN, W.: Stoff und Methode im Mathematischen Unterricht. – Leipzig/ Berlin: Teubner, 1909.

LOREY, W.: Der 70. Geburtstag des Mathematikers Georg Cantor. – In: Zeitschrift f. math. u. nat. Unterricht 46(1915), p. 268-274.

MENGER, K.: Selected papers in logic and foundations, didactics, economics. – Dordrecht/Boston/London: Reidel, 1979.

MEYER, F.: Elemente der Arithmetik und Algebra. Zweite Auflage. – Halle: H.W. Schmidt, 1885.

MEYER, F.: Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Gymnasiums. – Schulprogramm des Stadtgymnasiums zu Halle a.S. 1891.

PISKO, F.J.: Newton oder Pascal? Schulprogramm Wiedner Kommunal-Oberrealschule Wien 1870.

PURKERT, W.: Georg Cantor und die Antinomien der Mengenlehre. – Preprint Naturwissenschaftliches-Theoretisches Zentrum Karl-Marx-Universität,1986.

PURKERT, W.: Ilgauds, H.J.: Georg Cantor 1845-1918.- Basel/Boston/Sttutgart: Birkhäuser, 1987.

RADATZ, H.: Ubersichtsreferat zu: Schülerfehler. – In: Forschungsbeiträge zum mathematischen Lehr-Lern-Prozeß, Band 2 / J.H. Lorenz; H. Radatz. Schriftenreihe des IDM, Band 19(1979), 57-59.

SAIDAN, A.S. (ed., transl.): The arithmetic of al-Uqlidisi. – Dordrecht: Reidel, 1978.

SCHARLAU, W. (Bearb.): Rudolf Lipschitz – Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker und Weierstrass und anderen. – Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg, 1986.

SCHUBRING, G.: Die historisch-genetische Orientierung in der Mathematik-Didaktik. – in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 9(1977), p. 209-213.

SCHUBRING, G.: Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. – Stuttgart: Klett, 1978.

SCHUBRING, G.: Gegenständliche und soziale Momente des Wissens als Kategorien für Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik-Didaktik. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 2(1981), p. 3-36.

SCHUBRING, G.: Ansätze zur Begründung theoretischer Terme in der Mathematik – Die Theorie des Unendlichen bei Johann Schultz (1739-1805). – In: Historia Mathematica 9(1982a) , p. 441-484.

SCHUBRING, G.: Die Mathematik an der Ecole Normale des Jahres III – Wissenschaft und Methode. – In: Wissen und Bewußtsein. Studien zu einer Wissenschaftsdidaktik der Disziplinen / Schmithals, F. (Hrsg.). – Hamburg: Arbeitsgemeinschaft für Hochschuldidaktik 1982b, p. 103-133.

SCHUBRING, G.: Die Entstehung des Mathematiklehrer-Berufs in Preußen. – Weinheim/Basel, 1983.

SCHUBRING, G.: Ruptures dans le status mathématique des nombres négatifs. – In: petit x (1986a) No. 12, p. 5-32.

SCHUBRING, G.: Des échanges entre les mathématiciens français et les mathématiciens allemands sur l'infiniment grand. – Vortrag im Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Paris, 23.4.1986b (Manuskript).

SCHUBRING, G.: Bibliographie der Schulprogramme in Mathematik und Naturwissenschaften (Wissenschaftliche Abhandlungen) 1800-1875. – Bad. Salzderfurth, 1986c.

SCHUBRING, G.: The intercultural 'transmission' of concepts a case study of the first international curricular reform movement in mathematics education around 1900. Vortrag auf der Tagung: Comparative Studies of Mathematical Curricula in Different Countries, Frascati, Mai 1987. – Bielefeld: IDM, 1987a, (Ocassional paper; Nr. 92).

SCHUBRING, G.: On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. – In: for the learning of mathematics 7(1987b) 3, p. 41-51.

TOEPLITZ, O.: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. – In: Jahresberichte der DMV 36(1927), p. 88-100.

TOEPLITZ, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. – Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1972.

VOIGT, J.: Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht: theoretische Grundlagen und mikro-ethnographische Falluntersuchungen. – Weinheim: Beltz, 1984.

WEBER, H. & WELLSTEIN, J. : Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, 4 tomos . Leipizig: Teubner, 1903.

WILDER, R.L.: History in the mathematics curriculum: Its status. Quality and function. – In: Noticies of the AMS 79(1972), p. 479-495.

WUßING, H.: Einleitung. Zu: B. Bolzano, Beyträge zu einer begründeteren. Darstellung der Mathematik. – Darmstadt, 1974, p. V-XXXIX. Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, 4 tomos . Leipizig: Teubner, 1903.

WIELEITNER, H. : Der Zahl- und Mengenbegriff im Unterricht. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, 1902, 12, p. 102-110.

Modelagem matemática uma alternativa para o ensino-aprendizagem da matemática no meio rural

*Nilce Fátima Scheffer**

*Adriano José Campagnollo ***

RESUMO: Este artigo relata uma pesquisa que envolve uma prática de Modelagem Matemática desenvolvida numa escola do meio rural, localizada num município do interior de Erechim/RS, como alternativa ao ensino-aprendizagem da Matemática no 1º grau.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática; Ensino Rural; Ensino-Aprendizagem; Problematização.

ABSTRACT: This paper presents a research effort that describes the use of Mathematical Modelling in a rural school in the area of the town of Erechim, in the state of Rio Grande do Sul. The description presents Mathematical Modelling as valid alternative for teaching-learning Mathematics in an elementary school.

KEY-WORDS: Mathematical Modelling; Rural Teaching; Teaching-Learnimg; Problematization.

* Mestre em Educação Matemática, professora do Curso de Matemática da URI - Campus de Erechim/RS e Orientadora deste Projeto, Membro do GPIMEM- Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP. e-mail: nilcefs@caviar.igce.unesp.br

** Aluno do Curso de Matemática da URI – Campus de Erechim/RS e Bolsista do PIBIC/CNPq 1996 a 1998.