A Geometria de Euclides a Lobatschewski: um estudo histórico-pedagógico

BRITO, Arlete de Jesus. Natal: Editora da UFRN, 2007

*Gert Schubring**

O uso da história da matemática para fins de ensino torna-se um assunto sempre mais importante na educação matemática. Porém, a prática de um uso real, seja em sala de aula, seja na formação dos professores, não corresponde à intensidade e à extensão que se requer, teoricamente, a fim de alcançar os resultados desejados de melhoria na qualidade do ensino da matemática. Na discussão sobre este contraste, embora ainda não muito desenvolvida, apontam-se em particular duas razões:

- *"There is a lack of resource material in it".*
- *"There is a lack of teacher training in it",*

razões apresentadas por Man-Keung Siu, um propagador convencido da alta importância da introdução do material histórico, em 2004, no congresso *History and Pedagogy of Mathematics* (SIU, 2006, 269). Analogamente, Antonio Miguel, em artigo de 1997 sobre as potencialidades pedagógicas da história da matemática, alertou – além dos argumentos reforçadores – para os argumentos questionadores e discutiu os problemas de ausência de literatura adequada e da natureza imprópria da literatura disponível (MIGUEL, 1997, p. 95).

Este livro apresenta justamente um exemplo excelente de literatura adequada para a formação de professores em história e epistemologia da matemática, tanto quanto ao conteúdo como quanto à forma.

De fato, a forma da exposição corresponde de modo ótimo à tarefa de introduzir o leitor no desenvolvimento complexo de um dos desafios conceituais maiores do pensamento matemático: o problema da demonstrabilidade do quinto postulado de Euclides. Conhecemos desde Platão a forma do diálogo como um procedimento bem adequado para apresentar ou reconstruir um processo de aprendizagem e para modelar um ensino. Desde então, vários textos destinados à aprendizagem foram

* Professor da Universidade de Bielefeld - Alemanha

compostos em forma de diálogo a fim de melhor explicar conceitos difíceis. Sabe-se bem que esta forma foi transformada por Imre Lakatos, conforme sua obra famosa *Proofs and refutations*: uma turma, juntamente com o seu professor, está reconstruindo o desenvolvimento histórico de um teorema geométrico e cada aluno representa uma das posições epistemológicas implicadas.

Neste livro, a autora aplica a forma de Platão-Lakatos como guia para o leitor entender os passos e as etapas do pensamento e o surgimento de novas abordagens. A forma dialógica de discussão numa turma é particularmente conveniente para evidenciar as resistências contra certos modos de pensamento e, em particular, contra inovações: um ou mais dos participantes vão encarnar as pessoas históricas que argumentaram segundo as visões tradicionais e outros vão tentar expor as razões em defesa do novo. Com efeito, a proposta de um novo conceito de espaço matemático, sem relação com o espaço empírico, constituiu praticamente uma revolução no sentido de Thomas Kuhn e provocou enormes resistências. Como a autora mostra de maneira convincente, as resistências foram assim tão fortes que vários matemáticos que já tinham conseguido provar a não-demonstrabilidade do quinto postulado desistiram das conseqüências das próprias descobertas. Os quatro alunos desta turma representam também posições epistemológicas diferentes: platonistas, empiristas, formalistas e materialistas.

Por outro lado, também o conteúdo constitui um saber chave na formação de professores do ensino fundamental e médio. A geometria não-euclidiana e, ligada com ela, a visão de toda a matemática contribuem de modo decisivo, mesmo não sendo diretamente assunto do ensino, para o "meta-saber" dos professores, que Felix Klein caracterizou como a matemática desde um *"advanced standpoint".* A autora baseia-se na literatura internacional relevante sobre a historiografia e a filosofia da matemática e consegue, bem, expor por meio dos diálogos os elementos essenciais dos desenvolvimentos geométricos e epistemológicos.

O livro é organizado em seis aulas. A primeira serve como introdução ao desenvolvimento da matemática e em particular ao da geometria, na Grécia antiga. Trata do surgimento da abordagem dedutiva, das correntes filosóficas e das situações sociais e políticas ligadas ao livro-texto de Euclides e aos conceitos de axiomas e postulados. Na segunda aula, o quinto postulado começa a ser discutido: a tentativa de entendê-lo como um teorema dá ocasião para introduzir fundamentos do raciocínio matemático e da lógica – o que significa demonstrar, a demonstração pelo absurdo e a lei do terceiro excluído. Na terceira aula, tentativas de formular postulados equivalentes ao quinto e de prová-los como teoremas são discutidas pelos alunos. Essas tentativas históricas, que aconteceram primordialmente no século XVIII, as suas ligações com as filosofias do racionalismo e do empirismo, e o papel de Kant são evidenciados, assim como os contextos políticos e sociais.

Na quarta aula, os alunos seguem abordando as tentativas de Saccheri de provar o postulado equivalente – a soma dos ângulos de um triângulo vale dois ângulos retos – na maneira indireta, reduzindo ao absurdo as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo. Embora não sendo capaz de achar uma contradição na última hipótese, Saccheri evitou as conseqüências de ter achado uma nova geometria e afirmou a geometria euclidiana. As implicações da diferença entre a abordagem de demonstração indireta do jesuíta Saccheri e as demonstrações diretas discutidas na aula anterior são evidenciadas.

A quinta aula é dedicada aos passos que levaram a um novo conceito de espaço, independente do espaço da nossa experiência, e assim às primeiras teorias de geometria não-euclidiana. Essa aula é introduzida por uma citação de William Blake sobre a natureza do infinito, o mesmo Blake cujo quadro “O ancião dos dias”, de 1794, ilustra a folha de rosto, de uma maneira impressionante, apontando o conflito entre a matemática ter sido “criada” ou constituir uma invenção dos homens. Vistas as descobertas de Gauss, dos Bolyai e de Lobatschewski, a reflexão fica particularmente preciosa e fina quanto ao impacto da filosofia de Kant, trazendo aspectos que favoreceram e aspectos que dificultaram o surgimento dessas novas idéias.

Na aula final, os alunos conseguem, por um lado, um passo decisivo de generalização, a saber, a prova da independência do quinto postulado e a admissibilidade lógica de outras geometrias, as geometrias não-euclidianas. Por outro lado, este grau de abstração, não obstante a introdução do termo modelo, facilita visualizar tais construções humanas – pelo modelo de Beltrami, de Klein, de Poincaré – e entender suas propriedades geométricas; até mesmo observar relações surpreendentes com os começos da perspectiva na Renascença.

Como já fica evidente, este desenvolvimento na história da matemática não é apresentado como acontecendo na área do puro pensamento que se poderia ornamentar um pouco com elementos de um contexto, mas sendo exterior ao pensamento; pelo contrário, o desenvolvimento conceitual é concebido e, de fato, bem apresentado como inseparável dos processos filosóficos, intelectuais, sociais e políticos, dos quais ele constitui um dos elementos. Complementando essa abordagem, a introdução do livro expõe várias teorias, em particular, teorias sociológicas que facilitam ao leitor aprofundar a interpretação de desenvolvimentos na história da ciência.

O livro é escrito num estilo muito vívido. Serve de maneira excelente como um novo tipo de livro-texto para a formação dos professores em geometria e nos fundamentos da matemática, mas, além disso, também para a cultura geral de cada um que seja interessado em matemática.

Referências bibliográficas

LAKATOS, Imre. *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery. Cambridge*: Cambridge Univ. Press, 1976.

MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997..

SIU,Man-Keung "'No, I don't use history of mathematics in my class. Why?'", *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4* (ICME10 Satellite Meeting of the HPM Group & Fourth European Summer University 12 - 17 July 2004 Uppsala), eds. F. Furinghetti, S. Kaijser, C. Tzanakis (Iraklion: University of Crete, 2006), 268-277.