

RESOLUCION DE PROBLEMAS, EVALUACION Y ENSEÑANZA DEL CALCULO

M. Verónica Díaz; Alvaro Poblete*

Resumo

En este artículo nos referimos a la importancia dada al proceso de resolución de problemas que contempla su clasificación y la evaluación a través de modelos que permiten determinar la habilidad de los estudiantes. Presenta además, diversos hallazgos relacionados con el área del Cálculo Diferencial, como también, las preocupaciones por la enseñanza de la Matemática actual y su relación con los estándares curriculares.

Palavras-Chaves: Resolução de Problemas; Avaliação; Ensino de Cálculo

Abstract

This article refers to the importance given to solving problems which involves its classification and evaluation through models which permit developing the students ability. In addition, various findings in relation to Differential Calculus as well as concerns about mathematics teaching at present and its relations to curricular standards are presented.

Key Words: Problem Solving; Assesment; Calculus Teaching

Es reconocida a nivel internacional la importancia de la resolución de problemas como un aspecto central del proceso de aprendizaje en Matemáticas, y ha sido en estas dos últimas décadas principal preocupación de educadores e investigadores en el ámbito de la Educación Matemática (Abrantes, 1991).

Se asocia a este reconocimiento la necesidad de determinar los niveles de habilidad de los estudiantes en la resolución de problemas y la efectividad de los programas instruccionales en el desarrollo de esta habilidad, lo cual requiere, necesariamente, de algunas formas de medición.

Actualmente, existe una larga tradición de estudios sobre la resolución de problemas que contemplan la clasificación de ellos. Del

* Docente Universidad de Los Lagos - CHILE.

mismo modo, se han catalogado las formas de resolverlos y se han organizado por niveles los conocimientos de los lenguajes implicados en el proceso de su resolución. No obstante, lo que se ha investigado básicamente es lo que los alumnos hacen o acaban aprendiendo, pero no suficientemente los modos de medir y evaluar la resolución de problemas. Sin embargo, a pesar que existen intentos aislados de evaluación de la resolución de problemas matemáticos, éstos han sido determinantes para perfilar una línea abierta de investigación en el ámbito de la Educación Matemática.

La resolución de problemas matemáticos involucra la idea de interacción de variados procesos cognitivos. Una de las definiciones más comúnmente usadas de la resolución de problemas, estipula que la tarea debe ser compleja si se va a referir a ella como un problema (Schoen y Oehmke, en NCTM 1980). Según esta definición, una tarea es un problema para un estudiante si ella requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si el estudiante comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución, y finalmente es motivado para buscar la solución.

Las tareas entonces están en alguna parte, entre los ejercicios propiamente tales, para los cuales la estrategia de solución es inmediatamente conocida y los verdaderos problemas para los cuales no hay condiciones de solución bien definidas que pudieran ser comprendidas por quien los está resolviendo.

Es característica en la resolución de problemas la capacidad para transformar elementos de un problema de una modalidad a otra, identificando al estudiante con el nivel de comprensión del problema, solicitándole que traduzca y transforme un enunciado verbal en expresiones matemáticas no resolviendo aún el problema. Esto conlleva a seguir una adecuada línea de razonamiento donde finalmente surge el lenguaje matemático.

Es así como la resolución de problemas aproxima la Matemática a las situaciones cotidianas vinculadas a diferentes contextos, y pone de manifiesto el tipo de control intelectual que el alumno puede realizar sobre cada situación. Por ello, la resolución de problemas constituye no sólo una buena estrategia metodológica, sino que supone una forma de acercamiento más real al trabajo en esta disciplina.

No obstante, se hace necesario conocer los niveles reales de habilidad de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, lo cual implica encontrar variadas formas de evaluar esta habilidad.

Al respecto, señalan Charles y Silver (1989), que existe escasez de estudios sobre medición de la resolución de problemas matemáticos (Charles y Silver, en Puig 1991).

Varios estudios efectuados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980) señalan que medir la habilidad para resolver problemas matemáticos significa cuantificarla. Si podemos medir esta habilidad entonces tendremos una base para determinar si ha cambiado y por cuanto la habilidad de un estudiante y también para determinar cuál de los diversos programas de instrucción es más efectivo al desarrollarlo.

En 1989 el NCTM publicó el Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, en un intento por modificar los contenidos matemáticos en orden a considerar las necesidades de nuestra sociedad que se adentra en el siglo XXI. Junto con recomendar que la resolución de problemas es la principal razón para estudiar matemática, la consideran como un proceso de aplicación de conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y desconocidas. Manifiestan la necesidad de evaluación, de la capacidad que tenga el estudiante de utilizar la matemática para la resolución de problemas. Además, indican que si la resolución de problemas ha de ser el centro de atención de las Matemáticas en la enseñanza, también ha de ser el centro de atención de la evaluación. Así, esta evaluación debe ofrecer información sobre el uso que hacen los estudiantes de estrategias y técnicas de resolución de problemas, y de la capacidad que tengan para comprobar e interpretar resultados.

Evaluar la realización de los estudiantes cumple una multitud de objetivos. En cuanto al estudiante, la evaluación apoya el aprendizaje y mide su conocimiento y potencial matemático. Respecto al profesor, le ofrece información sobre cómo modificar y marcar el ritmo de la docencia y le describe la efectividad del programa instruccional.

Un medio hacia la evaluación de la resolución de problemas matemáticos lo constituye el test de Iowa Problem Solving Project (IPSP, 1980), cuyo objetivo es proporcionar información acerca de sub-habilidades para resolver problemas, las cuales son altamente correlacionadas con los datos obtenidos a través de entrevistas individuales que forman parte de este modelo.

La importancia de este modelo radica, principalmente, en el intento por relacionar las acciones de los alumnos durante el proceso de resolución y las respuestas de éstos durante las entrevistas individuales. Sin duda, esta modalidad de evaluación constituye un intento para mejorar la

competencia que permita identificar y calificar las habilidades que involucra la resolución de problemas matemáticos.

Otro enfoque alternativo, para evaluar la resolución de problemas, se encuentra en estudios que asocian modelos particulares para inferir la habilidad del desempeño en la resolución de problemas matemáticos no rutinarios (NCTM, 1980). Problemas no rutinarios en el sentido que un estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido (rutina) para encontrarla.

Este enfoque introduce un elemento nuevo en la evaluación de la resolución de problemas, al pretender inferir las habilidades matemáticas que los estudiantes manifiestan, frente a situaciones problemas que no están explícitamente asociadas con soluciones y procedimientos preestablecidos.

Así, en diversos países, tanto la resolución de problemas matemáticos como su evaluación, han tenido una escasa atención en los distintos niveles de enseñanza. Los planes y programas de estudios vigentes en la enseñanza de la matemática escolar hacen mención de la necesidad de desarrollar esta capacidad en los estudiantes proponiendo ciertos objetivos que no son logrados en relación con lo esperado. A nivel superior, la situación es aún más crítica existiendo escasos estudios en relación al tema. Esta carencia se manifiesta en diversas áreas de la Matemática y, en particular, en Cálculo Diferencial e Integral. Los intentos conocidos de evaluación de la resolución de problemas cubren áreas como la Aritmética, el Álgebra y la Geometría en niveles primarios y, extraordinariamente, en niveles secundarios; en Educación Superior y específicamente en Cálculo

Diferencial, no se registran antecedentes puntuales al respecto. Por otra parte, los alumnos que inician sus estudios en diferentes carreras universitarias, cuyos currícula contienen un apreciable componente matemático, comienzan su enseñanza, precisamente, con Cálculo Diferencial, a diferencia de los estudiantes del último nivel de la enseñanza secundaria que tienen como electivo generalmente en esta etapa de su instrucción, el Cálculo. En ambos niveles esta asignatura constituye una fuente de dificultad que se traduce en índices de fracaso y posterior deserción del sistema.

Los textos de Cálculo

Con relación a los textos utilizados para la enseñanza del Cálculo, a modo de ejemplo, de una revisión bibliográfica, que contempló alrededor de 1296 problemas relacionados con las aplicaciones de la derivada, se pudo concluir que:

En los textos de matemática aparecen problemas que aspiran a ejercer, por una parte, algoritmos aprendidos recientemente, a mostrar la utilidad de estos algoritmos por algunas aplicaciones posibles en la vida diaria y a verificar si el estudiante ha comprendido bien lo esencial de diversas operaciones. El contexto que envuelve estos problemas es a menudo estereotipado y la actividad de resolución de ejercicios y problemas es puntual ya que el texto del problema proporciona las cantidades e indicios relativos a la operación que hay que elegir.

Existen textos de Cálculo Diferencial e Integral que pueden considerarse como mecanicistas, en los cuales importa enfrentar los problemas allí planteados como una sucesión de pasos técnicos que llevan a su resolución, postergando de esta forma los aspectos teóricos de búsqueda e indagación en su desarrollo. Otros en cambio, priorizan el marco teórico y el lenguaje en que están escritos, y aunque se manifiestan como textos más analíticos a partir de su contexto teórico, no tienen vinculación con las aplicaciones del Cálculo.

Existen menos textos dedicados exclusivamente a problemas resueltos y propuestos. Estos profundizan en algunas materias y exigen una comprensión acabada de los conceptos de Cálculo y abordan problemas concretos de Física.

También se han diseñado materiales de apoyo para estudiantes de Ciencias, como también para aquellos que siguen especialidades Técnicas e Ingenieriles. Estos son textos con un marco teórico desarrollado y aplicado a problemas de Cálculo y de las Ciencias, con apoyo geométrico y complementado con libros de ejercicios. Sin embargo, el aprendizaje realizado con el apoyo de libros de texto, resulta insuficiente para garantizar el mejoramiento en la enseñanza del Cálculo Diferencial, por cuanto no ofrecen éstos una variedad de problemas matemáticos, sino que, más bien, se concentran en el desarrollo de problemas-tipo.

Los textos, además, incluyen extensas listas de ejercicios que resultan ser la práctica de una rutina en la cual los estudiantes ya han sido iniciados y pocos problemas para que ellos practiquen el tema en cuestión. A la luz de estos hallazgos, pareciera ser que el sistema de evaluación se

basa en la resolución de ejercicios sobre derivadas y no en la resolución de problemas sean estos rutinarios o no rutinarios.

Los problemas de contexto puramente matemáticos, es decir, aquellos que hacen referencia exclusivamente a objetos matemáticos como números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc..., son en su mayoría originales de los autores a diferencia de los problemas de contexto realista que se caracterizan por ser iguales o adaptaciones unos de otros.

Se encuentran mayoritariamente en los textos de Cálculo Diferencial los problemas de contexto puramente matemáticos seguidos por los realistas, es decir, por aquellos problemas que son susceptibles de producirse realmente y que corresponden a una simulación de la realidad o de una parte de ella, con una diferencia entre ambos del orden del 20% (Díaz, 1994).

Los problemas de contexto fantasista, que son fruto de la imaginación y que están sin fundamento en la realidad y los no rutinarios, en el sentido en que el estudiante no posee una respuesta conocida ni un procedimiento o rutina previamente establecido para su resolución, se encuentran en la literatura en un porcentaje inferior al 1%.

Los problemas de contexto real, es decir, aquellos que se producen efectivamente en la realidad y comprometen el accionar del estudiante en la misma, no se encuentran en las aplicaciones de la derivada en los textos de Cálculo Diferencial e Integral (Díaz, 1994).

La enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas

Existe una opinión generalizada acerca de la importancia de la resolución de problemas matemáticos por parte de educadores e investigadores, pero diferentes enfoques respecto a su definición.

La evolución del reconocimiento de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática es destacada en el año

1949 por Polya, quien postulaba: "el primer deber de un profesor de Matemáticas es usar esta gran oportunidad para hacer todo lo posible para desarrollar en sus estudiantes la habilidad para resolver problemas..." (Blanco, 1991).

Sin embargo, con posterioridad surge como una nueva perspectiva en la enseñanza de la Matemática, un movimiento cuyo nacimiento se considera conjuntamente con el inicio de la década de los 80, que centra su propuesta didáctica en la resolución de problemas y que se proyecta en la formación del educando de los próximos años.

Las preocupaciones por la enseñanza de la Matemática, más o menos rigurosas, comenzaron en 1908, luego del IV Congreso Internacional de Matemática, donde se formó la primera comisión de enseñanza de la Matemática dirigida por Félix Klein. El insistía en las relaciones que debían haber entre la matemática abstracta y la aplicada, intentando un equilibrio entre la unificación y el ordenamiento de conceptos y la parte intuitiva tendiente a las aplicaciones. Así, la adaptación de diversos programas de enseñanza y las tendencias de la matemática a nivel superior y su descenso al nivel secundario, surgieron como resultado de este congreso.

Un afán de reforma en la enseñanza de la matemática se manifiesta a fines de la segunda guerra mundial. La Matemática y las aplicaciones a nivel superior habían evolucionado bastante, no obstante, a nivel primario y secundario la enseñanza se había detenido con una serie de discusiones sobre el mayor o menor grado de abstracción que debería dársele a la disciplina. Esto, asociado a los avances tecnológicos y científicos de la época, implicaron un fuerte apoyo a nuevas teorías matemáticas.

En los años 60 se llega a una "Matemática Moderna", con una fuerte preocupación por la renovación pedagógica relacionada con las formas de enseñar y de aprender y la modernización de los programas. Esto produjo, en la década de los 70, una nueva tendencia que trató de definir lo fundamental de las matemáticas en base a recuperar los aspectos más tradicionales, como por ejemplo, el cálculo aritmético. Esta corriente se llamó "Volver a lo básico" (Back to Basics Movement).

Al inicio de la década de los 80, surge una renovada tendencia, que intenta recoger nuevos enfoques que se consideran decisivos para la formación Matemática de los estudiantes, y con un sentido de utilidad que parece ser propio de esta materia. Este movimiento centra su atención en la "Resolución de Problemas" y sienta las bases de una continua

preocupación que se manifiesta en nuestra década en un movimiento llamado "Matemáticas para el siglo XXI".

En un intento de responder a la necesidad de reforma que la enseñanza de la Matemática exige para adaptarlas a las demandas de la sociedad del próximo siglo, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de Estados Unidos, en 1989, publicó el "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics". Sin duda, diversos currícula se han asimilado a sus directrices y lineamientos, al punto de traducirse esta asimilación en la formulación de estándares de rendimiento que constituyen la base de la reforma en la enseñanza de la Matemática para el siglo XXI, lo que pasamos a explicitar a continuación.

El "standards curriculum" del N.C.T.M.

Los estándares conforman un documento diseñado para establecer un marco amplio donde encuadrar la reforma de las matemáticas en la escuela durante la próxima década. En él se da una visión general de lo que debe incluir el currículo de matemáticas en cuanto a prioridad e importancia de contenidos.

Existe el consenso, inherente a este documento, que la resolución de problemas ha de ser el punto central del currículum de matemática. En sí misma, constituye un objetivo primario de toda educación matemática y una parte integral de toda la actividad matemática.

Proponen la resolución de problemas no como un tema diferenciado, sino como un proceso que debe impregnar el programa completo y proporcionar el contexto donde puedan aprenderse conceptos y destrezas, ya que cuando las matemáticas se originan a partir de situaciones problemáticas, que tienen sentido para los estudiantes y están relacionadas con el entorno, pasan a ser relevantes y lo ayudan a ligar su conocimiento con distintos tipos de situaciones.

"A medida que el estudiante avanza de nivel, debe encontrarse con tipos de problemas más diversos y complejos que surjan tanto del mundo real como de contextos matemáticos..." (NCTM, 1991); es decir, la resolución de problemas constituye un proceso en el que los estudiantes pueden experimentar la potencia y la utilidad de la Matemática en el mundo que les rodea. Al mismo tiempo constituye un método de indagación y aplicación integrado a través de los estándares con objeto de ofrecer un contexto sólido para el aprendizaje y la aplicación de la

disciplina. Así, la resolución de problemas matemáticos no sólo debe servir para responder interrogantes que surgen de la vida diaria, o por su aplicación en las ciencias físicas y sociales o en campos profesionales como los negocios, la ingeniería, etc., sino también debe servir para desarrollar y conectar en mayor grado la Matemática en sí misma.

Del mismo modo, proponen que deben "usarse problemas y aplicaciones que contribuyan a que los estudiantes adquieran tanto estructuras conceptuales como soltura con algoritmos..." (NCTM, 1980), lo cual tiene como finalidad aplicar y repasar procesos que ya fueron previamente aprendidos, considerando que el proceso de aprendizaje exigirá de ellos un análisis de la situación a la luz del conocimiento que ya posee, el desarrollo de técnicas matemáticas adecuadas y su correspondiente aplicación.

Las expresiones anteriores, surgidas principalmente en Norteamérica, se relacionan con la propuesta que en las próximas décadas se debe "poner el acento de la educación matemática básica en la resolución de problemas..." (Gaulin 1986, en Blanco 1991); es decir, como una manera de optimizar el aprendizaje desde los primeros grados de escolaridad, se prioriza la resolución de problemas.

Al respecto, diversos autores, al referirse a la resolución de problemas como centro del desarrollo curricular, proponen que "es necesario considerar que se pueden desarrollar las actividades de resolución de problemas desde enfoques diversos y con objetivos diferentes..." (Arrieta, en Blanco 1991), lo cual implica reconocer que la diversidad de enfoques y objetivos no constituyen, en modo alguno, una barrera que obstaculice el aprendizaje, sino más bien constituyen un incentivo para desarrollar en los estudiantes un pensamiento creativo y crítico.

Conclusion

En síntesis, podemos indicar que el reconocimiento dado a la actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matemáticas ha originado algunas propuestas tales como la clasificación de los problemas, la aclaración del significado de la actividad sobre su resolución y las estrategias operativas para los estudiantes. No obstante, existen escasos estudios que proponen cómo evaluar la resolución de problemas en el área del Cálculo Diferencial en niveles secundario y universitario. Del mismo

modo, existen solo algunos textos que permiten plantear la enseñanza del Cálculo en una variedad de contextos relevantes, científica y socialmente significativos y que potencien la implicación personal de los alumnos.

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P (1991). Resolução de problemas e Educação Matemática - algunos aspectos de experiencia portuguesa. *Actas Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Sevilla, España, 251-254.
- Blanco, L. (1991). *Conocimiento y acción de la enseñanza de las matemáticas de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores*. España: Manuales Unex.
- Diaz, V. (1994). *Una evaluación de la resolución de tipos de problemas en Cálculo Diferencial*. Chile: Tesis de Magister, UPLACED.
- Ferrini-Mundy, J; Gaudard, M. (1992). Secondary School Calculus. Preparation or Pitfall in the Study of College Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 1, 56-71.
- Gaulin, C. (1981). La resolution de problemes: le mot d' ordre pour les annees 1980-90. Quoi en penser? *Actas du Colleeque sur l'enseignement des mathematiques*. U.Q.A.C., 29-48.
- Ministere de L' Education, (1988). *Mathematique, Fascicule K, Resolution de Problemes*, Quebec, 1-94.
- N. C. T. M. (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la educación matemática*. S.A.E.M. España: Thales.
- N. C. T. M. (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. Virginia: Preston.
- Poblete, A. (1994). Variedades Didácticas Matemáticas: su influencia en logros del aprendizaje. Chile: *Proyecto FONDECYT N° 1940780*.
- Poblete, A. (1994). Concepciones y proceso de desarrollo de la investigación en Educación Matemática. *Bolema*, Brasil, 9, 10, 11-20.
- Polya, G. (1957 / 1945). *How to Solve it*. N.J. Princeton University Press.
- Puig, L. (1991). Dos o tres cosas que sé de investigación en resolución de problemas. *Actas Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Sevilla, 255-260.
- Smith, S.; SMITH, M.; ROMBERG, T. (1993). What the N.C.T.M. standards look like in one classroom. *Educational Leadership*. May, 4-7.
- Williams, S. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22, 3, 219-236.