

Dando movimento ao pensamento algébrico¹

*Anna Regina Lanner de Moura**

*Maria do Carmo de Sousa***

Resumo: Este artigo discute os procedimentos e as elaborações de alunos de um curso de Pedagogia vivenciadas, durante o desenvolvimento de duas atividades de ensino, fundamentadas na perspectiva lógico-histórica, durante a pesquisa de Doutorado² que desenvolvemos de 2000 a 2004, na Faculdade de Educação - UNICAMP. A pesquisa tinha por objetivo analisar as implicações, na formação algébrica do aluno, de atividades intencionalmente planejadas, considerando a história do desenvolvimento da linguagem algébrica, com referência em Smith (1958), e considerando o movimento como base do pensamento algébrico, com referência em Caraça (1998). Nessas duas atividades, foram mobilizados os conceitos de variável, de dependência de variáveis e de campo de variação. É possível perceber que os alunos, na sua maioria, avaliam as implicações que a formação algébrica escolar teve na sua forma de pensar a álgebra, a matemática e a própria vida.

Palavras-chave: Lógico-histórico; atividades de ensino; pensamento algébrico; campo de variação e variável.

Giving movement to the algebraic thought on a logical-historical perspective

Abstract: This article discusses the procedures and elaborations of students of a pedagogy course when involved in two activities of teaching which were developed in the logical-historical perspective when experienced a subject of the course during our scanning Ph.D in the 2000 at 2004, in the Faculdade de Educação - UNICAMP. The research was designed to analyze the implications of the training of student on algebraic activities which were intentionally planned

¹As atividades de ensino foram adaptadas dos livros: *Elementar é o essencial* (de Luciano Castro Lima; Mário Takazaki e Roberto P. Moisés, São Paulo: CTEAC, 1998) e *A variável – ser e não ser* (de Luciano Castro Lima e Roberto P. Moisés, São Paulo: CTEAC, 2000) pela Prof^a. Dr^a. Anna Regina Lanner de Moura e pela Prof^a. Dr^a Maria do Carmo de Sousa.

* Doutora da Faculdade de Educação – UNICAMP – E-mail: lanner@unicamp.br

** Doutora do Departamento de Metodologia de Ensino – UFSCar –mdcsousa@ufscar.br

² A pesquisa contou com financiamento da Fapesp e foi orientada pela Profa.

considering the history of the development of algebraic language with reference to Smith (1958), and also the movement as the basis for algebraic thinking with reference to Caraça (1998). In these two activities the concepts of variable, the dependence of variables and field change have been mobilized. It is possible to realize that most of the students evaluate the implications of the algebraic training school they had and still induce impact on their way of thinking about algebra, mathematics and theirs life.

Word-key: logical-historical; educational activities; algebraic thought; range of variation and variable.

Introdução

O ensino da álgebra tem sido um problema para o professor, na mesma proporção com que a aprendizagem da álgebra se manifesta como um problema para o aluno. De modo geral, a dificuldade que o aluno demonstra ter ao aprender álgebra é considerada natural, por entender-se que o nível de abstração da álgebra é de difícil acesso à aprendizagem do iniciante em matemática.

De fato, as memórias de alunos de um curso de Pedagogia sobre a matemática escolar revelam que tudo corria bem na escola com a matemática até encontrar um obstáculo na álgebra, como dizem eles:

“[...] até chegar a álgebra, o x e o y das equações onde tudo fica meio sem sentido”, “[...] e foi a partir da 6ª série, com a álgebra que passei a não gostar mais da matemática”, “Sempre achei um absurdo fazer cálculos com aquele monte de letras”³.

Dos memoriais desses alunos, pode-se depreender a razão pela qual um número razoável de alunos que buscam o curso de Pedagogia o fazem para não enfrentar, num curso superior, as mesmas dificuldades que tiveram com a matemática— cujo ponto de maior conflito é para eles a álgebra — ao longo de sua escolaridade no ensino básico.

Pesquisas sobre o ensino de álgebra, como a de Pinto (1997) e a de Scarlassari (2007), discutem a dificuldade do aluno de 6ª série para

³ Extraído dos memoriais (2007) de alunos de um curso de Pedagogia da cidade de Campinas do Estado de São Paulo.

interpretar a variável⁴ em expressões algébricas. Outros autores como Kieran (1992), Oliveira (2002) e Paulovich (1998), estudam abordagens diferenciadas do ensino de álgebra, com o objetivo de aprofundar o caráter formalista desse ensino.

Todas essas pesquisas que estudam as dificuldades do aluno do Ensino Fundamental em álgebra — tanto as que focalizam o ensino e/ou a aprendizagem como as que enfocam seu estudo nas práticas escolares que mobilizam práticas algébricas, como é o caso da presente pesquisa — têm chamado a atenção para a ênfase dada à abordagem formalista, nas práticas de sala de aula, como um dos possíveis fatores que dificultam ao aluno a elaboração dos significados algébricos.

A abordagem formalista, de modo geral, traduz-se pela manipulação simbólica dos conceitos algébricos: exercitar regras de mudança de membro e de troca de sinais na resolução de equações, resolver listas de exercícios de operações com polinômios, calcular diferentes funções, etc.

Que outras abordagens do ensino de álgebra poderiam ser mobilizadoras de práticas que envolvam o estudo das variações em movimentos quantitativos e das suas possíveis linguagens matemáticas?

A pesquisa a que se refere este artigo estuda as elaborações de alunos que já passaram pelo ensino básico, ao desenvolverem atividades que problematizam alguns nexos⁵ conceituais da álgebra, como o conceito de variável, de campo de variação e as linguagens: a) retórica ou das palavras (variável palavra); b) sincopada, que mistura palavras e símbolos diversos (variável "numeral"); e c) simbólica (variável letra).

Na interpretação que aqui é dada ao ensino da álgebra, são conjugados dois conceitos: o lógico-histórico e a fluência. O primeiro deles tem sustentação na teoria de conhecimento discutida por Kopnin (1978). Para este autor, por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. "*O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza esta tarefa*" (p.183). O lógico-histórico é a interpretação lógica que o movimento do

⁴ A variável pode assumir pelo menos três papéis: 1) incógnita, na equação; 2) parâmetro, na inequação e 3) variável, na função (SOUZA; DINIZ, 1996).

⁵ São aqui entendidos por nexos conceituais os conceitos mais simples que compõem um conceito mais complexo.

pensamento faz ao refletir sobre o acontecido. O que chamamos de acontecimento histórico não se manifestou no tempo e no espaço obedecendo estritamente à lógica de desenvolvimento que atribuímos a esses acontecimentos, ao interpretá-los à distância.

No caso da álgebra, a interpretação lógico-histórica que fazemos do desenvolvimento de sua linguagem encontra consonância nas diferentes formas de linguagem indicadas por Smith (1958), pelas quais foram expressas as variações quantitativas desde os gregos até a linguagem como a conhecemos hoje, a qual prioriza a variável letra. Incluímos também nesse desenvolvimento as expressões egípcias e gregas usadas para indicar a variável.

O segundo conceito, o da fluência, tem referência em Caraça (1998) que, com base em Heráclito, considera-a uma das características da realidade em que vivemos. Para este filósofo, tudo está em constante movimento

[...] de modo que, do extremo superior ao inferior da escala, do movimento prodigioso de expansão do Universo, ao movimento, não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo, tudo flui, tudo devém, tudo é, a todo o momento, uma coisa nova. (p. 104).

Para este autor, a matemática, na tentativa de “isolar” os movimentos para poder entendê-los, cria a variável, elemento fundamental da álgebra.

Esses autores, sobretudo, inspiram nossos trabalhos (LANNER de MOURA; SOUSA, 2001, 2002; SOUSA, 2004) que tratam do ensino de álgebra, mediante os quais estudamos uma perspectiva didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico com base no enfoque lógico-histórico de Kopnin (1978) e na fluência discutida por Caraça (1998).

Aliamos esses dois conceitos ao estudo do ensino da álgebra, pois supomos que a interpretação lógica da dinâmica histórica do conceito de álgebra possa sustentar atividades de ensino que permitirão aos alunos construir uma compreensão mais profunda deste conceito, além daquela que lhes é possibilitada pela mera manipulação das letras do alfabeto, especificamente, da letra “x”.

Nesta perspectiva, é de fundamental importância que estudantes e professores possam compreender os elementos historicamente construídos que constituem os “*nexos conceituais*” (DAVYDOV, 1982) do conceito científico e que, segundo este autor, não estão presentes na forma simbólica atual do conceito, uma vez que tais nexos são apresentados aos estudantes de forma lógica, limpos de qualquer história, a partir dos elementos perceptíveis da variável letra. É como se a letra tivesse vida própria, que fala por si mesma.

Para esta pesquisa escolhemos considerar a abordagem de Caraça (1998) à álgebra e designar como nexos conceituais os elementos que, entre outros, ele atribui a este campo da matemática, como: o conceito de fluência; de variável, de campo de variação. Esta escolha decorre do fato de considerarmos a álgebra como escrita de movimentos da realidade física e social que criamos e na qual vivemos. É uma escrita de movimentos quantitativos sem a escrita numérica que supõe o número, mas não se identifica com ele. Dessa forma, acrescentamos aos nexos definidos anteriormente o da linguagem algébrica.

A esse nexo conceitual da álgebra atribuímos as características do desenvolvimento histórico da álgebra não simbólica discutidas por Hofmann (1961), Ríbnikov (1987) e Smith (1958) definidas como álgebra retórica, sincopada e geométrica. A álgebra simbólica é considerada a álgebra na forma de linguagem como a conhecemos hoje.

O percurso histórico da álgebra representa a síntese de um longo processo que busca romper com a concepção que interpreta a realidade — aquilo que existe — como imutável, fixa, acabada e absoluta. Processo este que acaba considerando o pensamento algébrico como um pensamento que irrompe ligado à concepção que vê na fluência a primeira das características da realidade.

Com base nesta visão, Caraça confere à variável o *status* da fluência e lhe atribui o significado de síntese do ser e do não-ser do número. Pensar algebricamente significa pensar o número sem o numeral (CARAÇA, 1998).

Nesta dimensão, aprender álgebra significa, também, criar um entendimento de que os movimentos da vida, “a vida fluente”, expressão atribuída à vida por Bohm (1980), ao entender que no universo nada é estático, fixo, imutável, pronto e acabado — ao contrário, tudo se

transforma, tudo está em constante movimento, tudo flui, tudo varia; que a linguagem do universo do qual somos parte é contrária à permanência. A linguagem do universo contém a mutabilidade das coisas, diz o autor.

A proposta de ensino de álgebra que desenvolvemos sugere que o ponto de partida do ensino deste campo da matemática seja um estudo de movimentos qualitativos e quantitativos da realidade para, num segundo momento, tornar-se um estudo dos aspectos particulares e singulares de movimentos quantitativos determinados. Procuramos dar a oportunidade aos estudantes participantes desta pesquisa de terem um primeiro encontro com o pensamento algébrico a partir da análise de movimentos que ocorrem na vida de todos nós e nos quais passam despercebidas as características de movimentos quantitativos relativos. Só então fazemos, de forma que os estudantes tenham a oportunidade de compreender que “isolados”, entendido na acepção de Caraça (1998) como recortes desses movimentos, pode estar significando, nos conceitos de equação e inequação, por exemplo, determinados movimentos particulares e singulares que se podem apresentar em nossa vida diária.

Consideramos esta perspectiva didática como lógico-histórica, uma vez que vamos buscar, na História da Matemática, os nexos que compõem o conceito de álgebra e os incorporamos às atividades de ensino, conferindo-lhes uma sucessão temporal de aperfeiçoamento e rigor. Assim, atividades que trabalham a linguagem retórica, a qual prioriza as palavras, antecedem aquelas que trabalham as linguagens: a) sincopada, que mistura à abreviação de palavras diversos símbolos, bem como a variável explicitada a partir da letra “s”, última letra da palavra *arithmos* (número); b) geométrica, que se explicita a partir de figuras, em que a variável é representada pelo segmento de reta; e c) simbólica, representada pela variável letra (alfabeto).

Neste artigo, descrevemos duas das atividades de ensino que foram vivenciadas e discutidas pelos alunos da pesquisa durante quinze encontros da disciplina “Tópicos Especiais em Didática”, do curso de Pedagogia da Faculdade de Educação da Unicamp⁶, bem como

⁶ A disciplina: “Tópicos Especiais em Didática”, por ocasião da pesquisa, fazia parte do currículo do curso de Pedagogia e foi ministrada pelas autoras deste artigo com enfoque na iniciação algébrica. Dezoito alunos participaram da disciplina e foram convidados a

apresentamos a análise das elaborações⁷ dos alunos do curso, destacadas de episódios⁸ ocorridos durante as aulas da disciplina.

As informações para a pesquisa foram retiradas de um questionário feito aos alunos sobre o ensino de álgebra, dos diários reflexivos dos alunos (registros de suas reflexões sobre as vivências nas aulas) e do diário reflexivo das pesquisadoras, chamado — segundo a aceção de BOGDAN e BIKLEN (1994) — de “reflexão distanciada”; nele registrávamos essas informações imediatamente após a vivência em sala de aula.

Para este artigo, vamo-nos deter em discutir a análise de dois momentos de reflexão que ocorreram durante as aulas.

A dinâmica das aulas

As aulas foram desenvolvidas segundo a dinâmica relacional indivíduo-grupo-classe, que possibilitou aos alunos elaborarem, num primeiro momento, respostas individuais às problematizações dos nexos conceituais sugeridas por uma determinada atividade. Em seguida, a resposta de cada um era compartilhada em pequenos grupos. A partir das respostas individuais, cada grupo elaborava a sua resposta, para ser compartilhada no grupo classe.

Durante todo o processo, o professor da classe teve o cuidado de, ao administrar as aulas, assumir o papel de mediador das elaborações do grupo classe. Essa mediação foi baseada na compreensão de que, durante as discussões das atividades, a dinâmica relacional deveria auxiliar a classe a produzir o conhecimento conceitual — como diz Kopnin (1978), a partir de referenciais próprios —, bem como a pensar de forma flexível.

participar, também, na qualidade de sujeitos da pesquisa intitulada: “O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental”, defendida na Faculdade de Educação – UNICAMP, sob orientação da Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura em 12/03/04.

⁷ As elaborações, produções orais e escritas, durante a disciplina, constituíram-se em objeto de estudo da pesquisa.

⁸ Os registros das elaborações de sala de aula, tanto dos pequenos grupos de trabalho quanto das discussões do grupo classe, os diários e os mapas conceituais produzidos individualmente pelos alunos fizeram parte do material empírico da pesquisa. Nos diários que produziram, os alunos puderam identificar-se com pseudônimos ou com seus próprios nomes.

Nas quinze aulas do semestre, estudamos os nexos conceituais da álgebra a partir de cinco unidades didáticas: diferentes naturezas; fluência e permanência; a variável e o campo de variação; álgebra não simbólica; álgebra simbólica. Discutiremos, aqui, duas atividades de ensino que compuseram a terceira unidade didática.

A vivência das atividades de ensino pelos alunos da disciplina

As atividades de ensino, abaixo relacionadas, compõem a unidade didática denominada “A variável e o campo de variação”. Essas atividades tiveram por objetivo discorrer sobre os conceitos de variável e campo de variação, a partir de questões que tratam do conceito de número.

O conceito de variação compreende os conceitos de relatividade e de interdependência que na álgebra se traduzem pela dependência entre variáveis. A dependência está associada às premissas estabelecidas (BOHM, 1980; CARAÇA, 1998) que, por sua vez, estão associadas ao campo de variação, o qual nos auxilia a delimitar valores de mínimo e de máximo, presentes nos movimentos da vida.

Esse conceito, campo de variação, foi discutido inicialmente com a classe, a partir de questões da atividade 1 que tinha por objetivo problematizar a relativização de movimentos quantitativos da vida diária, como expressam as questões abaixo:

- 1) Qual a sua idade?
- 2) Quantas pessoas podem ser transportadas num “fusca”?
- 3) Quantas pessoas estão em sua casa agora?
- 4) Quantos alunos há na sua classe?
- 5) Que horas são?
- 6) Qual o preço de um pãozinho?
- 7) Quantos são os jogadores de um time de futebol?

Observamos que, no momento individual da atividade, os alunos acharam por demais simples as questões. Porém, ao fazerem as discussões no pequeno grupo e ao tentarem argumentar suas respostas depararam-se com várias dúvidas que os surpreenderam.

Segundo Andréia⁹ (2001):

Com a discussão realizada ao final da aula percebi que mesmo no grupo não havíamos percebido a questão da variação na atividade proposta. É engraçado, pois mesmo estudando a variação em diversos momentos, com a reflexão é que vem à tona como ainda estamos presos ao número manual ou físico¹⁰. Como é álgebra que foi debatida: acredito que é pertinente refletirmos sobre este ensino somente ligado com a resolução de equações, o qual busca resolver o valor da incógnita transformando em um número manual, ou seja, perde-se toda a variação. (Andréia, diário: 14/09/01).

A aluna procura relacionar as questões da atividade 1 com a resolução de equações, observando o quanto o modo mecânico pelo qual aprenderam a resolvê-las esconde o pensamento de variação nelas expresso. Parece enfatizar em sua fala que esse modo mecânico de resolver as equações põe a perder o verdadeiro significado de uma equação que é, na verdade, resolver uma variação quantitativa.

Para a aluna, essa perda não se resume somente às equações que se estão resolvendo, mas há uma perda maior: a de perceber a relativização dos movimentos quantitativos da vida : “perde-se toda a variação”.

Em sua reflexão a aluna revela que os colegas do grupo, como ela, acreditam que estejam “presos” ao pensamento de que todas as respostas às questões que se referem a movimentos quantitativos, como as da atividade proposta, sejam exatas e sempre possíveis de serem representadas pelo “número manual”. Andréia, em sua reflexão, parece querer dizer que o pensamento de variação que se expressa numa equação fica subjugado não só ao método mecânico de resolução como também a um simples “número manual” que é buscado como valor da incógnita.

Está subentendido nesta sua reflexão que as práticas escolares mobilizam problemas de variações quantitativas somente pelas técnicas

⁹ A aluna não optou por usar pseudônimo em seu diário reflexivo para identificar-se.

¹⁰ Expressão usada no texto das atividades propostas, para referir-se a um movimento quantitativo por meio do número falado ou escrito.

de resolução de equações em busca de um valor numérico da ou das incógnitas que as compõem. Isto é, não são mobilizadas, também, reflexões sobre as dependências entre as variáveis que geram um determinado movimento quantitativo e sobre os intervalos numéricos em que variam.

Talvez isso aconteça pelo fato de as práticas escolares instituídas não tratarem de situações que mobilizem o pensamento de dependência entre variáveis de um movimento qualquer; ao contrário, criam uma convicção de que todos os movimentos quantitativos estão e devem ser sempre associados a um valor numérico. Tal modo de proceder gera desconforto e insegurança quando o aluno se encontra diante de variações que podem assumir diferentes valores numéricos dentro de um campo de variação, os quais estão diretamente relacionados aos conjuntos dos Números Naturais, Inteiros, Racionais e Reais.

No que diz respeito ao preço de um pãozinho, por exemplo, não temos certeza. Hoje, podemos comprar pão por quilo, em pacotes ou, ainda, por unidade. O preço de “um” pãozinho é relativo. Depende de qual é o “pão” de que estamos mencionando, depende da grandeza pela qual o pão será medido para avaliar seu valor de troca no momento da compra.

Quando temos que analisar o número de pessoas que podem ser transportadas por um “fusca” ou que podem estar em nossa casa, enquanto estamos ausentes dela, também não podemos dar, com certeza absoluta, uma resposta numérica. Temos apenas hipóteses ou partimos de alguma premissa para enunciar uma quantidade de pessoas.

Durante a discussão do grupo-classe sobre as questões da atividade 1, enunciada acima, alguns alunos argumentavam, por exemplo, que, ainda que a lei brasileira referente ao código de trânsito indique que em um “fusca” devemos transportar apenas cinco pessoas, na realidade, esse número pode variar, sem infringir a lei, quando o carro transportar adultos com crianças de colo ou ainda mulheres grávidas. (Diário, 2001)¹¹.

¹¹ Extraído do diário das pesquisadoras, autoras deste texto.

A solução às questões aparentemente simples deve considerar a lei de dependência que atribuímos aos movimentos quantitativos e às premissas que usamos para definir essa dependência, como discute Caraça (1998). Assim, para dizer quantas pessoas estão em casa, neste instante de minha ausência de lá, terei que dizer que pode estar uma pessoa, pois quando saí ficou minha mãe em casa. Mas, se ela também tiver saído depois de mim ou se tiver chegado alguém, não posso mais afirmar sobre o número de pessoas que estão em casa agora, podendo fazê-lo somente após averiguar essas suposições. Porém como é possível acontecer vários movimentos de entrada e saída de pessoas, nada posso afirmar com certeza a respeito do número de pessoas que estão em casa, neste instante, estando eu ausente de lá.

Ora, se tudo está em movimento, como responder exatamente a minha idade? O número de alunos da classe? Que horas são? Quantos são os jogadores de um time de futebol? São perguntas que nos fazemos no dia-a-dia e as fazemos porque subentendemos que tudo esteja em movimento, que tudo esteja variando. Mas essas e outras perguntas, de modo geral, não estão presentes nas práticas escolares que mobilizam o objeto matemático álgebra e, por esse motivo, quando são trazidas para a cultura escolar matemática, provocam certo estranhamento nos alunos, de modo que, num primeiro momento, estes as vêem demasiadamente fáceis, talvez até desmerecedoras de sua capacidade para questões bem mais difíceis. Porém, em suas reflexões, feitas após se depararem, durante o debate na classe, com a diversidade de respostas possíveis a essas simples questões, declaram terem verificado que essas questões mobilizaram aspectos do pensamento algébrico, como variável e campo de variação, sem que para isso tivessem que decorar e exercitar “listas de expressões algébricas”¹².

Analisemos mais uma atividade de ensino proposta aos alunos, nesta pesquisa. Esta atividade simula uma situação imaginária, considerando a necessidade que a civilização egípcia teve, há mais de três mil anos, de enumerar o desconhecido.

¹² Informações retiradas do diário reflexivo das pesquisadoras.

Estamos três mil anos atrás. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras:



- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60, senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão, senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papiros e pensou:

- "Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos, no depósito, 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não decidiu qual será a altura de sua pirâmide. Dessa forma, não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. Porém, preciso deixar escrita aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Este é o meu problema: como escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isso de forma matemática, quer dizer, da forma mais simples possível e utilizando a linguagem das quantidades, isto é, a linguagem numérica?"

Pois é, pessoal, temos aí o problema do arquiteto das pirâmides:

Como escrever, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?

No episódio¹³ acima, apesar das várias tentativas de solução, o grupo não finaliza suas discussões, decidindo por uma das três soluções que cria; também não percebe que deveria dar uma solução expressa por uma frase, pois em suas três soluções usa uma expressão algébrica simbólica. Irá dar-se conta de que não atendeu a solicitação do problema de somente expressar a solução em linguagem retórica no momento da discussão com o grupo classe após todos os grupos apresentarem as suas soluções.¹⁴

A resposta, “Vai depender da altura da pirâmide”, que alguns alunos dão à pergunta da aluna R “Quantas pedras?” coloca, já no início da discussão do grupo, a questão fundamental do problema e o ponto de partida para se discutir uma possível resposta. Esta afirmação poderia levar a conjecturas tanto sobre o valor máximo da altura como sobre o seu valor mínimo, pois a altura não estando definida, não estará definido, também, o valor mínimo que esta poderá assumir; por este motivo, poderá, então, ter um valor menor que doze pedras, não importando se essas já estejam colocadas. Mas cogitar se a altura pode ser uma variável dependente não foi o procedimento que ocorreu no grupo, não obstante alguns alunos a tenham entendido desta forma. Parece-nos que os alunos deste grupo se sentiam mais seguros em cogitar soluções, operando diretamente com os dados numéricos disponíveis no enunciado do problema, pois o total de 72 pedras que atribuem valor a quantidade máxima da altura é calculado somando as 12 pedras, já colocadas, às 60 pedras do estoque.

Mas a certeza de terem alcançado o valor da altura da pirâmide por meio de um simples cálculo de adição é desmontada pela pergunta da aluna B: “Essas 60 (pedras) podem ser usadas todas ao mesmo tempo?”, que encontra uma resposta na elaboração da aluna D, ao formular uma equação que expressa a variação da altura h em função de x , com x variando “mas não no infinito; só até cobrir as 60 (pedras) que tem no estoque”, como afirma a própria aluna. Em sua formulação, a aluna D considera a condição de ser 12 o valor mínimo da altura. Embora tenha chegado a uma solução plausível, parece ter menos

¹³ Consideramos episódio o momento da atividade que contém o problema e o processo de resolução dos alunos. O “Relato dos procedimentos do grupo” foi feito a partir do diário reflexivo das pesquisadoras, já referido neste texto.

¹⁴ Informação extraída do diário reflexivo das pesquisadoras.

dificuldade em modelá-la mediante uma equação expressa em linguagem simbólica do que em expressá-la a partir da linguagem retórica, utilizando-se das palavras como solicitado pelo problema. Ou seja, parece ser mais acessível explicitar uma variação usando a variável letra.

Isto pode ocorrer porque as práticas escolares instituídas ou mobilizam o pensamento de variação somente a partir de suas representações simbólicas— seja na forma de uma equação ou inequação, seja na forma de uma função — ou o mobilizam somente em linguagem retórica, das palavras, sem que seja feita uma relação adequada desta com uma representação formal. Dessa forma, uma prática escolar centrada no formalismo algébrico pode ter como resultado uma aprendizagem que se manifesta pela tentativa de adivinhar a fórmula para resolver um problema.

Enquanto elaboram a solução para o problema, os alunos esquecem-se de analisar alguns elementos importantes, como:

1) o problema se passa no contexto da civilização egípcia antiga, motivo pelo qual a solução deve ser expressa por uma frase, pois em suas práticas de contagem não usavam expressões algébricas análogas às atuais;

1) existe relação de dependência entre o número de pedras e a altura;

2) a altura não está definida;

3) é necessário estabelecer um campo de variação para a altura.

Interpretamos como esquecimento porque, na discussão do grupo classe que foi posterior à discussão dos pequenos grupos, emergem considerações análogas às que arrolamos nos quatros elementos citados acima.¹⁵

De modo geral, durante as discussões nos pequenos grupos percebeu-se que a tendência dos alunos consistia em expressar o problema mediante uma equação, bem como em encontrar valores numéricos para a altura, utilizando-se de manipulações simbólicas da álgebra, em alguns casos de forma parcialmente adequada, como no

¹⁵ Informações retiradas do diário reflexivo das pesquisadoras.

exemplo da aluna D; em outros casos de forma confusa, como ocorreu com a aluna P.

A partir da análise que fizemos, consideramos que as respostas dadas pelos grupos são formuladas a partir de crenças algébricas construídas na escola básica. As práticas escolares que mobilizam o objeto matemático álgebra, de modo geral, induzem à crença de que a expressão “valor desconhecido” está sempre relacionada à incógnita de uma equação. Tendo reconhecido o problema do faraó como um problema de solução algébrica, os alunos recorrem imediatamente a uma equação, o que os leva, por decorrência, à determinação de um valor numérico da altura, porque entendem que é este o procedimento de uma equação. Por outro lado, não está presente em suas discussões o fato de a altura poder ser considerada uma variável dependente de outra variável. Desta forma, os procedimentos dos alunos desta pesquisa para resolver o problema da pirâmide do faraó são indícios de que tiveram pouco ou nenhum contato com práticas que mobilizam o objeto matemático função em contextos não formais, como o do problema da altura da pirâmide. Da mesma forma, esses procedimentos são indícios de que as práticas escolares que mobilizaram o objeto matemático álgebra deram ênfase à manipulação simbólica da equação, com pouca ou nenhuma discussão sobre a interpretação do movimento e da variável como elementos que significam o pensamento algébrico da forma como são discutidos, por exemplo, por Caraça (1998).

A partir desta atividade, que tinha por objetivo a utilização da álgebra retórica na solução de problemas de variação, discutimos com o grupo classe a importância de trabalhar a linguagem matemática através de palavras como uma estratégia didática para a compreensão *“da linguagem especificamente matemática para a qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam os movimentos numéricos”* (Lima & Moisés, 2000, p. 28). Pensamos ser este um caminho didático possível para proporcionar ao aluno a produção de significados do objeto matemático álgebra que lhe façam sentido de modo que, ao resolver um problema algébrico, não se depare com a incompetência algébrica da adivinhação de fórmulas.

Esta questão sobre a linguagem matemática foi motivo de discussão — que não passou despercebida por alguns alunos — no

grupo classe¹⁶. Trazemos as reflexões de três alunos sobre o assunto, extraídas de seus diários reflexivos.

A reflexão de Sônia:

[...] Por que é tão importante para o pensamento matemático a criação de uma linguagem própria? Acho que ficaria muito difícil, ou até impossível lidar com equações, funções, etc., com a retórica... A própria necessidade fez com que se simplificassem as sentenças matemáticas e daí, a criação de sua própria linguagem (Sônia, diário, 28/09/01).

A reflexão de Bila¹⁷:

Por que é tão importante para o pensamento matemático a criação de uma linguagem própria? O pensamento matemático tornou-se, no decorrer da história da humanidade, um componente fundamental na vida do homem. Dessa maneira, sua própria evolução exigiu uma linguagem própria, para poder ser entendida por qualquer pessoa, isso porque a linguagem retórica fica sujeita a interpretação, que além de variar de pessoa a pessoa, vai variar os significados de acordo com a região, pela mudança de linguagens, de dialetos. (Bila, diário, 05/10/01).

A reflexão de Coração¹⁸:

[...] pode ser ambígua e como devemos ter cautela na escrita portuguesa da matemática. Notei como a vírgula, parênteses, ou seja, pontuações em geral podem transformar o resultado matemático e, às vezes, não damos a devida atenção e importância a isso. Quantas crianças podem ter interpretado de diversas maneiras um exercício mal escrito, estando certas, mas julgadas como erradas? (Coração, diário, 19/10/01).

Sônia e Bila parecem convencer-se de que a linguagem matemática é uma construção histórica e foi tomando a forma que tem

¹⁶ Informações extraídas do diário reflexivo das pesquisadoras.

¹⁷ Pseudônimo usado por uma das alunas no diário reflexivo.

¹⁸ Pseudônimo usado por uma das alunas no diário reflexivo.

hoje por uma necessidade de simplificação. Ambas justificam o processo de formalização dessa linguagem, alegando que o uso da linguagem retórica dificultaria a comunicação dos objetos matemáticos; Bila acrescenta que dificultaria também a sua universalização. Interpretamos as reflexões das duas alunas como indícios da necessidade que tiveram de explicar para si a dificuldade que sentiram ao resolver o problema da pirâmide, pois não o conseguiram expressar nem na linguagem retórica, a partir das palavras, nem na linguagem da álgebra simbólica, utilizando-se da variável letra. O que quer dizer que, se nas práticas escolares a aprendizagem da álgebra não for sustentada pela linguagem retórica, poderá ocorrer a mesma dupla dificuldade que os alunos experimentaram para resolver o problema da pirâmide.

Vale a pena ressaltar que defendemos que a aprendizagem da álgebra considere a linguagem algébrica.

Aqui, a linguagem algébrica é composta pela palavra (linguagem retórica); pela figura (linguagem geométrica); pelo “numeral” (linguagem sincopada); e pela letra (linguagem simbólica).

Assim, mesmo que a reflexão apresentada acima tenha ocorrido pelo fato de a construção histórica da linguagem algébrica ser uma informação nova para as alunas, o destaque que lhe é dado em seus diários pode significar que a ausência de uma abordagem sustentada nesse processo histórico, na formação das alunas, pode ser um dos motivos da dificuldade de explicar-se em linguagem retórica, das palavras, um problema que não está incluído normalmente nas práticas escolares instituídas. E o fato de não conseguir explicá-lo em linguagem retórica dificulta o entendimento de seu significado, quando representado em linguagem simbólica.

Já, a reflexão da aluna que se denominou Coração aponta para os cuidados que deve ter uma prática sustentada na utilização da linguagem retórica para expressar objetos matemáticos. Se, numa enunciação matemática em linguagem retórica, das palavras, não se está atento à pontuação correta, isso pode acarretar algum erro matemático. Pode ser o caso de “um exercício mal escrito”, que gera equívocos na correção das respostas das crianças. Na verdade, a resposta dada pela criança pode ser condizente com o “exercício mal

escrito”, mas será considerada errada, se a correção for feita com base no exercício escrito corretamente.

De qualquer forma, as reflexões das três alunas surgem em decorrência de se ter mobilizado o objeto matemático álgebra em um contexto atípico nas práticas escolares instituídas. O contexto é atípico, pelo menos, por dois motivos: um, por constituir-se de uma situação imaginária situada num tempo histórico real. Hogben (1970) revela que a antiga civilização egípcia em algum momento de sua história passou pela necessidade de representar uma quantidade desconhecida, ou seja, uma quantidade que variava e que por isso não tinham como expressá-la. Criaram, então a expressão “ahá”, para referirem-se a um valor indefinido. O outro motivo da atipicidade do problema consiste em solicitar uma resposta a um problema algébrico que seja expressa numa frase em linguagem retórica. Neste caso, a atipicidade fundamentada nas referências teóricas que consideram, como no exemplo de Caraça (1998), a fluência como base para a discussão do pensamento algébrico foi geradora das questões que os alunos levantaram sobre a formação da linguagem matemática, seja na história da álgebra, seja nas práticas escolares.

Algumas considerações

A análise dos procedimentos e das reflexões dos alunos que responderam às questões das atividades¹⁹ da pesquisa nos proporciona certo convencimento de que a abordagem — que denominamos lógico-histórica — dessas atividades, com enfoque no desenvolvimento dos nexos conceituais da álgebra, possibilitou discussões fundamentais sobre a constituição do conceito de variável (palavra, numeral, figura e letra) e campo de variação; sobre a constituição da linguagem matemática e sua repercussão não só na produção de significados que façam sentido para o aluno, como também no modo de resolver um problema algébrico atípico às práticas escolares instituídas.

O novo que a pesquisa traz são os significados produzidos pelos alunos da disciplina sobre esses nexos conceituais algébricos e os indícios da relação desses significados com as práticas escolares. Esse

¹⁹ Lembramos que neste texto reportamos a discussão sobre apenas duas das atividades utilizadas na pesquisa.

conjunto de elementos produzidos pela pesquisa pode sustentar novas bases para as práticas que mobilizam o objeto matemático álgebra.

Na atividade 1, que problematiza movimentos quantitativos de senso comum, como é o caso de perguntar “qual é sua idade?”, convidam-se os alunos a pensar sobre as respostas prontas e absolutas às perguntas presentes no nosso dia-a-dia. No decorrer do processo de discussão entre os pares e no grupo classe, mediado pelas pesquisadoras, vai-se configurando uma outra visão de abordagem dessas questões. Os alunos desnaturalizam as respostas prontas e as recompõem, relativizando suas afirmações. Como tudo interdepende e tudo está em movimento, absolutizar movimentos da vida diária e reduzi-los a uma única resposta numérica, reduzi-los àquela resposta que se mostra de imediato como única e verdadeira pode conduzir a uma visão de “mão única” dos movimentos da vida. Este modo de pensamento gradativamente instituído por determinadas práticas escolares tem pouco ou nenhum espaço para a criação, para o estranhamento, para a admiração. Não pergunta nem questiona o que é considerado natural. Esta é uma visão estática e não fluente das coisas e dos fenômenos.

Como tudo está em movimento, tudo interdepende, nenhum conhecimento de alguma coisa é um conhecimento acabado e absoluto, não é plausível interpretar um movimento atribuindo-lhe um único número, mas é possível compreendê-lo dentro de um campo de variação. Se tudo interdepende, é coerente relativizar as afirmações a respeito das coisas e dos fenômenos da realidade. Mesmo para respondermos a uma simples pergunta como “Qual o preço de um pãozinho?”, é coerente relativizar a resposta aos diferentes tipos de pão que se conhecem.

Nas primeiras aulas, percebemos que o conhecimento dos alunos sobre a álgebra estava relacionado aos aspectos perceptíveis da álgebra simbólica, a qual prioriza a variável letra. Para todos os problemas que lhes foram propostos, diziam que era preciso encontrar o valor do x , sem mesmo saber enunciar em linguagem retórica o que do problema em questão o x estaria representando. O x lhes aparece como se fosse uma tecla que conduz automaticamente para a solução do problema.

As atividades de ensino que propusemos não exigiam uma resposta que considerasse a variável letra, ou seja, a álgebra simbólica;

ao contrário, as respostas teriam que ser construídas e elaboradas a partir de enunciações individuais para, em seguida, serem repensadas e discutidas nos pequenos grupos. Há aqui uma outra concepção de ensino que considera três movimentos: 1) a relatividade do conhecimento; 2) a flexibilidade do conhecimento e 3) a totalidade dos sujeitos envolvidos.

Percebemos que as atividades que exigiram certa dose de criatividade trouxeram-lhes dilemas, como no problema da altura da pirâmide, em que, embora tivesse formulado diferentes soluções, o grupo não se decidiu por nenhuma especificamente. Nesse exemplo, vemos que os alunos discutem suas soluções, mas não percebem que a pergunta do problema é diferente daquela que tentam responder. Talvez pela forma atípica da pergunta, eles a desconsideram e se lhes faz presente uma pergunta escolarmente familiar para este tipo de problema, “qual é a fórmula para a altura?”, pergunta esta não feita, mas por força do hábito, ouvida, pois é ela que conduz a discussão no grupo. Embora encontrem três soluções diferentes para o problema, a pergunta que abre a discussão no grupo é a mesma que fecha: “quantas pedras?”. Giram, assim, em círculo, talvez porque não consigam se desprender de moldar o problema com o formato da álgebra simbólica. Ficam presos à variável x , mostram que estão acostumados ao uso das letras, mas não sabem exatamente como usá-las para modelar o problema da pirâmide.

As discussões feitas em sala de aula permitiram aos alunos perceber que há outras perspectivas para ensinar os conteúdos matemáticos. Há outras dinâmicas que podem freqüentar a sala de aula. A perspectiva abordada envolve a mobilidade do pensamento, a relatividade do objeto matemático. As verdades podem ser questionadas a qualquer momento. A fluência faz parte da instabilidade das respostas tanto daquele que aprende quanto daquele que ensina.

Há mudanças explícitas em alguns alunos, que as manifestam em seus diários reflexivos. Essas mudanças podem ser comprovadas a partir dos gestos, dos tons de voz, das discussões “acaloradas”, das idas a bibliotecas, da resolução das atividades (Diário, 2001, das pesquisadoras). Alguns alunos percebem mudanças em suas concepções sobre a matemática, como é o caso da aluna Mudança, que assim se denominou por se perceber mudando:

Como disse durante a aula, estou me sentindo roubada. Como a escola tradicional, a eterna aplicação de regras, sem o entendimento do processo e da origem dessas fórmulas pode levar as pessoas a perderem o vínculo com a compreensão, com a realidade, com a vida. Se a minha história escolar fosse diferente, se eu tivesse entendido a matemática, ao invés de decorar regras, a minha vida hoje seria diferente? Posso afirmar, com certeza, que sim, principalmente com relação ao meu auto-conceito, minha auto-estima. Estou muito contente em começar a conhecer a matemática agora, e ao mesmo tempo, triste por ser tão tarde. Ainda há tempo, espero! Agradeço. (Mudança, diário, 28/09/2001).

Percebemos certa regularidade no modo de transformação dos sujeitos: a incomodação com a verdade imposta, com o movimento e com a ambigüidade. É a partir dessa incomodação que a maioria dos alunos faz relações tanto com a forma como aprenderam álgebra, quanto com as conseqüências que essa aprendizagem trouxe para sua visão de mundo e profissional.

A contribuição principal desta pesquisa para o ensino de álgebra no ensino básico reside no fato de que ter como base uma prática que mobilize o pensar sobre o movimento das coisas e dos fenômenos sustenta a produção de significados de variável, de variáveis dependentes, de campo de variação de variação e de suas respectivas representações simbólicas. E, ainda, que este tipo de prática mobiliza, também, uma avaliação do aluno sobre as implicações possíveis que uma abordagem no ensino de álgebra pode ter não só para a concepção de álgebra e de matemática como também para uma determinada visão de mundo por parte do aluno.

Referências bibliográficas

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S.K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994. Coleção Ciências da Educação. v. 12.

BOHM, D. *A totalidade e a ordem implicada*. 12. ed. São Paulo: Cultrix, 1980.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Portugal: Gradiva, 1984.

_____. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Portugal: Gradiva, 1998.

DAVYDOV, V. V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. 2. reimpressão. Ciudad de La Havana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

HOFMANN, J. E. *Historia de la matemática*. Traducción al español por Vicente Valls y Angles y Gonzalo Fernández Tomaz. 1ª. edición en español. Talleres Gráficos Toledo S.A.;l. Ciencias Matemáticas, U.T.E.H.A., 1961.: Talleres Gráficos Toledo S.A.; México: I, Ciências Matemáticas, U.T.E.H.A., 1961.

HOGBEN, L. - *Maravilhas da Matemática: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos*. Editora Globo, Porto Alegre, 1970

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Université du Québec à Montréal, 1992.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. Coleção Perspectivas do homem.v. 123.

LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O desenvolvimento da álgebra pré-simbólica: o conceito de variável. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 2001, Catanduva. *Anais...* Catanduva: SBEM-SP, 2001.

LIMA, L. C.& MOISÉS, R.P. *A variável: escrevendo o movimento*. A linguagem Algébrica 1. São Paulo: CEVEC/CIARTE, 2000.

OLIVEIRA, Ana Teresa de C. C. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. *Educação Matemática em Revista* — Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 9, n. 12, p. 35-39, junho de 2002.

PAULOVICH, L. Um estudo sobre formação de conceitos algébricos. *Ciência & Educação*, Bauru, v.5, n. 2, p. 39-48, 1998.

PINTO, R. A. *Erros e dificuldades no ensino da álgebra: o tratamento dado por professoras de 7a.série em aula*. Dissertação (Mestrado) —

Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. URSS, Editorial Mir Moscú, 1987.

SMITH, D. E. *History of mathematics*. New York: Dover, 1958. v. I.

SCARLASSARI, N.T. - *Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SOUSA, M.C. *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. - *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. 2. ed. São Paulo: IME - USP, 1996.

