axiomático, dedutivo e indutivo a experiências que o estudante encontra em sua vida diária ou em seus desafios intelectuais. O curso foi ministrado pela primeira vez para estudantes calouros de ciência na Universidade de Birzeit, em 1978. Um livro-texto para o curso (em árabe) foi publicado pela Universidade de Birzeit, em 1971.

5. Gostaria de agradecer aqui a David Henderson da Universidade de Cornell, professor visitante da Universidade de Birzeit durante o segundo semestre de 1980/81, que primeiro apontou para mim que foi Omar Khayyam, e não matemáticos italianos, quem encontrou, pela primeira vez, uma solução geral para a equação cúbica. De fato, Henderson escreveu uma exposição detalhada da geometria de Khayyam para a equação cúbica geral que foi incluída no curso mencionado na nota quatro.

6. Existem, todavia, alguns casos na história (especialmente em relação a algumas convenções) nos quais uma imitação cega provou ser a melhor. Os numerais arábicos constituem um desses casos. Como originários do Leste, eles eram escritos da direita para esquerda (ao descrever o número natural, começamos com as posições da unidade da extrema direita e nos movemos para a esquerda). E este é o modo usado em quase todas as culturas que existem hoje em dia. Isto facilita para diferentes pessoas comunicarem-se 'numericamente'. Você pode imaginar o que teria acontecido se os europeus decidissem expressar números naturais de forma consistente com suas próprias culturas, começando com a posição das unidades da extrema esquerda? De outro lado, a 'reta numérica', originária no Oeste, 'cresce' da esquerda para a direita, e esta é a maneira que prevalece em todas as sociedades, o que torna muito mais fácil para os povos de diferentes culturas comunicarem-se 'graficamente'.

7. Gostaria de mencionar uma razão, que acredito ser importante para que os clubes tenham sucesso nas escolas femininas, mas não nas masculinas. As meninas, em geral, estão fora do núcleo da sociedade (o que é verdadeiro em muitas sociedades); assim, mais do que os rapazes, elas encontram mais significado e relacionamento em modos 'não ortodoxos' da educação, tais como as atividades de clubes.

PROFESSORES QUE EXPLICITAM A UTILIZAÇÃO DE FORMAS DE PENSAMENTO FLEXÍVEL PODEM ESTAR CONTRIBUINDO PARA O SUCESSO EM MATEMÁTICA DE ALGUNS DE SEUS ALUNOS*

MARIA MANUELA MARTINS SOARES DAVID**

MARIA DA PENHA LOPES***

RESUMO: Neste artigo analisamos as características do aluno de sucesso/fracasso em matemática, levando em consideração fatores de ordem psicológica e cognitiva. O aluno de sucesso a longo prazo passou a ser identificado como aquele que apresenta um pensamento flexível, que lhe permite alcançar uma compreensão mais global e significativa dos conceitos. Partindo de observações de sala de aula e das interações entre professor e alunos verificamos que, quando os professores fazem uso de formas de pensamento flexível, mesmo que de forma não deliberada, eles podem estar contribuindo para que alguns alunos busquem um sentido para o uso de fórmulas e conceitos matemáticos, e, em última análise, contribuindo para o sucesso em matemática. Sugere-se que os professores adotem, deliberadamente, uma postura em sala de aula que

*Este artigo é parte de um projeto integrado de pesquisa patrocinado pelo CNPq (processo 521829/96-8) denominado 'Sucesso e Fracasso em Matemática', e recebeu a colaboração de Gizelle da Silva Leite (bolsista de Aperfeiçoamento), e de Alisson Augusto Marques e Denise da Silva Ribas Capuchinho (bolsistas de Iniciação Científica).

**Professora da Faculdade de Educação da UFMG.

***Professora aposentada do Departamento de Matemática da UFMG.

incentive habilidades de resolução de problemas e formas de pensamento autônomo e flexível.

PALAVRAS-CHAVE: Sucesso e fracasso em Matemática; Flexibilidade de Pensamento; Cognição

ABSTRACT: In this article we examine the characteristics of the successful/unsuccessful student in Mathematics considering psychological and cognitve factors. The successful student at a long range was identified with that one which exhibits a flexible way of thinking, which allows him to attain a more global and significant understanding of the concepts. Starting from teacher and students interactions and from classroom observations we have verified that when teachers make use of flexible forms of thinking, even when in a non-deliberate fashion, they may be contributing for some students to seek for a sense in the use of mathematical concepts and formulas, and, at last, contributing for their success in Mathematics. We suggest that teachers deliberately assume a classroom attitude which will stimulate problem solving abilities and forms of flexible and autonomous thinking.

KEY-WORDS: Success and failure in Mathematics; Flexible thinking; Cognition

A FLEXIBILIDADE DE PENSAMENTO E A QUESTÃO DO SUCESSO/FRACASSO EM MATEMÁTICA

Na nossa experiência, temos observado que o processo de ensino pode estar contribuindo para o erro e o fracasso em matemática. A ênfase no ensino de procedimentos (algoritmos e regras), dissociados do conceito que está por trás, inibe a versatilidade de pensamento necessária ao sucesso em matemática (DAVID & MACHADO, 1996).

Os autores GRAY & TALL (1993) abordam a questão do sucesso e do fracasso em matemática, analisando o modo como os alunos lidam com determinados conceitos matemáticos, os 'proceptos'. Para esses autores, os 'proceptos' são objetos mentais que consistem numa combinação de um procedimento com um conceito a ele associado, e com um

símbolo que pode ser usado para representar qualquer um dos dois, ou ambos. Por exemplo, o símbolo 3+2 é tanto o procedimento de adicionar 2 com 3, como a representação do conceito de soma de 2 e 3. Segundo estes autores, essa noção de 'procepto' se aplica àqueles conceitos da aritmética, da álgebra, da análise, que são aprendidos inicialmente através de um processo, mas não se aplica aos conceitos que são aprendidos via definição, nem à maior parte dos conceitos da geometria, que são introduzidos pela via da percepção visual.

Os autores GRAY e TALL observam que os alunos que têm sucesso em matemática são aqueles que conseguem lidar com a simbologia matemática, ora entendendo o símbolo como um procedimento a ser realizado, ora percebendo nele o conceito subjacente, como no exemplo acima. Esses alunos conseguem mais facilmente relacionar fatos matemáticos e fazer generalizações.

Por exemplo, o aluno que percebe o símbolo 6 x 8 como o produto 48 vai responder mais prontamente e com menos chance de erro do que o aluno que, face ao símbolo 6 x 8, vai fazer 12+12+12+12 (isto é, 6 vezes 2, mais 6 vezes 2, mais 6 vezes 2, mais 6 vezes 2), ou então 24+24 (isto é, 6 vezes 4 mais 6 vezes 4), que são caminhos diferentes para chegar ao resultado 48, recorrendo à soma. O primeiro aluno faz uma matemática mais fácil, uma vez que ele é mais versátil no associar o símbolo com o conceito.

O segundo aluno, ao contrário, está preso ao procedimento, e pode até acertar os cálculos, mas vai fazer uma matemática mais difícil porque vai repetir a todo momento cada etapa do processo. Isto pode resolver as suas necessidades de cálculo por algum tempo mas, a longo prazo, esses alunos não desenvolverão as habilidades necessárias para um desempenho eficaz em matemática.

O trabalho de GRAY e TALL veio nos ajudar a explicitar alguns problemas do ensino da matemática que já vinham sendo objeto de nossa reflexão. A partir dele montamos um projeto de pesquisa com o objetivo de observar influências da atuação do professor em sala de aula na postura do aluno, com relação ao aprendizado da matemática.

Na nossa pesquisa, passamos a nos interessar pelos fatores de ordem didático-pedagógicos que podem levar o aluno a desenvolver uma maior flexibilidade de pensamento, permitindo-lhe alcançar uma compreensão mais global e significativa dos conceitos. Essa compreensão supõe o domínio da linguagem simbólica específica da matemática e a associação do símbolo com um procedimento ou com o conceito que ele representa, ou ainda com outros conceitos mais gerais a ele relacionados, conforme a situação. A flexibilidade de pensamento passa pela facilidade com que o aluno transita entre esses diferentes níveis de associação nos momentos adequados.

LIMITANDO O CAMPO DE PESQUISA

Estamos desenvolvendo nosso trabalho, tomando por base o sistema escolar vigente, reconhecendo que ele se apoia em formas de avaliação que favorecem os alunos oriundos das classes dominantes, e numa concepção de sucesso e fracasso escolar que passa por uma forte determinação social.

A análise dos fatores de ordem sócio-cultural que contribuem para essa discussão tem sido considerada em diversas pesquisas, como nos relata CARRAHER (1989). Outros autores relacionam a questão do sucesso e do fracasso à organização e estrutura do sistema de ensino (ARROYO, 1992), a fatores de ordem psico-social (PATTO, 1990), ou a fatores de ordem psicanalítica (BALDINO, 1995). A consideração desses fatores implica na necessidade de revisão de toda uma estrutura escolar, em particular do sistema de avaliação, e conseqüentemente da concepção de sucesso e fracasso em matemática.

Sem desconsiderar a importância desses outros fatores, optamos no nosso trabalho por abordar os aspectos de ordem cognitiva, mantendo nossa análise no nível da dimensão pedagógica, tendo em vista nossa área de atuação profissional.

Embora esses aspectos sejam considerados por alguns dos autores acima como menos 'explicativos' da questão do sucesso/fracasso escolar que os outros aspectos de caráter mais abrangente, nosso objetivo é mostrar que a análise das interações professor-aluno-conteúdo, feita a

partir da observação direta da sala de aula, também pode dar uma contribuição significativa para a discussão da questão em pauta. Para isso buscaremos apoio no grupo de pesquisadores que vêm trabalhando na linha da 'aceleração cognitiva' e do 'ensinar a pensar' (ADEY, 1988; COLES, 1993; McGUINNESS, 1993; TANNER & JONES, 1995), cujos trabalhos vêm comprovando o papel significativo das interferências do professor para o desenvolvimento do pensamento dos alunos. Esses pesquisadores se apoiam em modelos de instrução que tomam por base a idéia de que a aprendizagem e o pensamento são construções sociais, adotando uma perspectiva sócio-construtivista da aprendizagem.

UMA SONDAGEM: COMO OS FORMANDOS DE UMA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA VÊEM A QUESTÃO DO SUCESSO/FRACASSO NESTA DISCIPLINA

Iniciamos nossa pesquisa sobre sucesso e fracasso em matemática, buscando conhecer qual é a concepção mais comum no nosso sistema escolar do 'aluno com facilidade' e do 'aluno com dificuldade' em matemática. Com esse objetivo, foi aplicado um questionário a 35 alunos do último período do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG, no primeiro semestre de 1996. Esse questionário era constituído de duas partes, que foram respondidas separadamente, para que as respostas a uma delas não influenciassem as respostas à outra. Na primeira parte perguntava-se sobre as principais características do aluno que tem facilidade ou dificuldade em matemática. Na segunda parte, as perguntas tinham um caráter mais específico.

Numa dessas perguntas, pretendia-se verificar até onde ia a associação entre o aluno que tem facilidade em Matemática com o aluno que tem boas notas, ou o que tem dificuldade com o que tem más notas. Noutra se perguntava se o modo de o sujeito pesquisado enxergar a questão do sucesso/fracasso tinha sido de alguma maneira influenciado pela formação que ele vinha recebendo no seu curso de licenciatura.

A análise do questionário nos revelou que, na percepção dos formandos em matemática, o 'aluno com facilidade' é, em primeiro lugar, o aluno aplicado, esforçado e interessado, e, em segundo lugar, o aluno questionador e que tem 'raciocínio lógico'. Uma leitura dos questionários evidencia a associação entre 'raciocínio lógico' e as seguintes habilidades, que citamos literalmente: agilidade de raciocínio, alto poder de abstração, encadeamento de idéias, capacidade de descobrir relações entre as coisas, de analogias entre uma matéria e outra. Apareceram ainda outras expressões análogas que traduzem as mesmas habilidades.

Já os 'alunos com dificuldade', são identificados com mais freqüência como os que são desinteressados, têm dificuldade em abstrair, são dispersos, têm preguiça de raciocinar. Com menor freqüência, aparecem as seguintes características: têm 'complexos' (sentem-se incapazes de aprender matemática, têm uma antipatia natural pela matéria, têm problemas de ordem emocional) são pessimistas (acham, à priori, que a matemática é difícil e complicada) resolvem os exercícios mecanicamente, seguindo um modelo não dominam conceitos básicos. São poucas as respostas que associam a dificuldade do aluno a fatores externos ao mesmo, por exemplo, a maneira como o professor leciona ou o fato de ter parado de estudar por algum tempo.

É interessante notar que os sujeitos pesquisados consideram, em geral, o sucesso em matemática associado a características individuais, enquanto o fracasso aparece também ligado a fatores externos aos alunos, apesar dessa associação ter sido feita em reduzida escala. Ninguém expressou uma relação clara entre dificuldade/facilidade em matemática com dificuldade/facilidade no uso e compreensão da simbologia e da linguagem matemática.

Na segunda parte do questionário, surpreendentemente, as opiniões dos sujeitos pesquisados no que concerne à identificação entre facilidade/dificuldade e boas notas/más notas, fica dividida meio a meio: 50% acha que o que tem facilidade é um bom aluno e o que tem dificuldade é um mau aluno; 50% acha que facilidade/dificuldade não estão relacionadas com as notas dos alunos. Esse resultado parece refletir, de alguma forma, as discussões levantadas nas disciplinas de formação pedagógica. No próprio questionário, 90% dos sujeitos pesquisados alegam que essas discussões influenciaram o seu modo de enxergar a questão do sucesso/fracasso em matemática.

UMA EXPECTATIVA: UMA ESCOLA QUE PODE ESTAR INCENTIVANDO A FLEXIBILIDADE DE PENSAMENTO DE SEUS ALUNOS

Também entrevistamos 21 alunos, entre 'bons', 'medianos' e 'fracos' em matemática, de uma escola pública de ensino fundamental, da rede federal, onde desenvolvemos parte da pesquisa, que ora relatamos, com o acompanhamento de três turmas de 5ª, 7ª e 8ª séries respectivamente.

Escolhemos essa escola para desenvolver o nosso trabalho porque os seus alunos 'são conhecidos' por terem um raciocínio independente e por terem uma postura de grande autonomia no que diz respeito ao seu processo de aprendizagem. Esperávamos encontrar nessa escola professores com procedimentos de ensino que incentivassem o pensamento flexível, isto é, dando ênfase, entre outras, àquelas habilidades de pensamento que são ressaltadas pelo grupo de pesquisadores da linha da aceleração cognitiva, como as habilidades de planejar, monitorar, avaliar, fazer perguntas relevantes, refletir, explicar, levantar hipóteses e testá-las, justificar e provar, visualizar conexões entre diferentes linhas de pensamento, distingüir entre considerações relevantes e irrelevantes, avaliar linhas de ação conflitantes, pensar analogicamente, detectar falácias num pensamento, ser capaz de apresentar justificativas/razões para as posições assumidas e as decisões tomadas, generalizar a partir de casos particulares, tirar conseqüências do que é dito e feito, inferir, etc. (COLES, 1993; TANNER & JONES, 1995). Isto é, pensávamos encontrar professores que procurassem encorajar os alunos a pensar e planejar sozinhos e a discutir o seu trabalho.

Nossa primeira idéia era que a análise dos dados coletados nessa escola tivesse para nós apenas o caráter de um estudo piloto. Porém, apesar do breve período de observação em sala de aula (um mês), os dados coletados apresentaram vários elementos que justificam uma análise mais aprofundada, à qual passaremos agora.

Como os alunos de uma escola pública de ensino fundamental vêem a questão do sucesso/fracasso em Matemática

As entrevistas realizadas nessa escola reforçam a associação entre o 'bom aluno' e o aluno interessado, aplicado, que presta atenção, e entre o 'mau aluno' e o aluno que não presta atenção, não estuda, que não se esforça.

Solicitamos aos professores que participaram do estudo que nos indicassem, em cada sala, dois ou três alunos que eles consideravam 'bons em Matemática', dois ou três alunos que eles consideravam 'medianos' e dois ou três alunos considerados 'fracos' para serem entrevistados. Ao todo foram entrevistados 21 alunos.

Essas entrevistas visavam aprofundar nossas observações de sala de aula e conhecer fatos relacionados à vida escolar do aluno que nos permitissem identificar influências marcantes na sua relação com a Matemática.

Procuramos saber de cada um desses alunos: 1) se ele se considerava bom, médio ou mau aluno em Matemática, e por quê; 2) quem eram, na sala, excluindo ele, os melhores e os piores alunos em Matemática; 3) qual era a disciplina que ele mais gostava/menos gostava de estudar, e por quê; 4) dentro da Matemática, o que ele mais gostava/menos gostava de fazer; 5) como ele resolvia os problemas de Matemática, e como ele estudava.

Pelos depoimentos das entrevistas, verificamos que nem sempre os alunos considerados melhores pelo professor coincidiam com a indicação feita pelos alunos da turma (We7[1] foi citado pela maioria dos entrevistados de sua turma como 'bom em Matemática' e não foi indicado pela professora). Porém, no que concernia a cada um deles, em geral confirmou-se a classificação que havia sido anteriormente feita pelos seus professores.

Entre os alunos entrevistados, aqueles considerados 'bons' afirmaram sempre ter tido interesse, fácil entendimento da matéria e gosto pela

[1]Representaremos os alunos por uma abreviatura do seu nome seguida do número 5, 7 ou 8, conforme a série a que ele pertence.

Matemática. Os alunos considerados 'fracos' sempre sentiram dificuldade, afirmaram não gostar de Matemática, nem de estudar. Em geral, eles não associavam a sua dificuldade na disciplina com o professor. Entretanto, Le7, considerado 'fraco', dá o seguinte depoimento: *Eu tenho uma birra muito grande com a Matemática, pois sempre peguei professores chatos.*

Um depoimento interessante é o de Wa7 considerado 'fraco': *Eu não gosto da Matemática porque não tenho incentivo, pelo fato de tirar notas baixas.*

Também percebemos que as aulas estão, de fato, treinando os alunos em procedimentos e modelos. Deste modo, Fl8, considerada aluna mediana, sente necessidade de prestar atenção na aula e treinar bastante - *Eu, por exemplo, se não pegar passo a passo como faz, eu me perco completamente.* Entretanto, alguns depoimentos revelam alunos mais independentes, como o de Mar8, considerada boa aluna: *Anoto os dados do problema e faço de acordo com o que eu acho, de acordo com a lógica.* Da mesma forma, durante todo o estudo Gu8 se revela um aluno que tem iniciativa própria, apresentando soluções originais, quase sempre seguindo o caminho mais curto, fazendo analogia com conceitos aprendidos anteriormente. É dele o seguinte depoimento:*...eu penso no problema, no seu objetivo, e vou atrás dele. Tem problemas que podemos resolver de inúmeras maneiras, então eu procuro a mais fácil, o porquê ela é mais fácil, o que ela pode me mostrar, mas se eu fizer da maneira mais difícil será que ela pode me mostrar outras coisas?*

Finalmente, o aluno Th7 faz o seguinte depoimento sobre um colega: *...faz os exercícios de um jeito diferente e acerta.*

Dos alunos entrevistados, os que foram contemplados nos três últimos depoimentos acima foram os que mais se aproximaram do que é, na nossa concepção, um bom aluno em matemática, um aluno que usa a lógica para resolver exercícios, livre de fórmulas e/ou estratégias de solução. Isto é, eles foram os que mais se aproximaram da idéia de flexibilidade de pensamento (GRAY & TALL, 1993), no sentido da capacidade de estabelecer relações entre diferentes conceitos, e transitar livremente entre o conceito, a representação simbólica do mesmo, e seu uso. Além disso, foram os que mais se aproximaram do aluno que tem 'raciocínio lógico' - segunda caracterização de aluno de sucesso nas entrevistas por nós realizadas inicialmente. Em particular, o aluno Gu8, dentre todos os observados, é o que mais se aproxima do 'aluno de sucesso' descrito por GRAY & TALL, ou seja, apresenta soluções próprias que, para as situações em que apareceram, são mais adequadas, porque mais simples, e ligadas a fatos estudados anteriormente. Esses mesmos autores contrapõem a esses alunos os alunos presos a procedimentos canônicos, regras e fórmulas, o que está mais próximo da caracterização 'aluno aplicado, esforçado, interessado' - a primeira caracterização de aluno de sucesso nas entrevistas por nós realizadas inicialmente. No entanto, eles também consideram que esses últimos alunos obtêm apenas um sucesso a curto prazo; a longo prazo estão fadados ao fracasso.

AS INTERAÇÕES PROFESSOR-ALUNOS: DE COMO ALGUNS ALUNOS BUSCAM UM SENTIDO PARA O USO DE FÓRMULAS E CONCEITOS MATEMÁTICOS, ENQUANTO ALGUMAS ATITUDES DOS PROFESSORES TENDEM A INIBIR ESSA BUSCA

Apesar de nosso objetivo com o acompanhamento das atividades de sala de aula, como mencionamos anteriormente, ser o de identificar procedimentos de ensino que estariam contribuindo para o desenvolvimento de um pensamento flexível em matemática, numa primeira análise dos relatos das aulas observadas, sobressaíram as situações em que as interferências do professor inibem a iniciativa e a criatividade dos alunos na exploração dos conceitos matemáticos. Em alguns momentos, o professor consegue manter um diálogo com os alunos, mas esse diálogo é totalmente dirigido pelo professor que está mais preocupado em seguir uma receita, do que interagir com os alunos no sentido de levá-los a fazer analogias com fatos anteriores, ou incentivá-los na busca de uma solução, aproveitando as dúvidas e os erros dos alunos que possam contribuir para a aprendizagem do conceito. Em outras situações, algumas intervenções interessantes dos alunos, que poderiam levar a uma generalização do conceito, não são devidamente exploradas pelo professor. Observamos ainda alguns casos em que o professor está preso a uma regra ou a um algoritmo que mascaram o conceito, e não percebe outra solução envolvendo mais diretamente esse conceito.

O exemplo de interferência do professor que podemos considerar mais positivo do ponto de vista de contribuir para a flexibilidade de pensamento dos alunos, que encontramos numa aula de Geometria (neste caso, não diretamente relacionado ao uso da simbologia matemática, mas do conceito), diz respeito à soma dos ângulos internos de um paralelogramo. A pergunta do professor - *Mas se* (o paralelogramo) *tem ângulos maiores que 90º como* (a soma) *pode dar 360º?* - gera entre dois alunos uma discussão, na qual buscam uma justificativa para o fato, expressa nos seguintes termos:

- *Não são todos maiores que 90º, não são todos iguais.* - Tal justificam, posteriormente, completa-se com um exemplo sugestivo apresentado pelo professor.

Observa-se que houve uma interferência positiva do professor, o qual faz uma analogia com o estudo da soma dos ângulos internos de um retângulo, que os alunos já haviam estudado.

No exemplo que descreveremos a seguir, encontramos evidências de uma contribuição positiva de um aluno que é tolhida pelo professor:

Exercício: Reduzir ao mesmo denominador $\frac{3}{5}, \frac{2}{10}, \frac{4}{3}$.

O algoritmo exposto no quadro: 5, 10, 3 2

$$\begin{array}{r|l} 5,\ 10,\ 3 & 2 \\ 5,\ 5,\ 3 & 3 \\ 5,\ 5,\ 1 & 5 \\ \hline 1,\ 1,\ 1 & 30 \end{array}$$

A partir do exposto, o professor explica que 30 é o menor múltiplo comum de 5, 10 e 3, escrevendo no quadro:

$$\frac{\quad}{30}, \frac{\quad}{30}, \frac{\quad}{30}$$

A seguir, pergunta como achar o numerador, no caso da 1ª fração $\frac{3}{5}$

Ma5 interfere dizendo que o resultado é 18, pois, o denominador 5 foi multiplicado por 6, o numerador também o será.

O professor diz que é só fazer $(30 \div 5) \times 3$.

Enquanto a interferência do aluno se baseia no conceito de frações eqüivalentes, o professor insiste no procedimento de calcular o M.M.C., dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador. O professor perde a oportunidade de voltar ao conceito de M.M.C. e de frações eqüivalentes. Ele não tinha necessidade de recorrer ao algoritmo, que nesse caso, veio mascarar os conceitos envolvidos.

A seguir, exemplificamos uma situação em que o aluno apresenta uma solução para um exercício nos termos de uma associação com um conteúdo estudado anteriormente e que, portanto, faz mais sentido para ele. O professor, no entanto, insiste no uso da fórmula:

Na equação abaixo Gu8 mostra uma resolução diferente da apresentada pela professora, com base na fórmula de Baskara, sugerindo, ao contrário, o quadrado perfeito.

$$1)\, x+\frac{1}{x-3}=5$$

$$x^2-8x+16=0$$

Após o exposto pelo aluno, a professora dirige-se à turma, comentando que a resolução de Gu8 também é possível. (Anotações de aula)

Embora o professor tenha chamado a atenção da turma para a solução do aluno, passa rapidamente para um outro exercício, perdendo a oportunidade de discutir outras idéias matemáticas envolvidas na questão, como, por exemplo, o que significa resolver uma equação, ou ainda porque sendo o quadrado de um número igual a 0, o número também deve ser.

No próximo excerto de aula, que abaixo apresentamos, o professor não dá oportunidade aos alunos de resolverem suas próprias dúvidas:

Uma menina (Gi7) pede para fazer um exercício, mas o professor designa um outro aluno, Th7 para fazer: $\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}$. Quando Th7 coloca x^3 no denominador, os alunos ficam em dúvida se é x^3 ou x^6, pois havia um erro em $\frac{2x+5+x}{x^3}$.

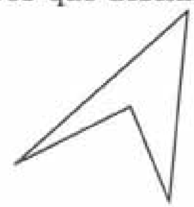
Com a dúvida sobre x^3 ou x^6, o professor demonstra que mesmo usando métodos diferentes, a resposta será a mesma, (...), explicando que, com x^6 teria que fatorar $\frac{2x^3+5x^5+x^4}{x^6}$. A seguir, o professor pergunta qual método de fatoração teria que ser usado neste caso, e, obtém dos alunos a resposta: fator comum. Após fazer a simplificação, o professor mostra que a resposta seria a mesma que com o M.M.C., x^3.

Vê-se pela atividade descrita que o professor explora até certo ponto a dúvida dos alunos, mostrando e comparando as duas soluções. Entretanto, é ele quem resolve o exercício, não permitindo que os alunos concluam o mesmo.

Em outras palavras, mesmo dialogando com os alunos, o professor dirige a discussão ao invés de assumir o papel de intermediador na discussão entre os alunos.

No início do próximo excerto, o professor lança um desafio ao aluno Je5 (que não foi mencionado por ninguém da sala como 'bom aluno' em matemática), incentivando-o a lançar mão de sua criatividade. O assunto é a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

O professor pede a Je5 que desenhe um quadrilátero bem louco. Je5 desenha:



O professor elogia a criatividade e diz que é um quadrilátero, mas não é convexo, e por isso, não será estudado nesse momento. Pede, então, que o aluno desenhe um outro e o nomeie.

Je5 obedece, desenhando um quadrilátero convexo, 'menos louco' e menos criativo, e a aula segue, determinando-se o valor de alguns ângulos internos à custa do valor da sua soma (360º) e de alguns valores dados pelo professor.

Aqui, o professor perde a oportunidade de explorar mais um pouco o estudo dos quadriláteros e dos seus ângulos internos, descarta a possibilidade de fazer uma generalização interessante sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero não convexo, e volta a chamar os alunos para o tratamento das situações e exemplos rotineiros.

Observamos no nosso estudo uma clara predominância em sala de aula de regras e procedimentos quanto ao uso da simbologia e da linguagem matemática, em detrimento do significado e uso dos conceitos. Com isto, as características do pensamento flexível não estariam sendo incentivadas, mas inibidas pelo professor.

Alguns alunos resistem ao uso de fórmulas e algoritmos, enquanto não sentem necessidade deles, apresentando soluções que fazem uso mais direto dos conceitos ou conteúdos anteriormente estudados e os professores insistem com procedimentos canônicos, às vezes desnecessários naquelas situações específicas.

Apresentamos alguns exemplos de alunos que evidenciam as características próprias de um pensamento flexível, apesar de os procedimentos utilizados por seus professores não incentivarem a iniciativa e criatividade desses alunos. Esses são os alunos que consideramos bem sucedidos no aprendizado da matemática. É claro que, na situação observada, eles são em número reduzido, e seria necessário um acompanhamento mais próximo e um estudo de longo prazo da sua história de vida para poder compreender como eles adquiriram essas características. Apenas no caso do aluno Ma5, foi possível perceber, de imediato, pelo menos uma influência marcante na sua relação com a Matemática, além da influência de seu atual professor: a de seu pai, que, segundo nos disse na entrevista, *também adora Matemática.*

UMA NOVA LEITURA: PROFESSORES QUE EXPLICITAM A UTILIZAÇÃO DE FORMAS DE PENSAMENTO FLEXÍVEL EM SUAS AULAS, MESMO QUE DE FORMA NÃO DELIBERADA, PODEM ESTAR CONTRIBUINDO PARA O SUCESSO EM MATEMÁTICA DE ALGUNS DE SEUS ALUNOS

Num primeiro momento, as observações de aula não corresponderam à nossa expectativa. Observamos situações em que os professores pareciam conduzir um diálogo com os alunos que poderia encorajá-los a agir autonomamente, assumindo eles mesmos a condução da sua aprendizagem. No entanto, isto não era mantido e os professores seguiam com uma postura que vinha inibir essa autonomia.

Procurando entender esses casos, resolvemos redirecionar nossa atenção para os professores, buscando verificar se as aulas observadas nos davam elementos suficientes para perceber se eles mesmos estavam fazendo uso do pensamento flexível em suas aulas. Mudando assim nossa atenção, do aluno para o professor, voltamos aos relatos de aula procurando fazer uma nova leitura. Essa nova leitura nos permitiu verificar que, apesar de os professores observados ainda não estarem incentivando as características do pensamento flexível nos seus alunos, de forma totalmente deliberada e consciente, de alguma forma lançam mão dessa flexibilidade de pensamento em diversos momentos da aula. Assim, de modo não intencional, acabam servindo de 'exemplo' para seus alunos, que vão se apropriando de algumas dessas formas de pensamento utilizadas pelo professor.

São vários os exemplos de situações deste tipo que poderíamos apresentar. Selecionamos apenas alguns extratos de aulas que consideramos mais significativos, de cada um dos professores observados.

PROFESSOR P8[2] - 8ª SÉRIE

O professor P8, ao resolver os exercícios, por vezes pára, coloca-se como se fosse o aluno e faz perguntas a si mesmo:

- E agora, qual é a primeira coisa que tenho que fazer?

[2] P8 representa, na realidade, qualquer um dos dois professores que atuaram nesta turma durante o período de observação.

- *P8, para que você fez isso?*

Estas perguntas que o professor usa durante a sua explicação sugerem que os alunos possam estar fazendo estes questionamentos a si próprios, descobrindo que existem vários caminhos a seguir e que se deve questionar sobre qual deles seguir. Abrem-se várias possibilidades de solução neste momento e, embora no seguimento, o professor não explore a situação de forma completa, 'passando' a discussão dessas possibilidades para os alunos, mas tomando ele mesmo a decisão de qual o melhor caminho a seguir, ele pelo menos levou os alunos a pensarem na possibilidade de outras soluções, o que contribui para a flexibilidade de pensamento.

Num outro momento, P8 alerta claramente os alunos da existência de diferentes soluções para um mesmo problema, afirmando que vai resolver de duas maneiras a equação:

$$x+\frac{1}{2}=\frac{2}{x-\frac{1}{2}}$$

Apesar de as 'duas maneiras' utilizadas por P8 serem praticamente idênticas e de ele ter perdido, neste momento, a oportunidade de ter uma interação maior com os alunos, pedindo para eles mesmos sugerirem outras soluções, pelo menos consegue abrir a possibilidade de diferentes caminhos para os seus alunos.

Os alunos, em geral, fazem os exercícios em dupla, ou até em grupos de três, (as carteiras facilitam estes agrupamentos) e o professor circula pelos grupos, acompanhando o que eles estão fazendo e tirando as possíveis dúvidas. Existe uma grande interação professor-alunos nesses momentos.

P8 também socializa todas as dúvidas que os alunos colocam para ele, em particular, em tipos de situações como esta:

A aluna Me8 vai até a mesa do professor perguntar se, no exercício que foi feito no quadro, não precisava colocar $a \neq 0$. O professor levanta e fala para a classe que seria necessário colocar $a \neq 0$, porque o denominador não pode ser nulo.

O exercício é:

$$ax^2+2x=0$$
$$x(ax+2)=0$$
$$x=0 \; ou \; x=-\frac{2}{a}$$

PROFESSOR P7 - 7ª SÉRIE

O professor P7 em geral começa a aula recapitulando o que foi visto nas aulas anteriores, 'para os alunos se localizarem', segundo ele nos explicou. Em outros momentos, ele procura relacionar os assuntos novos a serem introduzidos numa determinada aula com os conhecimentos adquiridos anteriormente. Por exemplo, quando o assunto da aula é 'frações algébricas'. ele relembra primeiro como se faz a simplificação, a adição e a subtração de frações (não algébricas); quando surge dúvida sobre as operações com frações algébricas, ele volta a fazer uma analogia com as operações com frações e assim introduz o cálculo do M.M.C. de expressões algébricas. Mas tarde, em conversa com o observador/pesquisador presente na sala, o professor comenta que o mais importante para ele é, que os alunos já apliquem o conceito de M.M.C. diretamente nas situações em que se torna útil, isto é, na adição e subtração de frações. Deixa claro também que discorda da abordagem do livro didático, o qual trata o conceito de M.M.C. em primeiro lugar, separado das situações em que ele vai ser utilizado, o que demonstra a sua preocupação de relacionar os diferentes conceitos. Para resolver os exercícios, o professor organiza os alunos em duplas, deixando claro para eles 'que nas duplas tem um com facilidade e outro com dificuldade', mas que ele 'quer que um ajude o outro, não que um ande mais rápido que o outro'. Embora essa cooperação mútua não tenha sido por nós observada, o professor procura incentivar a colaboração entre os alunos das duplas e, por vezes, ainda estimula alguns alunos a ajudar outros grupos que possam estar apresentando mais dificuldades na resolução de determinado exercício.

Apesar da evidência das poucas interações entre os elementos das duplas, observamos que quase todos eles, individualmente, procuram trabalhar bastante, e em pelo menos um momento por nós observado o professor conseguiu uma grande interação entre ele e um grande número de alunos da sala, liderada por ele. Tanto alunos considerados bons como alunos considerados médios ou fracos foram chamados a participar. O assunto da aula continuava sendo 'operações com frações algébricas':

$$\frac{a}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{b-a}{a^2-b^2}$$

A resolução deste exemplo foi solicitada ao [aluno] Th7. Antes de ele começar a resolver, o professor pergunta qual é a palavra mágica da 7ª série. A resposta é 'fatoração'. Então Th7 diz que a^2-b^2 dá para fatorar. O professor pergunta qual o resultado que daria, depois de feita a fatoração. Após gaguejar muito, o aluno responde $(a+b)(a-b)$. O resto da turma sabia. Então, o professor pergunta para Ma7 qual seria o M.M.C., obtendo uma resposta correta:

$$\frac{a(a+b)+(a-b)+(b-a)}{(a+b)(a-b)}$$

A seguir, o professor pergunta para Lu7 qual seria o próximo passo, no que ele responde 'multiplicar':

$$\frac{a^2+ab+a-b+b-a}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2+ab}{(a+b)(a-b)}$$

Na etapa seguinte, o professor pergunta para Gu7 qual o método de fatoração que deveria ser utilizado para, posteriormente, ser feita a simplificação, o aluno responde 'fator comum':

$$\frac{a\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}(a-b)}=\frac{a}{(a-b)}$$

O professor pede para falar um número de 1 a 30, e eu falo 21 [Na7]. Então essa aluna teve que resolver este exercício:

$$\frac{2}{2x-x^2}-\frac{x}{4-2x}=$$

Ela não estava muito certa do que fazer, mas diz que tinha que fatorar:

$$\frac{2}{x(2-x)}-\frac{x}{2(2-x)}=$$

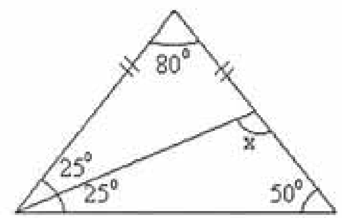
O professor pede para alguém responder qual seria o M.M.C., então Le7 responde $(2-x)$ e Gia7 diz $2x(2-x)$.

$$\frac{2}{x(2-x)}-\frac{x}{2(2-x)}=\frac{4-x^2}{2x(2-x)}$$

O professor pergunta a An7 se acabava aí. An7 teve que responder, e diz que não, pois tinha que fatorar o numerador:

$$\frac{\cancel{(2-x)}(2+x)}{2x\cancel{(2-x)}}=\frac{2+x}{2x}$$

Em alguns momentos, o professor P7 mostra para seus alunos que podem existir caminhos ou soluções diferentes para determinados exercícios. Em alguns casos, as soluções diferentes aparecem como uma sugestão ou como um questionamento por parte dos alunos, como já mostramos anteriormente. Outras vezes é o próprio professor que chama a atenção da turma para a existência de caminhos diferentes que levam ao mesmo resultado, como no caso de um exercício de geometria em que era dado um triângulo isósceles [80º, 50º, 50º], e se pretendia achar o valor (x) do ângulo formado pela bissetriz de um dos ângulos da base com o lado oposto:



O professor diz que este exercício poderia ser feito de duas maneiras diferentes.

Poderia fazer x+25+50=180 ou fazer através da propriedade do ângulo externo, x=25+80.

Em geral, o professor P5 também inicia a aula, recordando o que foi visto na aula anterior.

Ainda com o objetivo de contextualizar e dar mais sentido aos conceitos estudados, ele utiliza materiais da própria sala de aula, para exemplificar o que os alunos estão estudando ('mostra que as mesas da sala são trapézios', 'mostra a caixa de giz e os alunos dizem que é um paralelepípedo', tenta mostrar exemplos do cotidiano dos alunos que envolvem a matéria estudada ('O professor pede que listem dez objetos que sejam paralelepípedos', 'Alguém mostra uma caixa de pasta de dentes e o professor abre-a mostrando que se obtem assim uma figura plana. Aproveitou para mostrar na caixa que existem retas que não se cruzam e não são paralelas'. - Anotações de aula), e aproveita o conhecimento anterior dos alunos (por exemplo, quando o assunto da aula era medidas, e como alguns alunos já moraram em países onde se usam unidades diferentes das nossas, ele pede aos alunos para exemplificarem com essas outras unidades de medida).

P5 procura, pelo menos com relação a alguns conceitos da geometria, trabalhar a própria compreensão do conceito apoiando-se em algumas das suas propriedades, como no exemplo a seguir:

O professor pergunta quantos lados, ângulos e diagonais possui um quadrilátero e toda a turma participa, respondendo prontamente às perguntas. Pergunta a seguir se podemos desenhar um quadrilátero com mais ou com menos de duas diagonais e qual a soma dos ângulos internos de um quadrilátero. Os alunos respondem não à primeira pergunta, e 360º à segunda.' (Anotações de aula)

Ou tentando se aproximar da própria idéia do que seja uma definição matemática:

> P5: *Ma5, o que é um vértice?*
> Ma5: *É um ponto.*
> P5: *Todo ponto é vértice?*
> Ma5: *Não. Vértice é um ponto de encontro de dois lados.* (Anotações de aula)

O professor explora o uso de frases do tipo 'se ..., então ...' que são muito importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a própria compreensão de uma definição:

> O professor dita: *Quadrado - é o quadrilátero que tem quatro lados iguais e quatro ângulos iguais.* -
>
> P5: *Então o quadrado é losango?*
> Todos: *Sim.*
> P5: *Um quadrado é retângulo?*
> Todos: *Sim.*
> P5: *Dois gêmeos são sempre irmãos?*
> Todos: *Sim.*
> P5: *Dois irmãos são sempre gêmeos?*
> Todos: *Não.*
> P5: *Se você nasceu em BH é mineiro?*
> Todos: *Sim.*
> P5: *Se você é mineiro nasceu em BH?*
> Todos: *Não.*

Observe-se que os alunos, apesar de serem apenas da 5ªsérie, dão conta de acompanhar este tipo de raciocínio.

P5 consegue uma grande participação dos alunos e, por vezes, uma boa interação entre alguns deles, tendo o cuidado de não interferir, para que eles cheguem a uma conclusão sozinhos:

> O professor pede exemplos de paralelogramos.
>
> Na5: *Quadrado, retângulo, losango, trapézio.*

O professor interfere dizendo que trapézio não é (aralelogramo), e Mar5 afirma que existem quadriláteros com mais de dois pares de lados paralelos e desenha no quadro:

> Ma5 interfere dizendo que não é um quadrilátero.
>
> Ra5: *Isso é quadrilátero?*
> Mar5: *Tem seis lados, então não é.*

Ma5 afirma que é um hexágono.

O professor consegue esta boa participação por parte dos alunos porque procura que todos estejam sempre resolvendo o mesmo exercício. Ele não traz listas de exercícios já prontas, mas vai elaborando os exercícios em sala, passa um de cada vez, e muda o nível de dificuldade de acordo com o rendimento no problema anterior. Como todos estão resolvendo o mesmo exercício, ao mesmo tempo, isso parece facilitar as discussões de cada exercício.

P5 incentiva os alunos a fazerem generalizações e a justificarem as mesmas, como no caso da generalização para os quadriláteros da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo:

P5: *Quanto mede a soma dos ângulos num quadrilátero?*

Alguns alunos respondem 360º, e Ma5 pergunta se vale para todo quadrilátero. O professor diz que sim e pede que alguém prove tal afirmação. Mrc5 interfere, dizendo que basta dividir o quadrilátero em dois triângulos que têm 180º cada um. O professor confirma e faz o desenho no quadro.

Os exemplos selecionados parecem-nos sugerir uma postura mais deliberada no caso do professor P5, do que no caso de P7 e de P8, no que diz respeito a incentivar em seus alunos formas de pensamento flexível. Os procedimentos por ele utilizados se aproximam com mais freqüência daquela variedade de procedimentos que é característica dos programas de aceleração cognitiva mencionados anteriormente.

Essa observação nos levou a levantar uma hipótese que não tivemos condição de comprovar no presente estudo, devido ao reduzido número de aulas de álgebra e geometria que observamos de cada professor, e que precisa ser verificada como desdobramento do nosso trabalho: o campo da geometria se presta mais do que o da álgebra ao desenvolvimento de formas de pensamento flexível? Alguns autores, como THOM (1983), no fundo vêm sugerindo isso desde longa data, ao ressaltarem que no campo da geometria se torna mais fácil fazer uso da criatividade e do pensamento autônomo dos alunos, sem que eles fiquem presos a regras e procedimentos ensinados pelo professor.

Como no caso do professor P5, observamos um número maior de aulas de geometria do que de álgebra, isso pode ter influenciado no sentido de esses procedimentos que vínhamos pesquisando terem aparecido com mais destaque e com maior freqüência nessas aulas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluindo, os exemplos que apresentamos nos sugerem que o simples fato de o professor ter condições de apresentar algumas características do pensamento flexível em suas aulas, pode estar contribuindo, mesmo de forma não deliberada, para desenvolver em seus alunos certas habilidades de pensamento importantes para o aprendizado de matemática.

Ponto de vista semelhante ao nosso foi apresentado por HIRABAYASHI e SHIGEMATSU em trabalho citado por TANNER e JONES:

> ... *Hirabayashi e Shigematsu (1987) afirmam que os alunos desenvolvem os seus conceitos de metacognição copiando o comportamento do seu professor, e assim, as suas funções executivas ou de controle representam um professor 'interior',* (TANNER & JONES, 1994, p.420)

HIRABAYASHI e SHIGEMATSU discutem os seus resultados apoiando-se em VIGOTSKI. Com efeito, VIGOTSKI (1996) afirma que todas as funções psicológicas superiores se originam das relações reais entre indivíduos, num processo que vai do *interpessoal* para o *intrapessoal*, até ser internalizado definitivamente:

> *Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica) e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos.* (VIGOTSKI, 1996, p.75)

Essa influência não deliberada do professor precisa ser melhor investigada, através de um acompanhamento mais sistemático do trabalho desenvolvido em sala de aula e de um estudo do desenvolvimento do pensamento dos alunos.

Além disso, o ponto de vista expresso por pesquisadores, como COLES, que vêm discutindo princípios, problemas e programas para o 'ensinar a pensar' sugere que deve haver uma atuação mais dirigida do professor:

> *...apesar de fazer sentido argumentar que os bons professores de todas as áreas encorajam os seus alunos a pensar, isso não é o mesmo que ensiná-los a pensar, por exemplo chamando explicitamente a sua atenção para o tipo de pensamento em que estão engajados. Ensinar a pensar significa fornecer não apenas encorajamento e oportunidades, mas um conhecimento de princípios e técnicas, e uma prática orientada e regular de aplicação desses princípios e técnicas.* (COLES, 1993, p.339)

Nossa análise nos leva a acreditar que, se o professor intencionalmente realizar um trabalho no sentido de desenvolver aquelas habilidades, ele poderá atingir um número mais significativo de alunos. Poderá até mesmo atingir aqueles alunos, que são a grande maioria, que mais cedo ou mais tarde acabam sucumbindo ao fracasso na matemática escolar.

Explicando nas entrevistas como resolviam os problemas de matemática, esses alunos disseram que procuravam lembrar das regras, fórmulas ou conceitos aprendidos anteriormente, ou seguir o modelo do livro ou o exemplo dado pelo professor. Assim, eles estariam sendo treinados a responder o que o professor espera deles, e não estariam agindo autonomamente. Esse fato explica porque o 'aluno aplicado', 'que faz como o professor ensina', é bem sucedido nas tarefas escolares, sem necessariamente fazer uso do raciocínio reflexivo. Porém, tal como GRAY & TALL (1993), também acreditamos que o sucesso desses alunos em matemática é apenas momentâneo. A partir de uma determinada altura, ou porque aumente o nível de exigência do pensamento reflexivo, ou porque aumente o nível de exigência quanto ao volume de regras e algoritmos a serem treinados e memorizados, os seus procedimentos de estudo não dão mais conta de responder satisfatoriamente a essas exigências.

Os resultados da nossa pesquisa nos sugerem, portanto, que as habilidades de pensamento necessárias a um sucesso a longo prazo na matemática não estão sendo suficientemente incentivadas pelos professores. Sugerem-nos também, e esse é um fato mais preocupante ainda, que os nossos alunos da licenciatura em matemática, futuros professores, ainda continuam a associar a idéia de sucesso em Matemática principalmente ao esforço e investimento feito pelos alunos. Essa situação parece-nos particularmente séria, sobretudo hoje, quando o campo da Educação Matemática está desviando a atenção das técnicas e dos algoritmos, e apontando para a necessidade de desenvolver determinadas habilidades 'básicas' (CARVALHO & SZTAJN, 1997; D'AMBROSIO, 1997; LELLIS & IMENES, 1994), quase sempre associadas às habilidades de resolução de problemas, que supõem um pensamento autônomo e flexível, no sentido do que vínhamos discutindo anteriormente. Essa perspectiva atual é praticamente consensual e pode agravar ainda mais o problema do fracasso em matemática, se os professores não adotarem rápida e deliberadamente uma postura em sala de aula que incentive a autonomia e a flexibilidade. Se a partir daqui os alunos passarem a ser avaliados em função dessas habilidades, até aqueles que ainda conseguem algum sucesso porque são 'aplicados e esforçados' estarão fadados ao fracasso.

Para que isto não venha a acontecer, é necessário investir em pesquisas que possam fornecer orientação ao professor que quer contribuir para que os seus alunos tenham sucesso em matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADEY, P. Cognitive acceleration: Review and prospects. *International Journal of Science Education*. 10, 2, p. 121-134, 1988.

ARROYO, M. Fracasso-sucesso: o peso da cultura escolar e do ordenamento da Educação Básica. *Em Aberto*, Brasília, ano 11, nº. 53, p. 46-53, 1992.

BALDINO, R. R. Ensino remedial em recuperação paralela. *Zetetiké*, 3, p. 73-95, 1995.

CARRAHER, T.N. *Sociedade e Inteligência*. São Paulo : Cortez, 1989.

CARVALHO, J. P. & SZTAJN, P. As habilidades 'básicas' em Matemática. *Presença Pedagógica*, Vol. 3, nº. 15, p. 15-21, 1997.

COLES, M. J. Teaching thinking: principles, problems and programmes. *Educational Psychology*, 13, p. 333-344, 1993.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da Teoria à Prática*. São Paulo : Papirus, 1997.

DAVID, M. & MACHADO, M.P. Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em Matemática. *Educação e Matemática*, 40, p. 25-29, 1996.

GRAY, E. M. & TALL, D.O. Success & Failure in Mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, p. 6-10, 1993.

LELLIS, M. & IMENES, L. M. O Currículo Tradicional e a Educação Matemática. *A Educação Matemática em Revista*, Ano 1, nº. 2, p. 5-12, 1994.

McGUINNESS, C. Teaching thinking: new signs for theories of cognition. *Educational Psychology*, 13, p. 305-316, 1993.

PATTO, M. H. *A produção do fracasso escolar: Histórias de submissão e rebeldia*. São Paulo: T. A. Queiroz, 1990.

TANNER, H. & JONES, S. Using peer and self assessment to develop modelling skills with students aged 11 to 16: a socio-constructive view. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 27, nº. 4, 1994.

TANNER, H. & JONES, S. Teaching mathematical thinking skills to accelerate cognitive development. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psichology of Mathematics Education*, Recife, Vol. 3, p. 121-128, 1995.

THOM, R. ¿Son las matematicas 'modernas' un error pedagogico y filosofico? In: PIAGET y otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*. 3ª ed. Madrid : Alianza Editorial, p. 115-129, 1983.

VIGOTSKI, L.S. *A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores*. 5ª ed. São Paulo : Martins Fontes, 1996.