

## COMPARAÇÃO DE DUAS ESTRATÉGIAS NO ENSINO DE 'COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA'

JOSÉ MARIO MARTÍNEZ\*

LÚCIO TUNES DOS SANTOS\*\*

**RESUMO:** Aplicamos duas metodologias de ensino diferentes em duas turmas da disciplina *MS148: Complementos de Matemática* no primeiro ano do chamado *Cursão* da UNICAMP. No primeiro grupo, a estratégia foi a geralmente usada nesse tipo de disciplina. Em uma turma alternativa, usamos um método diferente (embora nada novo) que consistia em dar prioridade ao trabalho dos estudantes em sala de aula. Através de cinco avaliações diferentes, e da comparações com as notas dos estudantes na prova de Matemática do Vestibular, procuramos chegar a conclusões quantitativas relativamente à eficácia de ambas as estratégias.

### INTRODUÇÃO

Ao longo de muitos anos como professores universitários de matemática, temos tido a oportunidade de presenciar e participar de inúmeras polêmicas sobre estratégias de ensino-aprendizagem.

---

\*Professor MS-6, Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas SP, Brasil. [martinez@ime.unicamp.br](mailto:martinez@ime.unicamp.br)

\*\*Professor MS-3, Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, CP 6065, 13081-970 Campinas (SP), Brasil. [lucio@ime.unicamp.br](mailto:lucio@ime.unicamp.br)

Dificilmente alguém questionaria, hoje, o princípio de que a atividade do aluno é o fator fundamental que causa a aprendizagem efetiva de qualquer disciplina. Entretanto, é válido se perguntar sobre a maneira pela qual o professor (ou a estrutura curricular) pode promover uma atitude realmente ativa, desbravadora, na maioria dos estudantes. Como resposta a essa pergunta surgem as propostas mais variadas: sistemas de promoções rigorosos (para que o estudante trabalhe ativamente estimulado pelo medo da reprovações); motivações dos estudantes através de projetos interessantes, aplicados, engajados ou divertidos; acompanhamento estreito dos alunos por monitores, tutores, ou pelos próprios professores; diminuições da carga de disciplinas semestral (com a expectativa de que com menos assuntos aumentaria o tempo para refletir); aumento da carga de disciplinas semestral (com a expectativa de que quanto maior a exigência, maior a probabilidade de que algo seja absorvido); diminuições da carga horária por disciplina; aumento da carga horária por disciplina, etc. A adesão a uma ou outra estratégia é, geralmente, ideológica, afetiva ou, simplesmente, questão de gosto. Raramente são feitas tentativas de avaliar 'objetivamente' diferentes estratégias, com parâmetros explícitos e controle razoável das variáveis não sujeitas a estudo.

A maioria das disciplinas de Matemática na UNICAMP tem uma carga horária de 4 ou 6 horas semanais (aulas de duas horas), com um único professor, e uma disponibilidade adicional de monitores (estudantes avançados ou de Pós-Graduações) para consultas durante, aproximadamente, o mesmo número de horas semanais. Nossa pergunta é: o que devem fazer professor e estudantes durante as quatro ou seis horas de aula? Via de regra, as duas horas de cada aula são usadas 'para explicar'. Ou seja, o professor discorre e os alunos prestam atenções, tomam notas e fazem algumas perguntas. Muitos professores usam o tempo todo da aula para explicar, outros dedicam aproximadamente uma hora e meia a essa tarefa, o que depende, também, do curso sendo ministrado. Entende-se que é obrigatório 'desenvolver o programa' nas classes, o que pode requerer mais ou menos exposições. Por razões óbvias, chamaremos a este sistema de 'expositivo'.

Preocupados pela passividade empiricamente observada na maioria dos estudantes nas aulas expositivas, alguns professores usam, às vezes, um sistema diferente de aulas, que aqui chamaremos 'alternativo'. Nesse sistema, a exposições do professor está limitada a uns poucos minutos, e os estudantes são convocados a resolver problemas e exercícios, individualmente ou em grupos, no resto da aula. O professor permanece na sala como auxiliar para essa atividade e, de vez em quando, motivado por dificuldades ou dúvidas gerais, intervém globalmente, sempre por breves intervalos. Existem textos para determinadas

disciplinas, especialmente desenhados para esse tipo de estratégia. Ver, por exemplo, [2].

Os defensores do sistema expositivo sustentam que a matéria deve ser 'dada', os exercícios devem ser resolvidos pelos alunos fora da sala de aula e a aula deve ser aproveitada pelo professor para transmitir (para todos) sua versão ou interpretações dos tópicos do programa, funções esta indispensável e intransferível. Os defensores do sistema alternativo acham que a chamada 'exposições' é, quase sempre, inútil (e redundante, pois 'está no livro') e que o professor deve estimular o aluno a resolver problemas, não apenas passando o recado de que tal ações é necessária (nisto o 'docente expositivo' concordaria) mas convocando a fazê-lo na prática e na própria sala de aula.

Apenas os que, alguma vez, estiveram envolvidos em discussões 'pedagógicas' podem ter idéia do nível de paixão que chega a ser colocado na defesa de uma ou outra estratégia.

Nesta pesquisa, propusemo-nos a fazer uma avaliações objetiva (ou, digamos, o mais objetiva possível) de ambas as estratégias, tomando como objeto uma disciplina real, do primeiro ano do chamado Cursão (curso da UNICAMP que engloba Física, Matemática e Matemática Aplicada). A disciplina escolhida foi 'MS148: Complementos de Matemática', título ambíguo que abrange os seguintes conteúdos programáticos:

1. Conjuntos. Operações clássicas. Inclusão.
2. Relações e Funções.
3. Princípio de Induções Matemática. Demonstrações com Inteiros.
4. Números reais. Cotas, supremo, ínfimo.
5. Seqüências de números reais. Limite de seqüências.
6. Limites infinitos. Subseqüências.
7. Continuidade de funções e sua relações com seqüências.

A organizações deste artigo é a seguinte: Na Seção 2 descrevemos a forma na qual foi executada a pesquisa junto com algumas de nossas impressões subjetivas. Na Seção 3 expomos os resultados quantitativos, isto é, as notas das diferentes avaliações e sua elaborações estatística. Na Seção 4, os dados quantitativos são sintetizados, desta vez, através de diversos gráficos. Nossas conclusões finais são expostas na Seção 5.

## DESCRIÇÕES DA PESQUISA

A totalidade das informações relativas à disciplina foi distribuída para os alunos no primeiro dia de aula, compondo um documento básico, cujas diretivas seriam cumpridas rigorosamente ao longo do Primeiro Semestre de 1997.

As partes essenciais desse documento são transcritas a seguir:

### INTRODUÇÃO

O objetivo deste curso é ensinar algumas das técnicas mais importantes da Matemática: definir rigorosamente, fazer demonstrações e encontrar contra-exemplos. Você aprenderá fazendo. Seu principal mestre é você mesmo, com lápis e papel, resolvendo os exercícios propostos. Encare seriamente todos os problemas sugeridos, consulte suas dúvidas com os professores, os monitores e seus colegas e use a aula para trabalhar ativamente.

### METODOLOGIA

Os estudantes estão divididos em duas turmas: A e E. Assistir à aula, na turma em que o estudante está inscrito, é obrigatório. Os professores usarão metodologias diferentes em cada turma. Entretanto, os dois professores darão aulas nas duas turmas, de acordo com o cronograma descrito no item 10.

### BIBLIOGRAFIA

- D. C. Kurtz, *Foundations of Abstract Mathematics*, McGraw-Hill, 1992.  
S. Lipschutz, *Teoria dos Conjunto*, McGraw-Hill, 1972.  
S. Lipschutz, *Matemática Finita*, McGraw-Hill, 1972.

### PROVINHAS

Cada lista de exercícios será objeto de uma Provinha. No dia correspondente à mesma, os alunos presentes resolverão um exercício da lista (escolhido pelo professor) na primeira parte da aula.

## LISTAS

Um conjunto selecionado de exercícios de cada uma das sete listas deverá ser entregue, nas datas marcadas, coincidentes com a provinha respectiva. As listas entregues serão corrigidas pelos monitores.

### PROVAS

Haverá duas provas, cada uma delas formada por um conjunto de exercícios claramente correlacionados (mas não idênticos) com os exercícios das listas correspondentes.

### AFERIÇÕES ESPECIAL

Haverá uma Aferições Especial, formada por duas provas, nos dois últimos dias de aula. No primeiro dia de aferições serão cobrados conhecimentos relativos às 4 primeiras listas e no segundo dia, às três últimas.

### AVALIAÇÕES

A nota do curso será calculada da seguinte maneira:

$$M = \frac{3(P_1 + P_2) + 2(L + P_0 + A)}{12}$$

onde  $P_1$  é a nota da primeira prova,  $P_2$  é a nota da segunda prova,  $L$  é a nota atribuída às listas de exercícios,  $P_0$  é a média aritmética das notas das provinhas e  $A$  é a nota da Aferições Especial. Se  $M \geq 7$  o aluno será aprovado com média final  $M_F$  igual a  $M$ . Se  $M < 7$ , e tiver superado o limite mínimo de frequência, o aluno poderá prestar exame final, cuja nota de notaremos por  $E$ .

Nesse caso, a média final será a média aritmética de  $M$  e  $E$ , ou seja,

$$M_F = \frac{M + E}{2}$$

### ATENDIMENTO

Os monitores do curso terão um horário semanal de atendimento, que será divulgado na primeira semana de aula.

## CRONOGRAMA

- 27.02: Apresentações.
- 04.03: Aula teórico-prática sobre a Lista I. Turma A: Turma E: Martínez.
- 06.03: Aula teórico-prática sobre a Lista I. Turma A: M, Turma E: Lúcio.
- 11.03: Aula teórico-prática sobre a Lista I. Turma A: Turma E: Martínez.
- 13.03: Entrega da Lista I, Provinha sobre a Lista I teórico-prática sobre a Lista II. Turma A: Martínez, Turma E: Lúcio.
- 18.03: Aula teórico-prática sobre a Lista II. Turma A: Mz, Turma E: Lúcio.
- 20.03: Aula teórico-prática sobre a Lista II. Turma A: Turma E: Martínez.
- 25.03: Aula teórico-prática sobre a Lista II. Turma A: Mz, Turma E: Lúcio.
- 01.04: Entrega da Lista II, Provinha sobre a Lista II teórico-prática sobre a Lista III. Turma A: Lúcio, Turma E: Mart
- 03.04: Aula teórico-prática sobre a Lista III. Turma A: Turma E: Martínez.
- 08.04: Aula teórico-prática sobre a Lista III. Turma A: ez, Turma E: Lúcio.
- 10.04: Aula teórico-prática sobre a Lista III. Turma A: Turma E: Martínez.
- 15.04: Entrega da Lista III, Provinha sobre a Lista III teórico-prática sobre a Lista IV. Turma A: Martínez, Turma E: L
- 17.04: Aula teórico-prática sobre a Lista IV. Turma A: ez, Turma E: Lúcio.
- 22.04: Aula teórico-prática sobre a Lista IV. Turma A: Turma E: Martínez.
- 24.04: Aula teórico-prática sobre a Lista IV. Turma A: ez, Turma E: Lúcio.
- 29.04: Entrega da Lista IV e PROVA sobre as Listas Turma A: Lúcio, Turma E: Martínez.
- 06.05: Aula teórico-prática sobre a Lista V. Turma A: Turma E: Martínez.
- 08.05: Aula teórico-prática sobre a Lista V. Turma A: Mz, Turma E: Lúcio.
- 13.05: Aula teórico-prática sobre a Lista V. Turma A: Turma E: Martínez.
- 15.05: Entrega da Lista V, Provinha sobre a Lista V teórico-prática sobre a Lista VI. Turma A: Martínez, Turma E: L
- 20.05: Aula teórico-prática sobre a Lista VI. Turma A: ez, Turma E: Lúcio.
- 22.05: Aula teórico-prática sobre a Lista VI. Turma A: Turma E: Martínez.
- 27.05: Aula teórico-prática sobre a Lista VI. Turma A: ez, Turma E: Lúcio.
- 03.06: Entrega da Lista VI, Provinha sobre a Lista VI teórico-prática sobre a Lista VII. Turma A: Lúcio, Turma E: Mar
- 05.06: Aula teórico-prática sobre a Lista VII. Turma A, Turma E: Martínez.
- 10.06: Aula teórico-prática sobre a Lista VII. Turma A: ez, Turma E: Lúcio.

- 12.06: Aula teórico-prática sobre a Lista VII. Turma A: Lúcio, Turma E: Martínez.
- 17.06: Entrega da Lista VII e PROVA sobre as Listas V – VII. Turma A: Martínez, Turma E: Lúcio.
- 19.06: Primeiro dia da Aferições Especial. Turma A: Lúcio, Turma E: Martínez.
- 24.06: Segundo dia da Aferições Especial. Turma A: Martínez, Turma E: Lúcio.
- 26.06: Entrega das Notas.
- 08.07: EXAME.

## AS LISTAS

*A última parte do documento continha as 7 listas de exercícios, uma para cada ponto do programa.*

Como pode ser observado, para minimizar os efeitos da personalidade do docente, ambos ministramos aulas, alternadamente, nas duas turmas. A consigna usada em relações ao 'que fazer' nas aulas foi muito simples: na Turma Expositiva, 90 minutos de exposições por aula e 30 minutos livres para consultas e perguntas espontâneas. Na Turma Alternativa, não mais de 15 minutos de exposições por classe, e instruções rígida para os estudantes no sentido de 'ficar trabalhando' o resto do tempo.

O conteúdo da Aferições Especial foi o programa completo da disciplina. Na prática, no primeiro dia da Aferições Especial foi testado o conhecimento das 4 primeiras listas e no segundo dia das 3 últimas listas. Exceto a Prova 2, na qual diferentes turmas foram corrigidas por diferentes professores, o resto das provas ou provinhas foram avaliadas aleatoriamente por um ou outro professor. No caso da Aferições Especial, o corretor não sabia o nome do autor da prova sendo corrigida, nem a turma à qual pertencia.

Algumas de nossas impressões subjetivas durante o curso merecem ser transmitidas. Ambos achamos a metodologia Alternativa altamente cansativa, laboriosa, por vezes irritante. A experiência de explicar várias vezes o mesmo conceito 'trivial' a diferentes pessoas (ou mesmo à mesma pessoa que não o tivesse compreendido antes) foi, por momentos, muito frustrante. Por outro lado, a própria metodologia fazia com que a aula se prolongasse pelas duas horas e, às vezes, até por mais tempo, enquanto na turma Expositiva, poucos alunos permaneciam depois dos 90 minutos de explicações. Entretanto, a turma Alternativa nos permitia acompanhar de maneira bastante estreita o progresso de alguns estudantes (aqueles que mais faziam consultas ou interagiam com o professor). Nesta turma, bastantes alunos (tanto 'bons' como 'fracos') se limitavam a trabalhar sós, sem consultar o docente. Uma minoria muito pequena

não acatava a consigna de trabalho e ficava realizando outras atividades, inclusive não-acadêmicas.

Vale repetir que a mensagem 'explícita' de trabalho foi a mesma para as duas turmas: que o progresso na disciplina só seria conseguido pela dedicação individual e o esforço conseqüente. Ou seja, em nenhum momento a turma Expositiva recebeu a mensagem de que aprenderiam apenas 'presenciando' as exposições.

## RESULTADOS QUANTITATIVOS

### AS NOTAS

As Tabelas 1 e 2 contêm a totalidade das notas obtidas depois das avaliações, em cada uma das turmas. Incluíram-se apenas estudantes que fizeram o Vestibular em 1997, ou seja, apesar de existirem 'repetentes' em ambos os grupos, eles não foram considerados como pertencentes às populações em estudo. [A turma Alternativa tinha mais alunos 'repetentes' que a Expositiva, de maneira que, na realidade, o número total de alunos de ambas as turmas era o mesmo, da ordem de 50]. Os alunos foram ordenados de acordo com a nota da prova de Matemática do Vestibular (decidindo pela Média M em caso de empate). Nestas tabelas, apenas o resultado do exame final, ao qual foram submetidos todos os alunos cuja Média M foi menor que 7, não está incluído. Por outro lado, as notas '\$0.00\$' correspondem sempre a situações onde o estudante não fez a prova correspondente. De fato, tais 'zeros' sempre refletem abandono ou truncamento da disciplina.

TABELA 1: NOTAS DA TURMA EXPOSITIVA

Aluno	Vestibular	Prova 1	Prova 2	Listas	Provinhas	Aferições	Média M
1	7.67	8.00	2.00	7.50	9.80	8.20	6.80
2	7.33	10.00	7.00	8.50	10.00	9.80	9.00
3	7.33	5.00	3.00	7.50	8.30	5.70	5.60
4	7.00	4.70	0.50	5.50	5.80	5.70	4.10
5	6.67	7.80	3.50	8.50	9.00	8.90	7.20
6	6.50	5.90	2.00	8.00	6.50	7.50	5.60
7	6.33	0.00	0.00	2.50	1.50	0.00	0.70
8	6.17	6.70	7.00	8.50	7.50	7.70	7.40
9	6.17	7.40	1.50	7.50	10.00	6.90	6.30
10	5.83	8.50	6.00	6.50	10.00	7.30	7.60
11	5.67	5.90	4.50	8.00	6.80	8.30	6.50
12	5.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	5.33	7.20	3.50	7.00	8.30	7.50	6.50
14	5.33	7.20	1.00	6.00	5.30	6.40	5.00
15	5.17	9.70	4.00	8.50	7.00	7.80	7.30
16	5.17	3.30	1.50	6.50	7.20	3.20	4.40
17	5.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	5.00	6.90	2.00	7.00	7.00	5.00	5.20
19	5.00	3.50	0.50	6.50	3.80	2.20	3.10
20	5.00	4.20	0.00	0.00	1.50	0.00	1.30
21	4.83	9.40	6.50	7.00	9.80	9.20	8.30
22	4.83	4.20	4.50	5.00	7.50	3.50	4.80
23	4.83	5.70	0.50	6.00	5.50	5.00	4.30
24	4.83	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00	0.10
25	4.67	7.50	0.00	2.00	4.00	0.00	2.90
26	4.67	3.90	0.00	4.50	2.30	0.80	2.20
27	4.50	9.70	6.00	9.00	9.50	8.50	8.40
28	4.50	3.70	0.00	1.50	3.00	0.00	1.70
29	4.33	6.50	8.50	6.00	6.50	7.70	7.10
30	4.33	7.70	0.50	7.70	6.30	6.70	5.40
31	4.33	3.70	0.50	6.50	6.30	1.50	3.40
32	4.33	2.50	0.00	4.00	6.30	0.00	2.30
33	4.17	7.80	5.50	7.50	10.00	6.90	7.30
34	4.17	6.90	1.50	5.50	5.00	3.40	4.40
35	4.17	6.50	0.01	7.00	5.30	1.20	3.90
36	4.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
37	4.00	3.70	3.50	6.00	7.00	6.80	5.10
38	4.00	6.70	1.00	8.00	6.00	4.90	5.10
39	3.83	7.00	1.50	5.50	2.00	4.40	4.10
40	3.83	3.90	0.00	4.00	2.80	0.00	2.10
41	3.67	4.50	3.00	4.00	1.50	3.30	3.30
42	3.50	4.00	3.00	6.50	5.30	7.70	5.00
43	3.50	5.20	0.50	1.50	2.30	2.90	2.50
44	3.33	1.90	0.50	6.50	1.00	2.00	2.20
45	3.33	1.90	0.00	4.50	0.50	0.00	1.30
46	3.17	1.00	0.00	0.50	0.50	0.00	0.40
47	3.00	5.40	0.00	1.50	4.30	0.00	2.30
48	3.00	1.10	0.50	6.00	1.80	1.80	2.00
Médias	4.86	5.08	2.02	5.30	5.16	4.09	4.20
Desvios	1.17	2.79	2.34	2.71	3.18	3.31	2.49

TABELA 2: NOTAS DA TURMA ALTERNATIVA

Aluno	Vestibular	Prova 1	Prova 2	Listas	Provinhas	Aferições	Média M
1	9.50	10.00	10.00	8.10	10.00	10.00	9.70
2	7.83	8.00	3.80	5.00	8.80	5.90	6.20
3	7.00	7.50	5.00	8.50	9.50	6.70	7.20
4	6.67	10.00	4.50	8.20	9.30	7.90	7.90
5	6.17	7.00	0.00	6.90	7.00	0.00	4.30
6	6.00	8.50	8.00	8.90	10.00	5.70	8.20
7	6.00	9.70	6.50	6.00	7.30	7.40	7.50
8	5.33	9.50	7.00	7.30	8.30	5.10	7.60
9	5.17	7.50	2.00	4.10	7.30	4.80	5.10
10	5.17	0.00	0.00	4.00	5.30	0.00	1.60
11	5.00	3.20	0.00	3.30	3.50	0.00	1.90
12	4.83	5.70	3.50	6.80	4.30	4.80	4.90
13	4.67	7.00	4.50	5.30	6.50	4.50	5.60
14	4.67	4.70	5.00	5.50	5.00	7.50	5.40
15	4.67	5.70	2.50	6.60	5.80	5.60	5.10
16	4.33	5.70	4.50	6.30	9.00	6.50	6.20
17	4.33	5.00	3.50	5.90	7.50	0.70	4.50
18	4.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	4.00	6.20	1.00	8.50	9.50	6.90	6.00
20	4.00	4.30	4.00	4.80	6.50	4.50	4.70
21	4.00	3.20	4.50	5.00	4.30	5.40	4.40
22	3.83	7.80	2.50	3.60	6.00	3.00	4.70
23	3.67	8.50	1.00	7.30	9.30	4.40	5.90
24	3.67	6.50	2.00	5.10	9.30	4.10	5.30
25	3.67	4.50	0.50	4.90	4.00	3.20	3.30
26	3.67	3.90	0.00	3.40	6.00	0.00	2.50
27	3.67	2.80	0.00	2.20	1.80	0.00	0.60
28	3.50	7.20	6.00	6.90	8.80	4.30	6.60
29	3.50	0.00	0.00	1.60	1.80	0.00	1.40
30	3.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
31	3.33	2.50	0.50	5.60	4.00	2.40	2.80
32	3.17	3.50	1.50	4.80	4.00	3.00	3.20
Médias	4.78	5.49	2.93	5.33	6.24	3.88	4.70
Desvios	1.42	2.95	2.67	2.25	2.84	2.82	2.41

Uma observação rápida das Tabelas 1 e 2 permite tirar algumas conclusões preliminares. As notas são, via de regra, baixas, o que reflete a dificuldade da disciplina. Os desvios-padrão são grandes, bem maiores que o desvio das notas no vestibular, as quais se concentram fortemente entre 3 e 7.5. As notas no vestibular da Turma Expositiva são ligeiramente melhores que as da Turma Alternativa. Com efeito, nas notas no vestibular da Turma Expositiva temos:

Vestibular	Quantidade	Porcentagem
Acima de 7	4	8.3
Entre 6 e 7	5	10.4
Entre 5 e 6	11	22.9
Entre 4 e 5	18	37.5
Entre 3 e 4	10	20.8

Entretanto, na Turma Alternativa, temos:

Vestibular	Quantidade	Porcentagem
Acima de 7	3	9.3
Entre 6 e 7	4	12.5
Entre 5 e 6	4	12.5
Entre 4 e 5	10	31.3
Entre 3 e 4	11	34.4

#### COMPARAÇÕES DAS MÉDIAS

A inspeção das médias e desvios-padrão de cada uma das variáveis mostra, intuitivamente, que as médias de ambas as turmas são bastante próximas, para populações com tais desvios. Em consequência, parece difícil inferir que alguma metodologia é melhor que a outra. Mais ainda, a média da Turma Alternativa foi melhor do que a da Expositiva nas duas provas, listas e provinhas, mas foi pior na Aferições Especial. Portanto, não haveria consistência em hipóteses de superioridade de uma turma sobre a outra. Estas observações qualitativas se vêem corroboradas pela aplicação de um teste estatístico padrão [Ver [1], p. 282], usado para determinar se duas populações podem ser consideradas como tendo a mesma média. Neste teste, os desvios-padrão permitem calcular os 'graus de liberdade' que determinam qual distribuição 't de Student' específica deve ser aplicada. Por outro lado, o parâmetro  $t_0$ , calculado a partir das médias, atua como uma espécie de diferença padronizada das mesmas:  $t_0 = 0$  corresponde a médias iguais e  $|t_0|$  grande corresponde à diferença grande nas médias.] Dessa maneira, obtemos:

Variável	Graus de liberdade	$t_0$	Porcentagem crítica
Vestibular	57	0.267	80
Prova 1	64	-0.623	53
Prova 2	61	-1.569	15
Listas	74	-0.52	> 90
Provinhas	72	-1.592	15
Aferições	73	0.297	83
Média M	68	-0.895	35

Portanto, a um nível de 5%, a hipótese de que as duas médias são iguais, sempre seria aceita e a hipótese de que as médias são diferentes seria sempre rejeitada. 'Nível 5%' significa que queremos que a probabilidade de declarar 'médias diferentes' quando na realidade são iguais seja menor que 0.05. As percentagens 'críticas' têm a seguinte interpretação: elas são o nível para o qual  $t_0$ , está exatamente no limite entre a aceitação e a rejeição. Por exemplo, a hipótese de que as médias da variável 'Vestibular' são iguais seria aceita mesmo que tolerássemos uma probabilidade de 0.81 de rejeitá-la sendo verdadeira. Em outras palavras, 80% das amostras de populações com médias iguais (e similares medidas de dispersão) apresentam um  $t_0$ , maior ou igual a 0.267. (De fato, mesmo que as hipóteses subjacentes sobre o tipo de distribuições das variáveis consideradas não seja razoável, o número entre parênteses representa uma medida adimensional da similaridade das médias.)

As maiores vantagens de uma turma sobre outra estão nas variáveis Prova 2 e Provinhas, em ambos os casos com superioridade da Turma Alternativa. Em ambos os casos, apenas 15% dos pares de amostras com médias reais iguais apresentariam parâmetros  $t_0$ , maiores que os computados. No entanto, no caso da Prova 2, suspeitamos de um erro sistemático, devido ao fato comentado antes de que foi o único item onde diferentes turmas foram corrigidas por diferentes professores (Um deles tenderia a ser sutilmente mais rigoroso que o outro). No caso das Provinhas, parece-nos possível que a diferença observada reflita uma leve vantagem real da estratégia Alternativa. Com efeito, as provinhas consistiam em um exercício da própria lista, na qual os estudantes deviam ter trabalhado durante as duas semanas anteriores. É razoável supor que haveria alguma vantagem da turma que, durante essas duas semanas, tinha recebido mais a diretiva de resolver tais exercícios.

## DISTÂNCIAS E CORRELAÇÕES

Desejamos analisar em que medida as diferentes variáveis consideradas neste estudo (Vestibular, Prova 1, Prova 2, Listas, Provinhas, Aferições e Média M) se parecem entre si. Suponhamos, por exemplo, que  $x$  e  $y$  são os vetores que representam as notas da Prova 1 e das Provinhas da Turma Expositiva. Então,  $x$  tem 48 componentes  $x_1, \dots, x_{48}$  e  $y$  tem outros tantos. Definimos a 'distância média' entre  $x$  e  $y$  como sendo a quantidade  $\sum_{i=1}^{48} [x_i - y_i]/48$ . Obviamente, se  $x$  e  $y$  fossem duas variáveis correspondentes à Turma Alternativa, o número 48 deveria ser substituído por 32.

A correlação  $\rho_{xy}$  entre as variáveis  $x$  e  $y$  se define da maneira usual [ver [1]]: se  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são os vetores com todas as componentes iguais às médias de  $x$  e  $y$  respectivamente, então  $\rho_{xy}$  é o cosseno do ângulo entre  $\bar{x} - \bar{x}$  e  $\bar{y} - \bar{y}$ .

As tabelas que seguem mostram as distâncias médias e os coeficientes de correlação entre as variáveis das duas turmas.

TABELA 3: DISTÂNCIAS MÉDIAS DA TURMA EXPOSITIVA

	Vestibular	Prova 1	Prova 2	Listas	Provinhas	Aferições	Média M
Vestibular	0.00	2.19	3.24	2.19	2.39	2.60	1.83
Prova 1	2.19	0.00	3.16	1.62	1.52	1.70	1.24
Prova 2	3.24	3.16	0.00	3.38	3.28	2.14	2.24
Listas	2.19	1.62	3.38	0.00	1.56	1.70	1.44
Provinhas	2.39	1.52	3.28	1.56	0.00	1.67	1.26
Aferições	2.60	1.70	2.14	1.70	1.67	0.00	1.02
Média M	1.83	1.24	2.24	1.44	1.26	1.02	0.00

TABELA 4: DISTÂNCIAS MÉDIAS DA TURMA ALTERNATIVA

	Vestibular	Prova 1	Prova 2	Listas	Provinhas	Aferições	Média M
Vestibular	0.00	2.01	2.36	1.79	2.30	1.88	1.50
Prova 1	2.01	0.00	2.66	1.46	1.36	2.02	1.17
Prova 2	2.36	2.66	0.00	2.54	3.32	1.50	1.79
Listas	1.79	1.46	2.54	0.00	1.43	1.91	1.08
Provinhas	2.30	1.36	3.32	1.43	0.00	2.62	1.63
Aferições	1.88	2.02	1.50	1.91	2.62	0.00	1.13
Média M	1.50	1.17	1.79	1.08	1.63	1.13	0.00

TABELA 5: CORRELAÇÕES DA TURMA EXPOSITIVA

	Vestibular	Prova 1	Prova 2	Listas	Provinhas	Aferições	Média M
Vestibular	1.00	0.31	0.29	0.33	0.50	0.47	0.43
Prova 1	0.31	1.00	0.61	0.69	0.79	0.77	0.88
Prova 2	0.29	0.61	1.00	0.58	0.69	0.79	0.83
Listas	0.33	0.69	0.58	1.00	0.79	0.81	0.86
Provinhas	0.50	0.79	0.69	0.79	1.00	0.82	0.92
Aferições	0.47	0.77	0.79	0.81	0.82	1.00	0.94
Média M	0.43	0.88	0.83	0.86	0.92	0.94	1.00

TABELA 6: CORRELAÇÕES DA TURMA ALTERNATIVA

	Vestibular	Prova 1	Prova 2	Listas	Provinhas	Aferições	Média M
Vestibular	1.00	0.57	0.59	0.46	0.50	0.53	0.61
Prova 1	0.57	1.00	0.69	0.77	0.84	0.73	0.92
Prova 2	0.59	0.69	1.00	0.63	0.61	0.78	0.85
Listas	0.46	0.77	0.63	1.00	0.85	0.72	0.87
Provinhas	0.50	0.84	0.61	0.85	1.00	0.67	0.89
Aferições	0.53	0.73	0.78	0.72	0.67	1.00	0.88
Média M	0.61	0.92	0.85	0.87	0.89	0.88	1.00

Considerando apenas as variáveis Prova 1, Prova 2, Listas, Provinhas e Aferições (a Média M é uma ponderação das anteriores, portanto, está obviamente correlacionada com elas) observamos:

- i. Em ambas as turmas as variáveis Prova 1 e Provinhas são as que mais se parecem entre si, do ponto de vista das distâncias. Prova 2 é a variável, em média, mais distante.
- ii. Prova 1 e Listas são as variáveis mais parecidas com Vestibular. De novo, Prova 2 é a mais distante.
- iii. A variável Listas não é tão distante das outras, como imaginávamos que iria ser. Com efeito, os monitores tinham-nos advertido que a quantidade de cópias evidentes nas listas era considerável. Entretanto, os números acima parecem indicar que as cópias, embora inegáveis, tendem a acontecer entre estudantes com habilidades similares. Ou seja, não existiriam, em níveis significativos, transferências completas de listas dos melhores alunos para o resto.

iv. Na Turma Expositiva, a variável mais correlacionada com as outras é Aferições. São muito significativos os coeficientes 0.81 e 0.82 como correlações Listas-Aferições e Provinhas-Aferições respectivamente. Nesta turma, a variável mais correlacionada com Vestibular é Provinhas. Na Turma Alternativa não se observa uma variável predominantemente correlacionada com as outras.

## REGRESSÕES

Nesta seção calculamos as regressões lineares das variáveis Prova 1, Prova 2, Listas, Provinhas, Aferições e Média M em relação à variável Vestibular, para cada uma das turmas.

Chamamos, como sempre,  $\rho$  ao coeficiente de correlações correspondente e  $\varepsilon$  à média dos erros na reta de regressão considerada. Na Turma Expositiva obtivemos:

$$\begin{aligned} \text{Prova 1} &= 0.73 \times \text{Vestibular} + 1.53, \rho = 0.31, \varepsilon = 2.19; \\ \text{Prova 2} &= 0.58 \times \text{Vestibular} - 0.81, \rho = 0.29, \varepsilon = 1.83; \\ \text{Listas} &= 0.77 \times \text{Vestibular} + 1.57, \rho = 0.33, \varepsilon = 2.07; \\ \text{Provinhas} &= 1.36 \times \text{Vestibular} - 1.43, \rho = 0.50, \varepsilon = 2.28; \\ \text{Aferições} &= 1.32 \times \text{Vestibular} - 2.35, \rho = 0.47, \varepsilon = 2.50; \\ \text{Média M} &= 0.91 \times \text{Vestibular} - 0.23, \rho = 0.43, \varepsilon = 1.78. \end{aligned}$$

Entretanto, os resultados da Turma Alternativa foram:

$$\begin{aligned} \text{Prova 1} &= 1.18 \times \text{Vestibular} - 0.15, \rho = 0.57, \varepsilon = 1.85; \\ \text{Prova 2} &= 1.11 \times \text{Vestibular} - 2.36, \rho = 0.59, \varepsilon = 1.80; \\ \text{Listas} &= 0.73 \times \text{Vestibular} + 1.85, \rho = 0.46, \varepsilon = 1.59; \\ \text{Provinhas} &= 0.99 \times \text{Vestibular} - 1.50, \rho = 0.50, \varepsilon = 1.94; \\ \text{Aferições} &= 1.06 \times \text{Vestibular} - 1.16, \rho = 0.53, \varepsilon = 1.98; \\ \text{Média M} &= 1.03 \times \text{Vestibular} - 0.23, \rho = 0.61, \varepsilon = 1.52. \end{aligned}$$

Provavelmente, a observação mais curiosa que surge das fórmulas de regressão expostas é que, em ambas as turmas, a relação ótima entre Média M e Vestibular é bastante parecida com a identidade 'Média M = Vestibular'. Veremos isso mais claramente na seção seguinte.

Em todas as figuras a seguir, usamos os símbolos 'o' para as notas da Turma Expositiva e '+' para as da Turma Alternativa. Para as retas das regressões lineares, a linha cheia se refere à Turma Expositiva e a pontilhada à Turma Alternativa.

FIGURA 1: REGRESSÕES LINEARES PARA A PROVA 1

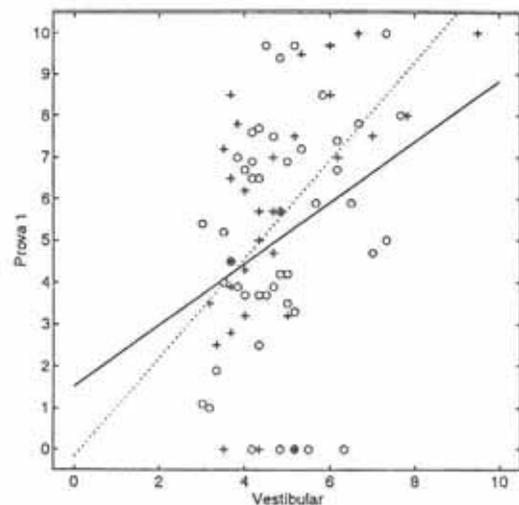


FIGURA 2: REGRESSÕES LINEARES PARA A PROVA 2

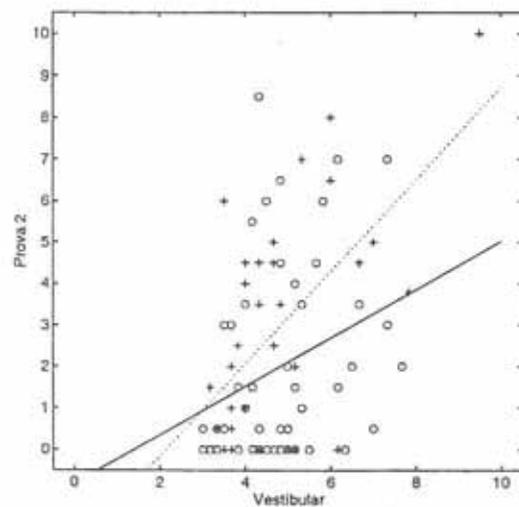


FIGURA 3: REGRESSÕES LINEARES PARA AS LISTAS

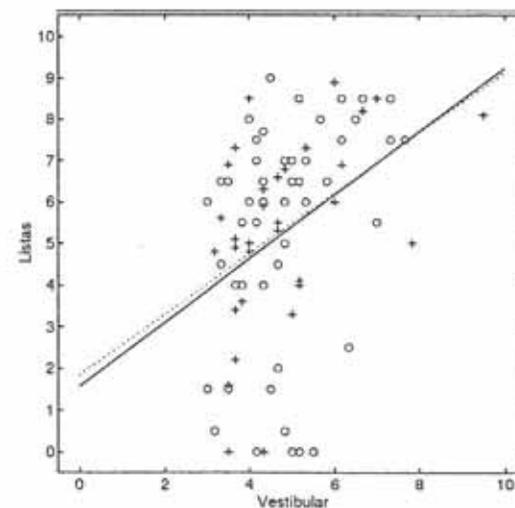


FIGURA 4: REGRESSÕES LINEARES PARA AS PROVINHAS

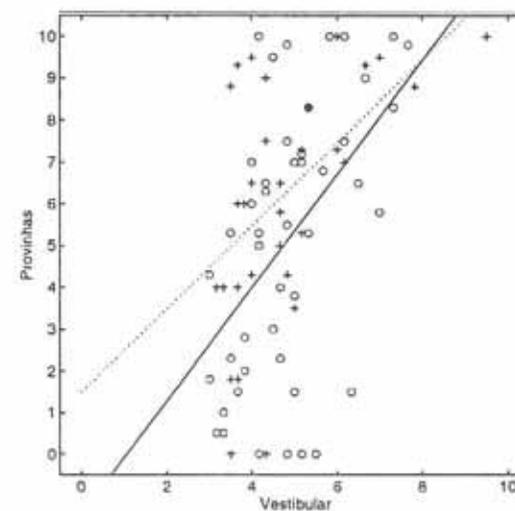


FIGURA 5: REGRESSÕES LINEARES PARA A AFERIÇÕES

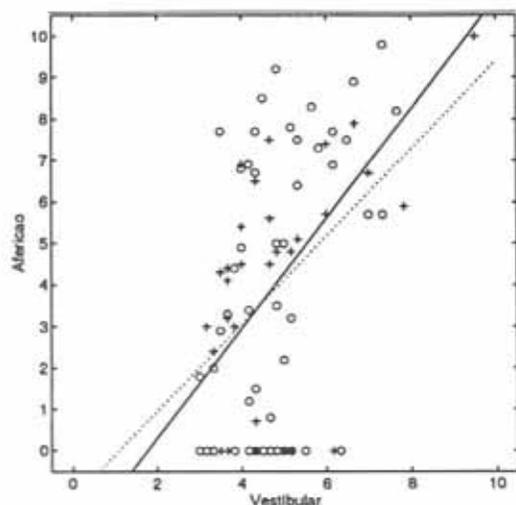
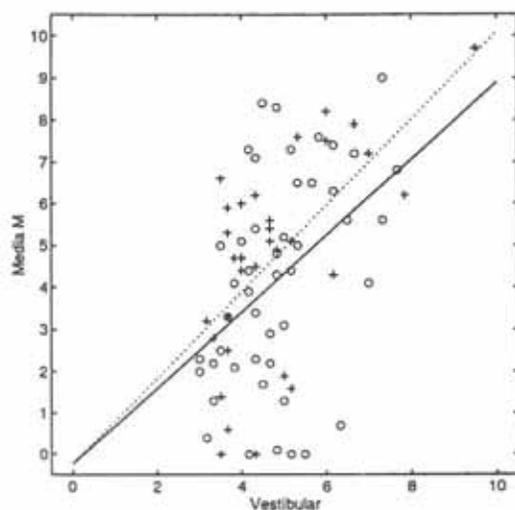


FIGURA 6: REGRESSÕES LINEARES PARA A MÉDIA M



## CONCLUSÕES

Da seções anterior se deduz que a hipótese de que uma das estratégias adotadas é melhor que a outra não pôde ser sustentada. A estratégia Alternativa foi superior à Expositiva em vários itens, mas ela foi ligeiramente inferior na variável mais confiável (Aferições), embora em nível não significativo. Portanto, nossa principal conclusão nesta pesquisa é que, mantidos constantes os demais fatores que podem influenciar na aprendizagem, o fator 'estratégia em sala de aula' (limitado às duas possibilidades aqui analisadas) não exerce um papel decisivo, pelo menos na disciplina que consideramos neste estudo.

Se nossa conclusão for correta, pode-se deduzir que as carências de uma ou outra estratégia são naturalmente substituídas pelos melhores alunos fora da sala de aula. Por exemplo, a carência informativa ou sintetizadora da estratégia Alternativa seria substituída, quando se usa a estratégia Alternativa, por leituras, conversas com o professor ou discussões com colegas. Por outro lado, a carência em termos de trabalho individual também seria compensada pela resolução de exercícios e problemas fora do horário de aula, quando se usa a estratégia Expositiva. No caso dos alunos mais fracos, pareceria que eles exibem pouco aproveitamento de qualquer uma das estratégias que possa ser usada.

Os autores deste trabalho estão longe de sustentar a tese de que todas as estratégias de ensino-aprendizagem são equivalentes. Entretanto, conjecturamos que dificilmente avaliações objetivas detectarão diferenças significativas entre diferentes estratégias consideradas isoladamente. Isto é, grandes modificações devem vir de combinações de estratégias, provavelmente bastante arrojadas. A estrutura curricular, com seu número de disciplinas, sua intensa carga horária e a multiplicidade de contatos com os diferentes docentes é, provavelmente, um determinante suficientemente robusto para que modificações pontuais em uma ou outra disciplina possa produzir mudanças significativas. Por outro lado, e para não cair no voluntarismo pedagógico, acreditamos que variáveis como 'vocações', 'aptidão' e 'atitude diante do ensino e a cultura' são fatores individuais altamente influentes diante dos quais os professores universitários têm uma capacidade de ações limitada.

Apesar do ceticismo relativo que nossa pesquisa pode suscitar em espíritos reformadores, uma conclusão positiva, democrática, talvez libertária pode ser aventada: a imposição messiânica de estratégias não teria grandes justificativas na realidade objetiva. É evidente que todo aquele que tiver uma 'grande idéia' pedagógica pode acreditar nela, testá-la à vontade e se empolgar com suas observações. Entretanto, os autores deste trabalho recomendam sua avaliações

com critérios objetivos, imparciais, independentes, antes de 'vendê-la' como panacéia. [E isto vale tanto para estratégias tradicionais como para as 'novas', se é que estas existem.] Em outras palavras, aproveitar cada educador na linha e estratégia de trabalho na qual ele se considera mais eficaz ainda parece ser a atitude mais razoável, ou pelo menos, a menos irritante.

Nossa motivações para realizar pesquisas similares a esta tendo em conta outras variáveis é grande. Algumas das perguntas que nos fazemos estão relacionadas com os itens a seguir:

- i. Utilidade de 'entrega de listas' e 'provinhas';
- ii. Influência da variável 'número de alunos por turma';
- iii. Influência da variável 'personalidade do docente';
- iv. Aplicabilidade de estratégias, como a chamada Alternativa neste trabalho, às disciplinas com conteúdo convencionalmente mais denso.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Margarida P. Mello e Leandro Martínez pelo auxílio na edições deste texto.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUSSAB, W. & MORETTIN P. A. *Estatística Básica*. São Paulo : Atual Editora, 1997.
- FRIEDLANDE, A. *Elementos de Programação Não-Linear*. Campinas : Editora da UNICAMP, 1993.

## ADAPTAÇÃO E VALIDAÇÃO DE UMA ESCALA DE ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA

MÁRCIA REGINA F. DE BRITO\*

**RESUMO:** O presente artigo refere-se à adaptação, aplicação e validação da escala de atitudes em relação à Matemática de AIKEN (AIKEN, 1961; 1963; AIKEN e DREGER, 1961). Os sujeitos foram 2007 alunos (incluindo estudantes da 3ª série do primeiro grau até a terceira série do segundo grau) de quatro escolas públicas urbanas. Além da escala de atitudes, foi construído um questionário para atender os propósitos do estudo das atitudes (BRITO, 1996). As variáveis consideradas para análise foram os vinte itens da escala e o método estatístico usado foi a análise fatorial ( $p < .050$ ). Os resultados mostraram que os itens da escala estão fortemente relacionados ( $\alpha = .9494$  e  $r = .080$ ). Na medida de adequação da amostra de Kaiser-Meyer-Olkin, foi obtido o valor 0.97200. Na extração de fatores, foi feita a análise dos componentes principais e, como resultado, foram extraídos dois fatores independentes e não correlacionados. Usando ANOVA, foi elaborado o cálculo da média e foi obtido o valor  $M = 52,514$ . Pode-se afirmar que os estudantes desse grupo, com resultados acima desse valor, seriam aqueles com atitudes positivas. Os resultados da análise estatística permitem afirmar que a escala é adequada para aferir as atitudes dos estudantes em relação à Matemática.

\*FACULDADE DE EDUCAÇÃO - UNICAMP.