HISTÓRIA, SENSOS MATEMÁTICOS E CONSTRUCTOS REFLEXIVOS MATEMÁTICOS: QUESTÕES SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Antonio Carlos Carrera de Souza*

Resumo

Este artigo busca na História da Matemática, Psicologia e Antropologia os fundamentos para estabelecer um paradigma epistemológico para a Educação Matemática. Propõe que, através dos **Sensos Matemáticos** e dos **Constructos Reflexivos Matemáticos**, recupera-se historicamente a **abordagem externalista** em contraposição à **abordagem internalista** da Matemática. Para tanto, indica que a ciência é entendida como a sensata experiência acompanhada da matematização necessária.

Abstract

This paper seeks for the foundations in the History of Mathematics, Psycology and Antropology in order to establish an epistemological paradigm for Mathematical Education. The purpose is to show that it's possible to restore historically the **external aproach** in contraposition to the **internal aproach**, by using the **Mathematical Senses** and **Mathematical Reflexive Constructs**. Therefore, we indicate that science should be taken as the sober experience followed by the necessary "mathematization".

A análise do desenvolvimento científico explicita a relação entre o processo de produção da existência do homem, a evolução dos modos de produção da sociedade e a ciência elaborada a partir desses modos de produção, no constante processo de intervenção intencional na realidade. Ao produzir sua existência, o homem busca projetar-se intencionalmente através do trabalho. As possibilidades de intervenção na realidade são fornecidas ao homem pela condição de controlar ações, com a finalidade de testar hipóteses, e pela capacidade de análise dos fenômenos. A ciência é, então, uma das atividades de intervenção na realidade.

Nessa perspectiva, ao intervir na natureza, a práxis é constituída pela ação intencional do homem na constante bus-

* Docente do Departamento de Educação/IB/UNESP/Rio Claro e do Pós-Graduação em Educação Matemática/DM/IGCE/UNESP/Rio Claro.

ca pela criação de instrumentos e justificativas teóricas que permitam uma melhor leitura dos fenômenos. Essa ação determina que o homem elabore artefatos físicos e mentais. Por artefatos físicos entendemos a elaboração de instrumentos que permitam ao ser humano maior eficiência no processo de intervenção física no meio ambiente. Um dos primeiros artefatos físicos construído pelo homem como própria extensão do corpo foi, provavelmente, a clava. A construção de artefatos físicos exige a elaboração mental do instrumento e é originada pela ação intencional do homem na natureza, em função da capacidade humana de observar e analisar fenômenos. A essa elaboração mental, característica específica do ser humano, chamamos artefato mental. A elaboração desses artefatos tem origem na **ideação reflexiva**[1]. A ação intencional do homem na realidade propicia, a partir dos artefatos, a elaboração de construções mentais que antecipam o objeto físico produzido. A essas construções mentais com raízes na atividade prática do homem chamaremos **constructos**.

Do ponto de vista da utilização desses processos de criação, em questões de ordem matemática, apontamos, como exemplo objetivo e importante, o estudo dos **constructos** utilizados pela humanidade, ao elaborar os números e o conseqüente sistema de numeração. O sistema de numeração inicial trazia certa unidade interna, de alguma forma coerente com as dificuldades e com as utilidades que possuía então. Abrigava, sob uma única idéia, conhecimentos múltiplos oriundos de diversas fontes, dando-lhes certa unidade e, com isso, caracterizando, inicialmente, a Matemática. Como um **constructo reflexivo matemático** primitivo, os sistemas de numeração iniciais tinham origem na contagem simples e direta de objetos, não havendo, então, necessidade de uma idéia de número mais complexa do que os naturais maiores que zero.

Nesse exemplo, na criação primitiva dos campos numéricos, fica evidente a construção de um sistema inicial, através dos **sensos de ordenação e classificação**. Esses dois sensos - tratados de maneira formal pela Matemática atual - permitiram o surgimento de estruturas matemáticas iniciais baseadas na prática social que, ao longo do tempo, forneceu, através da experimentação, o surgimento dos primeiros algoritmos e modelos matemáticos. Destacamos, por exemplo, que, na base do senso de ordenação e de classificação, surgem a idéia de adição e a propriedade transitiva.

Durante milênios, mediante refinamento do modelo primitivo, a humanidade elaborou um sistema de numeração como um **constructo** consistente,

---

[1] Termo cunhado por Álvaro Vieira Pinto que explicita dois movimentos. No primeiro, idéia/ação = ideação, ele mostra que o movimento idéia → ação é contínuo e aprimorado. No segundo, ideação reflexiva, mostra que a origem da ideação é a realidade concreta, ou seja, as idéias e as ações se formam através do reflexo da realidade no intelecto humano e voltam a esta por meio da ideação.

conforme o estágio em que se encontrava o desenvolvimento científico. Foi ainda capaz de, nos momentos de crise dessa construção, quando novas questões colocavam em desequilíbrio antigas estruturas, propor novas soluções para o sistema e superar as dicotomias subjacentes. Assim, aumentou as fronteiras dos conceitos de número até então existentes e elaborou ampliações com base na estrutura numérica anterior, permitindo a construção de novos campos numéricos.

Exemplos interessantes surgem do estudo da origem dos números irracionais a partir da escola pitagórica e das propostas de superação das questões relativas aos infinitésimos, nos séculos seguintes[2]. A construção de uma teoria dos números praticamente acompanha a existência do homem à medida em que, com base na construção de novos campos numéricos, há um aperfeiçoamento da idéia de número. O primeiro tratamento axiomático - do ponto de vista da Lógica enquanto instrumento que rege o raciocínio científico - para os números naturais somente é elaborado em 1906, por Giuseppe Peano, e a definição de número real só acontece com Richard Dedekind, que, em 1888, sistematizou a definição de números irracionais. É interessante notar que alguns autores consideram a obra de Dedekind comparável aos trabalhos de Eudóxio[3].

Com o exemplo do surgimento dos **constructos reflexivos matemáticos** iniciais e das implicações decorrentes dessa construção, impõe-se uma reflexão a respeito do nascimento da ciência e do seu natural desenvolvimento: a ciência, enquanto prática social, surge em conjunto com outros paradigmas vigentes que buscam respostas, por outros campos que não o da análise racional dos fenômenos. Um exemplo suficientemente conhecido é o do surgimento da Astronomia Babilônica com base na Astrologia.

Segundo os parâmetros ocidentais, a ciência teve seu nascedouro a partir do momento em que foram estabelecidos critérios de controle e explicação analítica sobre os fenômenos. Embora as concepções de cunho místico estivessem presentes na raiz da prática científica, elas foram sendo afastadas à medida que não mais forneciam explicações convincentes na análise e justificativa das múltiplas situações originadas pela complexidade emergente dos fenômenos. As primeiras concepções de ciência constituídas de modo orgânico têm origem no modelo grego de conceber o mundo. Na realidade, o conceito grego de ciência conserva, nos seus primórdios, uma série de posições de cunho não-analítico,

[2] Para um aprofundamento da discussão dos infinitésimos ler BALDINO, R.R. "A Ética de Uma Definição Circular de Número Real", in: *Bolema*, Ano 9, nº 10.

[3] STRUIK, D. J., *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa, Gradiva Publicações Lda, 1989, p. 84.

como, por exemplo, as explicações cosmológicas presentes em Heráclito, Parmênides, Tales de Mileto e Pitágoras.

É importante salientar que o critério básico para uma doutrina científica, conforme o exigido na Grécia a partir do século III a. C., é o de **demonstrabilidade** dentro de um sistema orgânico e unitário, no qual as afirmações científicas dependem umas das outras e nenhuma pode ser retirada. Platão [4] diferencia **opinião de ciência**, pela impossibilidade de as opiniões estarem vinculadas a um sistema que propicie o raciocínio causal. Aristóteles[5] compartilha a concepção platônica e acrescenta a idéia de o conhecimento científico desenvolver-se a partir do processo demonstrativo.

Historicamente, os critérios de definição de ciência mudam de enfoque. Devemos tomar cuidado em não definir ciência como um conhecimento absoluto, uma vez que modernamente a questão da garantia de absoluta validade do conhecimento científico é descartada. Numa primeira aproximação, podemos tomar as concepções de ciência conforme a garantia de validade que a ela se atribui. A primeira concepção entende que a garantia da validade está na **demonstrabilidade**. A concepção de ciência, tendo como garantia de validade a **descrição**, surge a partir da idéia de síntese das ciências naturais. A concepção mais moderna de ciência inclui a idéia de **autocorrigibilidade**, isto é, a garantia de validade científica encontra-se na dúvida - sustentada pelo método adotado - como proposta básica da evolução da ciência.

É importante distinguir as várias concepções de ciência que historicamente foram surgindo, com níveis distintos de dúvida com respeito aos fenômenos. Elas buscavam respostas e explicações segundo o paradigma de ciência vigente. Então, é oportuno lembrar que:

... a um baixo nível de desenvolvi-

[4] Platão (aproximadamente séc. III a. C.), filósofo grego. Discípulo de Sócrates, deixou registrados os ensinamentos e os diálogos socráticos. Alguns desses diálogos têm grande importância para a Matemática enquanto ciência, como o *Teeteto*, no qual se discutia a questão dos números irracionais. Uma de suas contribuições é a descoberta dos sólidos regulares. Foi o fundador da Academia - um local de estudos aprofundados em Filosofia, Ciências e Matemática. No frontispício da Academia estava inscrita uma frase de alerta aos futuros estudantes, a qual afirmava ser a Geometria a base do conhecimento.

[5] Aristóteles (aproximadamente séc. III a. C.), filósofo grego. Foi discípulo de Platão. Deixou registrados vários estudos importantes que até o dia de hoje são referências fundamentais como, por exemplo, a *Metafísica*. Possui contribuições significativas para a Lógica, Matemática, Filosofia e Ciências Naturais. Na Matemática, discutiu questões extremamente relevantes como a do "infinito em potência", que, na realidade, visava a sistematizar a questão dos irracionais levantada pelos pitagóricos. Uma de suas obras fundamentais é o seu estudo sobre Lógica. O *Organum* é uma coletânea dos trabalhos de Aristóteles relativos à Lógica, feita por Andronico de Rhodes (aproximadamente 200 d. C.). Algumas partes são fragmentos redigidos por discípulos segundo os ensinamentos do mestre. No tocante à Lógica Modal, os fragmentos encontrados são quase ininteligíveis. Aristóteles é considerado por alguns estudiosos como o precursor das diretrizes do sistema lógico utilizado por Euclides, em *Os Elementos*.

mento das forças produtivas serão menores as exigências que se apresentam à ciência e, por conseguinte, esta se desenvolverá mais débil e lentamente (VÁZQUES, 1977, pp. 91-92).

Assim, a ciência, enquanto atividade humana ligada aos povos que antecedem ao período helênico, tanto quanto a história revela, é uma mistura de práticas de origem mística, fundamentada na prática empírica, com conhecimentos oriundos de uma prática "científica" mais racional, da mesma forma que os conhecimentos oriundos na Astrologia fundamentavam os conhecimentos primitivos da Astronomia. As necessidades econômicas da Agrimensura geravam conhecimentos de Geometria tanto quanto a cobrança de impostos fornecia os rudimentos da Aritmética. A necessidade de construir moradias e, posteriormente, cidades implicava o conhecimento de Geometria e de Matemática Aplicada - que então significava os rudimentos da Física -, tornando possível o desenvolvimento de uma Arquitetura pujante como, por exemplo, a babilônica e a egípcia.

Destacamos que a ciência concebida pelos povos pré-helênicos inclui uma unidade sistemática, com base na prática empírica, o que, efetivamente, difere seu saber de um simples agregado de conhecimentos. Essa afirmação se deve ao fato de a prática científica de então originar diferentes concepções, **sistemáticas**, em relação às questões cosmológicas e às questões de origem racional, como, por exemplo, os sistemas de numeração.

Essa ciência - produzida tecnologicamente nos moldes da Idade de Bronze, estruturada por uma sociedade organizada como teocracia e que possui como núcleo fundamental o clã familiar - carece de um rigor lógico, no sentido clássico do termo, impresso a partir do surgimento da sociedade grega. Esse rigor tornar-se-á, desde os gregos, a característica fundamental da Matemática. A Matemática pré-helênica tem como critério básico o aspecto puramente empírico e a marca do utilitarismo, ou seja, é uma ciência ligada ao **fazer** humano.

Para compreendermos a transformação operada pelos gregos na concepção de sociedade e na de ciência é necessário refletir sobre as alterações causadas pela transição da Idade de Bronze para a Idade de Ferro - a tecnologia da fundição desse metal e a conseqüente fabricação de instrumentos e armas de ferro tornam-se fundamentais para a hegemonia da civilização grega. Essa transição é precedida pela criação do alfabeto fonético fenício[6] , pela Astronomia Matemática Babilônica e pelos descobrimentos rudimentares da Matemática e da Geometria Babilônica e

[6] FARRINGTON, B., *A Ciência Grega*, São Paulo, Ibrasa, 1953, p. 8.

Egípcia.

Os indicadores acima expostos permitem explicar a pujança da sociedade grega, da democracia ateniense e do regime da **polis**. A nossa análise explicita a importância dos fatores sociais, econômicos, culturais e políticos na origem da ruptura entre o teórico e o prático, na cultura grega. Essa divisão é sugerida como própria da atividade do conhecimento e, até certo ponto, necessária para a compreensão da idéia de ciência, pois, para Platão[7] , o fazer era uma atividade técnica, enquanto que o planejamento e as idéias sobre o como fazer assumiam características de ciência.

Na Matemática a alteração do objeto básico de estudo surgiu com Euclides de Alexandria (365a.C. -275a.C.), que propõe, em *Os Elementos*, a questão da **demonstrabilidade** como critério científico implícito à Matemática. O salto qualitativo dado por Euclides à Geometria é marcante, pois ele não só registra e aumenta os conhecimentos geométricos anteriores como justifica, por meio da razão, as observações, as regras e as práticas colhidas ao longo de uma lenta série de observações empíricas[8] . A partir dessa alteração, a Matemática passa a ser, em nível científico, tratada como seu próprio objeto.

A obra euclidiana tem como marca fundamental o fato de ser a pioneira no uso do **sistema axiomático**, no qual os **teoremas** são inferidos de determinados ***axiomas*** e **postulados**. É importante salientar a relevância da obra euclidiana como modelo da concepção científica que toma, como critério, **uma garantia de sua própria validade**, com base nos enunciados organizados de forma causal, em que o conhecimento se estrutura de forma unitária e no qual todas as afirmações são fundamentais e necessárias. Essa concepção de ciência está baseada em Platão e em Aristóteles. Nela encontramos que o conhecimento científico difere das opiniões pelo fato de estar vinculado ao raciocínio causal e organizado de acordo com um sistema em que a verdade é decorrência de raciocínios corretos resultantes das premissas.

A Matemática grega torna-se, a partir de Euclides, o melhor exemplo de que a idéia de veracidade científica está ligada à organicidade de um sistema de proposições onde as verdades se unem por uma relação causal, e o critério de verdade é tomado pela sua demonstrabilidade. A Geometria, conforme o modelo euclidiano, passa a ser identificada com

---

[7] "La Ciencia del Teeteto", in. VERA, F., *Cientificos Gregos*, Madrid: Aguilar S. A. de Ediciones, 1970, pp. 200-219.

[8] Para termos uma noção do rigor euclidiano, citamos a proposição 11 do livro I d' *Os Elementos* em que detalhadamente Euclides demonstra como traçar, de um ponto fora de uma reta, uma outra reta que forme com a anterior ângulos retos. A demonstração parte da construção de um triângulo eqüilátero - que na proposição 1 do Livro I havia sido demonstrado ter os lados iguais. Constata que a reta incidente divide o triângulo eqüilátero - construído - em dois triângulos congruentes e, portanto, os ângulos formados pelas duas retas são iguais e, por conseguinte, retos.

o abstrato e o teórico. Ela assume preocupações estilísticas quando, preocupada com a beleza do raciocínio e a exatidão da forma, desliga-se da raiz empírica. A Matemática passa a ter existência independente da realidade sensorial, isto é, é ato de pura abstração, remotamente reflexiva em relação à realidade.

Do século IV até o século XV da nossa era, o conhecimento matemático fica predominantemente ligado ao mundo islâmico, cujo ciclo se inicia com a queda de Alexandria e a criação da Escola de Tradutores de Bagdá. É conveniente ressaltar os estudos aritméticos e algébricos desenvolvidos pelos matemáticos islâmicos, especialmente Al-Khowarizmi e Alhazem. Para avaliar a importância da Matemática islâmica, propomos o estudo da etimologia das palavras "algoritmo" e "álgebra".

Segundo vários autores, as palavras "**algoritmo**" e "**algarismo**" provêm de corruptelas das traduções latinas dos trabalhos de Al-Khowarizmi, pois, na sua *Aritmética*, os parágrafos invariavelmente iniciam-se por "**dixit Algaritmi**", onde "**Algaritmi**" significava o nome do sábio islâmico. Na Península Ibérica, era comum o termo "**guarismo**" para significar número, e, provavelmente, a contração do prefixo árabe "**al**" com "**guarismo**" tenha originado a palavra "**algarismo**".

STRUIK (1989), ao comentar a Matemática do período islâmico, afirma a importância de Al-Khowarizmi e de sua obra para a Matemática, apontando-o como difusor do sistema de numeração hindu e responsável, através de traduções, por um texto sobre "ciência das equações":

> *Este livro foi um dos meios pelos quais a Europa ocidental tomou conhecimento do sistema decimal. O título da tradução,* ***Algorithmi de numero Indorum****, acrescentou o termo algorithmus - uma latinização do nome do autor - à nossa linguagem matemática. Qualquer coisa semelhante aconteceu à álgebra de Muhammad, que tinha o título de Hisab al-jabr wal-mugabala (literalmente, 'ciência da redução e da confrontação' que significa, provavelmente, 'ciência das equações'). Esta álgebra, cujo texto árabe existe, também se tornou conhecida no Ocidente através de traduções latinas e fez que a palavra al-jabr se tornasse sinônima de toda a ciência da 'álgebra', que, de facto, até meados do século XIX, não era mais do que a ciência das equações* (STRUIK, 1989, pp. 121-122).

Podemos afirmar que, dos primórdios da cultura matemática - que, no mundo islâmico, coincidem com a fundação da escola de tradutores de Bagdá e a queda de Alexandria no século IV - até os trabalhos de Omar Khayyam, Nasir al-din e Ibn Al-Haithan, a Matemática Islâmica forneceu ao conhecimento científico de então um avanço significativo, valendo destacar os trabalhos relativos à trigonometria, à questão do postulado das paralelas e à álgebra. Salientamos que, com relação aos contatos da cultura islâmica com o Ocidente, no que toca à Matemática, é grande a importância da influência moura na Espanha - notadamente em Córdova - e dos trabalhos de Leonardo de Pisa, que divulgou muitas das idéias matemáticas dos islâmicos na Europa.

A cultura ocidental, a partir do final do século XV, passa a ser o epicentro do desenvolvimento da Ciência e, em particular, da Matemática. Existem alguns fatores determinantes para que o Renascimento Italiano mereça atenção, pois nesse período nota-se a superação dos métodos científicos até então vigentes. O despertar científico italiano começa com a estética do artista - que volta a contemplar a natureza sob a forma como esta se apresenta - e com a habilidade do artesão - que percebe, de forma profunda, a harmonia da natureza e da representação das leis que regem a realidade.

O artesão Galileu aperfeiçoa o telescópio e, com a sensibilidade do cientista, aponta-o para o céu. Nesse movimento, o cientista percebe que, na observação da natureza, no estudo dos fenômenos e na procura das causas dos mesmos, encontra-se o novo espírito científico que, deslocando-se entre o racional e a experiência, deve buscar a tradução do fenômeno observado em relações matemáticas. Galileu afirma:

Senhor Sarsi, as coisas não se passam assim. A Filosofia está escrita nesse grandíssimo livro que continuamente está aberto diante de nossos olhos (eu digo, o Universo) mas não se pode entender se antes não se aprender a entender a língua e os caracteres em que está escrito. Ele está escrito em língua matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, e sem tais meios é impossível entender humanamente algo a seu respeito; sem eles vaguear-se-á em vão por um obscuro labirinto[9].

Salientamos que as razões básicas do progresso da ciência no Renascimento Italiano devem-se a causas sociais e materiais. As causas econômicas podem ter raiz no desenvolvimento econômico das Cidades-Estado como Milão, Veneza, Florença, Roma e Nápoles, que eram o eixo comercial do Oriente com a Europa. Citamos como fundamental a invenção da imprensa de tipos móveis. Podemos traçar um paralelo entre o alfabeto fonético fenício e a imprensa de tipos móveis na socialização do saber humano, pois, nos dois instantes, há uma libertação do trabalho manual e repetitivo - dos escribas de um lado e dos copiadores dos manuscritos de outro - que

[9] GALILEU, G., Il Saggiatore, **apud** BANFI, A., *Galileu*, Lisboa: Edições 70, 1981, pp. 84-85. [Grifos nossos].

representava, nas duas instâncias, um entrave aos meios de produção científica.

Esse período fundamenta uma nova concepção de procedimento empírico que, sem desprezar as conquistas do conhecimento científico anterior - a fundamentação na demonstrabilidade e, portanto, o caráter dedutivo -, enfatiza a observação e a experimentação, acrescentando a essas o conhecimento matemático que explica e justifica o fenômeno observado. É o modelo racional de ver o mundo. Galileu observa a importância da **demonstração necessária** ao lado da **sensata experiência**. Uma prova da importância que Galileu dá à experiência e à subseqüente matematização pode ser retirada da proposta de método que ele sugere para a análise dos fenômenos observáveis:

> *Destes acidentes de gravidade, de velocidade e também de figura, variáveis como são de inúmeros modos, não pode obter-se conhecimento seguro. Pelo que, para poder tratar cientificamente tal matéria é preciso abstrair deles e, uma vez descobertas e demonstradas as conclusões, as conclusões abstraídas dos impedimentos, servir-se delas, utilizando com as limitações que a experiência nos for ensinando. E a utilidade disto não será pequena, porque dentre as matérias e suas figuras serão escolhidas as menos sujeitas aos impedimentos do meio: quais sejam, as muito pesadas e as redondas, e os espaços e as velocidades na sua maioria não serão tão grandes que os seus excessos não possam com facilidade ser reduzidos a um ponto de referência*[10].

Para Galileu, a ciência liberta o homem do jugo do racionalismo dogmático da metafísica tradicional por meio de um racionalismo metódico, que busca conceituar universalmente as constantes estruturais da experiência e reconhecer a realidade circundante. Essa concepção de ciência traz no seu cerne uma consciência crítica, no modo de ler o mundo. A verdade da nova consciência científica emergente origina uma nova e radical visão de homem, comprometida com a cultura e a liberdade. BANFI explicita:

> *Porque, como disse, a liberdade da consciência científica não se identifica com a liberdade pessoal dos pensadores; é mais radical e poderosa, porquanto depende da sua própria integridade teórica e da sua plenitude humana. A ciência nova revela, como disse, uma nova dimensão do saber* (BANFI, 1981, p. 54)

As antigas formas feudais começam a ruir diante do desvelar de uma

[10] GALILEU, G., "Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze", **apud** BANFI, A., *Galileu*, Lisboa: Edições 70, 1981, p. 87. [Grifos nossos].

nova realidade social, provocada pela concepção de universo contida na percepção de Leonardo da Vinci, nas polêmicas de Galileu, no racionalismo de Descartes e no "relógio" de Newton. A concepção de ciência que se instala a partir de então revela-se revolucionária e polêmica. O antigo sistema feudalista começa a sossobrar. A nova concepção de universo - oriunda das polêmicas de Galileu sobre o heliocentrismo, acrescida da dúvida sistemática de Descartes e matematizada por Newton - origina e fundamenta os ideais da burguesia revolucionária. O modelo científico de ver o mundo tem, pois, a perspectiva humanista com origem no Renascimento Italiano.

No final do século XVIII, na Inglaterra, com o surgimento da Revolução Industrial - feita de inventos como, por exemplo, o ferro fundido com o carvão, a máquina a vapor e o sistema fabril -, alteram-se as formas de produção material e econômica até então vigentes. A ciência possível antes da invenção da máquina a vapor difere, na essência, da que virá posteriormente, pois modificam-se os meios de produção.

A alteração fundamental é que a ciência passa a se encaixar como força produtiva, isto é, entra no amplo espectro do sistema capitalista, que visa ao lucro. A ciência produz o artefato (a máquina), que se integra no itinerário do sistema produtivo para o qual ela, a máquina, funciona[11] . A esse respeito, afirma GIANNOTTI:

> *Se o trabalho do artesão inspira uma teoria, no caso da máquina automática é a teoria que produz um objeto totalmente inédito. No primeiro exemplo, uma representação antecipa o produto e norteia a ação concreta do trabalhador; no segundo, as representações subjetivas e individuais, tanto do fabricante operário como daquele que utiliza o autômato, são transpassadas, de um lado, pela planta da máquina, de outro, pelo itinerário do sistema produtivo, no qual ela se integra e para o qual ela funciona* (GIANOTTI, 1985, p. 60).

A ciência produzida a partir da sociedade capitalista emergente herda um dos pressupostos básicos do capitalismo, ou seja, o simbolismo nas relações abstratas de seus fundamentos: de um lado, moeda, circulação, propriedade e preço; de outro, linguagem, símbolos e estruturas. O simbolismo tem como fundamento a substituição da realidade objetiva por estruturas mentais que passam a reger, de forma concreta, as relações entre os objetos e as pessoas. Em uma primeira aproximação, a Matemática passa a ser encarada não mais como uma **ciência da quantidade** mas como uma **ciência das relações** ou como uma **ciência do possível**; isto é, a Matemática passa a ser enfocada como uma ciência essencialmente abstrata e, vale dizer, como um conhecimento onde se privilegia a forma em relação à substância matemática.

---

[11] GIANNOTTI, J. A., *Filosofia Miúda*, São Paulo: Editora Brasiliense S. A, 1985, p. 60.

O simbolismo presente na ciência está também presente nas relações de produção da sociedade capitalista. O material simbólico existente nas mais variadas ciências tem raiz tanto na Matemática como na sociedade que a produz. As conquistas a que o mundo assiste, a partir dos séculos XVIII e XIX no campo da Matemática, explicitam esse fato de forma inequívoca. Como exemplo claro do nível abstrato atingido nesse período pela Matemática, a partir de 1836, temos a revolução do conceito de espaço, provocada pelo surgimento das Geometrias Não-Euclidianas. BOYER comenta esse fato, apontando[12]:

> *Foi sugestão de Riemann o estudo geral de espaços métricos com curvatura e não o caso especial da geometria sobre a esfera, que mais tarde tornou possível a teoria geral da relatividade* (BOYER, 1974, p.399).

A ciência - aliada à tecnologia e em conjunto com o capital - busca uma produtividade maior do sistema econômico, o que interessa ao modo de produção vigente, que, por sua vez, financia as pesquisas científicas. O século XX torna-se, então, o período histórico em que se produz uma quantidade de máquinas e fábricas sem comparação possível com os períodos anteriores.

Assim, na Matemática do século XX, destacam-se basicamente três tendências distintas: o Logicismo, com Frege, Zermelo e Russell; o Intuicionismo, com Brower, Heyting e Weyl; o Formalismo, com Hilbert.

A característica básica do Logicismo está em reduzir a Matemática à Lógica e, por conseqüência, considerá-la uma forma de linguagem em que todas as proposições são da forma $p \rightarrow q$.

Esta posição leva a Lógica a considerar os cálculos matemáticos um tipo particular de cálculos lógicos. A Matemática passa a ser tratada como uma linguagem lógica, ou melhor, um tipo especial de linguagem lógica.

A característica fundamental do Intuicionismo é a do construtivismo matemático, ou seja, a Matemática passa a ser considerada como a ciência que tem por objeto a construtibilidade, isto é, a ciência dos processos construtivos. Isto nos leva a uma ciência em que as conclusões não devem ser derivadas das regras fixas contidas em um sistema formalizado, mas cada conclusão deve, necessariamente, ser controlada com base em sua própria evidência, enquanto processo de construção dos conceitos. Como decorrência desse fato, por

[12] Para melhor explicitar o nível abstrato e simbólico atingido na Matemática com o advento das Geometrias Não-Euclidianas localizamos, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer pode ser maior, menor ou igual a 180° dependendo de que geometria tenhamos como referencial teórico. Um estudo interessante desse fato é trabalhado em: DAVIS, P. J., & HERSH, R., *A Experiência Matemática*, Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves S. A., 1985, pp. 250-256.

exemplo, um princípio como o do infinito existente em "ato" é desconsiderado, tomando-se somente o infinito em "potência". Essa proposta tem raiz na cultura grega, pois o infinito existente só em potência remete-nos às questões centrais do método de exaustão criado por Eudóxio e aperfeiçoado por Arquimedes, em contraponto aos paradoxos de Zenão de Elea. Outra idéia norteadora do Intuicionismo é a não inclusão, em sua Lógica, do princípio do terceiro excluído.

É importante salientar que a proposta intuicionista, ao enfatizar o construtivismo, não está fazendo um apelo às atividades sensoriais, mas sim à intuição - tomada como a apreensão, pelo espírito, daquilo (teoria matemática) que ele próprio construiu - e à construção das demonstrações matemáticas.

A proposta formalista encaminha-nos a uma concepção de Matemática como a ciência cuja única restrição se fundamenta na ausência de contradição. Assim, a Matemática não é parte da Lógica nem a pressupõe, isto é, a Matemática pode ser construída como um cálculo sem exigir interpretação alguma. A proposta formalista indica a Matemática como um sistema autônomo, isto é, que não tem limitações fora de si mesma e que se desenvolve em todas as direções possíveis. O termo **possível**, dentro do Formalismo, significa **caminhos que não conduzem a contradições**.

Podemos distinguir três etapas distintas na proposta formalista. A primeira é a axiomatização das teorias lógico-matemáticas, como a concebida por Hilbert. A segunda é a formalização das axiomáticas obtidas, ou seja, é a substituição dos conceitos primitivos, dos postulados, dos conectivos lógicos e dos princípios lógicos por símbolos e arranjos simbólicos. E, por último, a terceira é a demonstração da consistência das axiomáticas formalizadas, procurando evidenciar que nelas não ocorrem contradições.

A análise até aqui desenvolvida sobre a evolução do conhecimento científico e, em particular, matemático, desde seus primórdios até nossos dias, torna-se de fundamental importância em nossa proposta de compreensão dos fatos relativos à Educação Matemática na atualidade. É importante compreender que, historicamente, como não houve somente uma forma de fazer Matemática e, por conseguinte, de ensiná-la, essa questão fica em aberto, na medida em que as tendências atuais do ensino e da pesquisa em Matemática buscam, respectivamente, soluções tanto para a aprendizagem da Matemática como para os fundamentos dela.

Salientamos o fato de que os computadores, e esse é só um exemplo, revolucionam os métodos de pesquisa em Matemática Aplicada e adentram os problemas de Matemática Pura de forma insofismável. Na Educação Matemática, os computadores revolucionam, por exemplo, na medida em que existem propostas de ensino como a Modelação

(Modelagem em Educação), a linguagem "LOGO" e outros aplicativos como o CAPRI, criando novas e intrigantes possibilidades para a Educação Matemática.

Como vimos, a ciência matemática no século XX torna-se a forma mais elaborada, até então conhecida, de uma linguagem simbólica que, através de teoremas, corolários e lemas, serve como paradigma a outras estruturas abstratas simbolicamente representadas. O alto teor de abstração e simbolismo afastam, por decorrência, a realidade e sua complexidade social das preocupações que movem a pesquisa na Matemática.

Nesse contexto, encontramos a humanidade com uma crença muito forte no poder ilimitado da ciência e, em particular, nas estruturas matemáticas e nos sistemas lógicos. A posição de destaque está evidentemente presa a crenças em nível de senso comum, segundo as quais, sendo a Matemática uma "linguagem simbólica" e, portanto, exata, não permite contradições. A Matemática passa a ser encarada, em nível popular, como "Linguagem das Ciências" e, em nível educacional, como uma das possibilidades lingüísticas, tanto quanto a Lógica o é para os lógicos e os matemáticos. Essa concepção de Matemática tem implicações pedagógicas: uma delas é constituída pela eliminação do fator sócio-cultural da clientela escolar, através do argumento de que a Matemática é uma linguagem universal e, portanto, neutra.

A preocupação com a abstração e a análise de estruturas amplas torna-se crescente na Matemática do século XX. Exemplo dessa preocupação e nova concepção - com forte influência na Educação Matemática - é encontrado na obra do grupo Bourbaki, um dos pilares do movimento de **Matemática Moderna**. BOYER explicita claramente essa concepção quando, ao comentar a obra do grupo Bourbaki, *Éléments des Mathématiques*, observa que: ***a apresentação dos assuntos é feita de forma secamente abstrata e geral que retrata claramente a estrutura lógica*** (BOYER, 1974, p. 285).

Na análise da evolução do conhecimento matemático, buscamos o relacionamento entre a sociedade e a Matemática. Ao intervir na natureza e ao produzir o seu meio de vida, o homem difere dos animais na intencionalidade de suas ações. Nessa perspectiva, ao intervir na realidade concreta, a práxis humana caracteriza-se pela elaboração de **constructos**, determinados pelo modo de produção vigente, ou seja, a Matemática produzida pelos gregos não é igual à Matemática elaborada no século XVIII por Newton. A atividade empírica - presente nos trabalhos dos egípcios, babilônicos e gregos - vai sendo aos poucos substituída pelas atividades abstratas como as propostas pelo Formalismo, Logicismo e Intuicionismo. Parece-nos evidente que essas questões influenciam fortemente tanto a produção científica da Matemática como as concepções em Educação Matemática.

Os Sensos Matemáticos e os Constructos Reflexivos: Uma Abordagem Teórica

As considerações expostas levam à comprovação da existência dos **sensos matemáticos**, enquanto organizadores das práticas matemáticas do homem. Assim, nessa etapa, fica clara a existência dos **senso de ordenação, senso de classificação, senso de seriação e senso de quantificação**, enquanto elementos significativos no surgimento do processo racional de interpretação da natureza. Esse procedimento relacional permitiu ao homem a criação de mecanismos de ordem simbólica que sugerem o surgimento dos processos de abstração.

A esses procedimentos de ordem relacional acrescentamos a interação da **evidência** com a **ideação**, fundamental no aparecimento da **argumentação** como etapa importante na construção matemática. A **evidência** está intimamente ligada à **experiência**, pois as práticas sugerem a existência de uma argumentação que explicite o porquê de uma ação ser mais efetiva do que outra, isto é, a transição do sensorial ao conhecimento sugere a necessidade de um processo intelectual do sujeito sobre a experiência, de forma a integrar o real e o conhecimento do homem no procedimento relacional.

O conhecimento de origem empírica era de certa forma comum a todos os povos da antigüidade, pelas razões anteriormente expostas. A identificação do núcleo sadio desses conhecimentos implicava a necessidade de uma seleção dos procedimentos mais usuais e corretos - no sentido de dar conta dos fenômenos da realidade - e uma sistematização que permitisse um aprofundamento e uma generalização de ordem relacional e simbólica com o real. KOPNIN[13] aponta que o pensamento humano sempre opera com a imagem ideal do objeto e não com o próprio objeto. Nesse contexto, o movimento vai do mais simples ao complexo, da realidade à sua essência, ou seja, o mais simples - caracterizado como a imagem simbólica do real - busca dar conta do complexo - caracterizado como a realidade em suas múltiplas determinações - por meio de um processo reflexivo do conhecimento.

A **argumentação** surge como o primeiro momento em que o homem reflete criativamente sobre sua prática, aproximando-se, assim, de uma leitura mais crítica do real. Essa etapa torna clara a necessidade do homem de estabelecer um conjunto de provas, ainda estreitamente ligadas à **experiência**, que dêem conta do movimento dos fenômenos na natureza. Essa **argumentação** é, inici-

[13] KOPNIN, P. V., *A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento*, Rio de Janeiro, Editora Civilização Brasileira S. A., 1978, pp. 126-128.

almente, uma explicação fundamentada nos dados históricos e sensoriais que lentamente vai sendo substituída por outras justificativas, baseadas na abstração gerada pelos processos mentais que utilizam imagens do real, isto é, símbolos que representam a realidade. Essa atitude pretende a sistematização, ainda que primitiva, da experiência e da prática social e é objetivamente o grande passo rumo à internalização de processos cognitivos superiores.

A **argumentação** é favorecida pelo movimento dos **sensos matemáticos**, que fornecem um primeiro modelo de explicação dos fenômenos existentes na realidade, através dos procedimentos simbólicos emergentes. Objetivamente, nessa etapa surgem as primeiras representações do real e o homem passa a trabalhar com imagens e símbolos, isto é, surge a necessidade de um modelo que dê conta do real e de seus movimentos. Nesse instante, ficam evidenciados não só a existência do **senso crítico, senso do relativo, senso de precisão** como também o despertar do **senso cinético-espacial**. Esses sensos pretendem dar conta das capacidades de: julgar com objetividade; avaliar, com ponderação, o excesso e a insuficiência; estimar quantidades o mais precisamente possível e incentivar as percepções ordenadas de espaço e de tempo.

O momento seguinte busca a interação da **intuição** com a **ideação reflexiva** como o processo pelo qual surge uma estrutura cognitiva orgânica e organizada. Esse processo interativo sugere que a estrutura cognitiva do homem organiza o conhecimento gerado nas etapas anteriores por meio dos procedimentos reflexivos dessa estrutura em relação ao real. É o momento em que, segundo LEFEBVRE, processa-se o movimento em espiral: ***... o retorno acima do superado para dominá-lo e aprofundá-lo, para elevá-lo de nível libertando-o de seus limites (de sua unilateralidade)*** (LEFEBVRE, 1983, p.241).

Essa superação e esse aprofundamento do conhecimento só se tornam possíveis quando o homem, reconhecendo que o conhecimento tem origem prática, retorna a ela mediante a reflexão, eliminando a dicotomia entre a teoria e a prática pela incorporação das duas em um nível superior do conhecimento. A interação da **intuição** com a **ideação reflexiva** deve ser tomada como o momento da junção de conhecimentos dispersos anteriormente em um saber organizado a partir da percepção do todo e das partes, do relacional e das demonstrações, segundo um método. Essa interação sugere a criação de um modelo de interpretação do real, a partir de um corpo de conhecimentos organizados, passíveis de demonstração e de validação na realidade, ou seja, sugere a criação de modelos matemáticos que dêem conta da explicação dos fenômenos e de sua própria validade.

Para a criação desses modelos, surgem como necessários o **senso de precisão**, o **senso de organização**, o **senso de rigor** e o **senso cinético-espacial**. A percepção dos dados espaciais, o rigor na coleta de informações sobre os fenômenos, a organização dos fatos e dos conhecimentos e a precisão da descrição da realidade são os fundamentos exigidos a qualquer modelo de interpretação do real, de Copérnico a Einstein, de Euclides a Lobatcheviski, de Arquimedes a Newton.

Na última etapa, aquela que une o movimento da prática social ao modelo - passando pela argumentação - utilizamos a interação da **totalidade** e da **ideação reflexiva**.

Quando unimos a **totalidade** e a **ideação reflexiva**, buscamos explicar o movimento dentro do real no qual o homem, partindo da prática, vai se encaminhando para procedimentos intelectuais cada vez mais poderosos, para dar conta da imensa rede de fenômenos da realidade circundante. Os sensos matemáticos presentes nesse momento do processo de construção da Matemática caracterizam-se por um refinamento dos sensos empregados em experiências anteriores, como: **senso de ordenação, senso de classificação, senso de seriação, senso de quantificação, senso crítico, senso do relativo, senso de precisão, senso cinético-espacial, senso de organização e senso de rigor.**

A reflexão de cunho histórico-crítico quanto à construção do conhecimento matemático pelo homem foi por nós elaborada com fundamento nos indicadores fornecidos pela ideação reflexiva e pelas categorias do conhecimento matemático. É conveniente ressaltar que procuramos mostrar como o homem se apropria do conhecimento ao longo da história e como surge o processo de criação da Matemática através da evolução do conhecimento. Para o exame dessa teia de relações, propusemos um estudo dos condicionantes sócio-culturais que determinam as estruturas vigentes na sociedade, na medida em que o saber é socialmente produzido, isto é, tem origem coletiva, e não individual. A influência do fator sócio-cultural é apontada por VYGOTSKY da seguinte forma :

> *Se incluirmos essa história das funções psicológicas superiores como fator de desenvolvimento psicológico, certamente chegaremos a uma nova concepção sobre o próprio processo de desenvolvimento. Podem-se distinguir,* dentro *de um processo geral de desenvolvimento, duas linhas qualitativamente diferentes de desenvolvimento, diferindo quanto à origem: de um lado, os processos elementares, que são de origem biológica; de outro, as funções psicológicas superiores, de origem sócio-cultural* (VYGOTSKY, 1989, p.52).

Com esses paradigmas científicos da evolução do conhecimento, procuramos cunhar a expressão **constructo**

reflexivo para significar a construção social do conhecimento, dialeticamente concebido como superação da relação sujeito-cognoscente e realidade. O constructo reflexivo matemático tem uma raiz historicamente concebida com base nas relações entre a ideação reflexiva e as categorias do conhecimento matemático, que tornam o homem consciente de sua possibilidade histórica - e, portanto, dependente da educação como possibilidade cultural de reafirmação social - e que criam estruturas lógicas na mente humana, por meio da ação intencional do homem no meio físico. O reconhecimento dos fatores culturais e sociais torna-se uma evidência através dos mecanismos que operam a criação da fala e dos instrumentos de percepção do mundo.

> A história do comportamento da criança nasce do entrelaçamento dessas duas linhas. *A história do desenvolvimento das funções psicológicas superiores seria impossível sem um estudo de sua pré-história, de suas raízes biológicas, e de seu arranjo orgânico. As raízes do desenvolvimento de duas formas fundamentais, culturais, de comportamento surgem durante a infância: o uso de instrumentos e a fala humana. Isso, por si só, coloca a infância no centro da pré-história do desenvolvimento cultural* (VYGOTSKY, 1989, p.52).

Nesse contexto, o **constructo reflexivo** significa, então, em primeira aproximação, o modo pelo qual o homem cria a estrutura cognitiva a partir do movimento dos **sensos matemáticos**. Essa construção do conhecimento pelo sujeito possui determinantes culturais, sociais e econômicos e é condicionada pela atividade prática na realidade objetiva. O modelo teórico dos **constructos reflexivos** busca desvelar como o homem toma consciência da rede de fenômenos que a realidade lhe apresenta na multiplicidade de fatores que a constituem. A ação intencional do sujeito na realidade sofre reflexivamente a ação condicionante da totalidade concreta[14].

Na formação de um conhecimento, o ato intencional da aprendizagem é permeado por fatores sociais, culturais, econômicos e políticos, sendo, portanto, determinado ideologicamente. Nesse contexto, o **constructo reflexivo** supera a dicotomia da relação sujeito/realidade na medida em que o homem, reconhecendo-se produto social, insere-se historicamente na sociedade.

A vinculação entre o pensamento e a realidade tenta superar a divisão entre o teórico e prático através da intencionalidade do sujeito na procura do desvelar da realidade e na procura de

[14] KOSIK, K., *Dialética do Concreto*, Rio de Janeiro, Editora Paz e Terra S.A., 1976. O conceito de totalidade concreta é trabalhado de maneira análoga ao de realidade concreta.

modelos teóricos, cada vez mais refinados, que dêem conta da rede de fenômenos proposta pelo real. Podemos, pois, afirmar que os **constructos reflexivos** constituem um modelo teórico inicial que busca revelar como o homem, mediante suas ações intencionais sobre a realidade, cria a possibilidade da existência do conhecimento.

Os **constructos reflexivos** pretendem dar conta dos procedimentos pelos quais o ser humano aprende com base na prática. Pretende também desvelar as formas como se estabelecem as transferências dos conhecimentos de ordem empírica aos de ordem cognitiva. Não se trata de separar o homem do mundo, mas de uni-los, pois são os **constructos reflexivos** os organizadores das formas empíricas e teóricas existentes no conhecimento dos processos da natureza e da sociedade, tal e qual existem no real.

Os **constructos reflexivos matemáticos** constituem um modelo e, portanto, uma redução que busca abranger a totalidade dos fenômenos e processos sensorialmente perceptíveis que existem no ato de criação da Matemática e de sua aprendizagem. Esse modelo pretende representar e refletir, de forma organizada e concreta, a totalidade de fenômenos existentes na Educação Matemática.

Os **constructos reflexivos matemáticos** têm sua estrutura básica apoiada nas categorias do conhecimento matemático, que podem, em primeiro lugar, considerar **a unidade entre o lógico e o histórico**[15], procurando revelar, de forma sucinta e generalizada, a gênese e a evolução da história do pensamento matemático. Em segundo lugar, considerar que o movimento se processa **do simples ao complexo, do abstrato ao concreto**, isto é, tomar o pensamento como um movimento da **coisa em si** - simples, amorfa e imediata - para a rede complexa de relações, buscando um aprofundamento na realidade concreta. Em terceiro, considerar que todas as categorias têm origem no real, na prática humana, no mundo objetivo, isto é, considerar a origem de todas as categorias com base nas inter-relações do sujeito e do objeto, relações essas que têm na experiência, no sensorial, a base de percepção. Em quarto lugar, reconhecer que as categorias são reflexos da realidade sob a forma de abstrações[16].

Pretendemos, então, dar conta do movimento de transformações qualitativas na realidade, por meio da prática social do homem que, com base na ideação reflexiva e nos constructos reflexivos, procura refletir criativamente a realidade, mediante a criação de modelos interpretativos que impulsionam a descoberta científica e criam condições para a relação de dependência da Matemática com a prática social originada na sociedade.

---

[15] KOPNIN, P. V., op. cit., p. 107.

[16] SOUZA, A. C. C., *Matemática e Sociedade: Um Estudo das Categorias do Conhecimento Matemático*. Campinas: FE/UNICAMP, Dissertação de Mestrado, 1986, p. 69.

O cérebro do homem, através de algoritmos e modelos simbólicos, propõe a representação do real e da multiplicidade de fenômenos propostos pela realidade. Os **constructos reflexivos matemáticos** desvelam como o conhecimento humano cria níveis de consciência diante da rede de fenômenos que o homem tem diante de si. A redução simbólica do real torna-se, então, o motor pelo qual o ser humano pretende um movimento de aproximação sucessiva da realidade em suas múltiplas determinações.

A articulação entre os **constructos reflexivos** contém um alto grau de elaboração, abrangendo o empírico e o teórico, as categorias do conhecimento matemático e as abstrações de ordem puramente cognitivas, as partes e a totalidade. Essa elaboração gera transformações de ordem qualitativa, nas quais, pelo movimento dos **sensos matemáticos**, o complexo gera o abstrato que, por sua vez, explica o complexo e é por ele explicado, com base no movimento de **teorização**.

A análise do exposto revela como o homem, enquanto ser social, tem uma **prática social** no real, a qual objetivamente o conduz a uma **argumentação** sobre essa prática; com isso, ele cria uma aproximação inicial com o real, procurando resolver os problemas propostos pela prática, no sentido lógico-matemático do termo. Esse movimento em direção à Matemática incorpora de uma forma objetiva os dados culturais, sociais e econômicos e recebe o nome de **senso matemático**. O movimento seguinte, o da **teorização**, dirige-se da Matemática à Sociedade. Após a formação de uma argumentação lógica, primitiva e inicial, com base no movimento dos **sensos matemáticos**, o sujeito, com a utilização da estrutura cognitiva, constrói um **algoritmo** - muitas vezes rudimentar - que sugere um **modelo** matemático de intervenção na realidade. Este **modelo**, criado inicialmente *ad hoc*, evolui para uma prática matemática aceita, após um refinamento provocado não só pela freqüência do uso mas pela necessidade de responder a várias situações, quando o modelo inicial não dá conta dos problemas propostos pelo real, obrigando, então, a estrutura inicial do modelo a dar saltos qualitativos. Verificamos, então, que, em relação à Matemática, o **constructo reflexivo** possui dois movimentos : o *senso matemático* e a *teorização*.

O **senso matemático** constitui o momento de apropriação do saber matemático pelo sujeito, partindo da prática empírica na realidade concreta. Quanto a esse aspecto, é fundamental a percepção de como determinadas populações produzem o saber matemático, tendo como ponto de partida sua prática social. O movimento dos **sensos matemáticos** e sua importância na criação de **constructos reflexivos** cada vez mais poderosos, pode ser exemplificado, como vimos anteriormente, pela criação da idéia de número e pelo refinamento que essa idéia sofreu ao longo dos séculos. A evolução da idéia de número - que segundo a fábula matemática iniciou-se na contagem que o pastor efetuava para conhecer a quantidade de ovelhas que possuía, até chegar à conquista da continuidade numérica em 1872, pela Lei do Corte atribuída a Cantor-Dedekind -, durou alguns milênios. Nesse período, o conceito de número sofreu refinamentos originados inicialmente por problemas propostos pela prática empírica e, posteriormente, pela prática intelectual. Assim, o conceito de número, por sua evolução histórica, apresenta-se como um excelente paradigma a ser estudado.

GERDES aponta a importância dos fatores sócio-culturais na Educação Matemática ao comentar:

> *O conhecimento das expressões matemáticas, das capacidades criativas do povo moçambicano no passado e doutros povos outrora colonizados é um pressuposto necessário para a confiança nas possibilidades matemáticas destes povos no futuro. Ao mesmo tempo este conhecimento reforça a **auto-confiança social**: sabendo que os antepassados - colectores, caçadores, pastores e camponeses - eram capazes de pensar matematicamente, também agora os filhos de camponeses e operários são capazes de se apropriarem da Matemática e desenvolve-la criadoramente* (GERDES, 1986, p.14, grifos do autor).

As relações entre os **sensos matemáticos** e as propostas da Modelagem e da Etnomatemática ficam de certa forma explicitadas no momento em que tomamos como básicas na Educação Matemática as idéias de retomada dos princípios culturais e sociais dos grupos diferenciados que constituem nossa sociedade, aliadas à necessidade de retomarmos, na Educação Matemática, a possibilidade empírica ligada à necessária matematização dessa possibilidade.

Dessa forma, da Etnomatemática tomamos os princípios sócio-culturais abrangentes como os expressos por D'AMBROSIO[17] e GERDES; da Modelagem tomamos os fundamentos empíricos e analíticos, como os propostos por BASSANEZI[18], quando aponta a importância da experiência e da matematização de uma dada situação do real como o fundamento pedagógico para a Educação Matemática. Assim, a Modelagem busca a interpretação do real através do instrumental matemático e, simultaneamente, o real é utilizado para a validação dos modelos matemáticos. Nessa concepção

[17] D'AMBROSIO, U., *Etnomatemática*, São Paulo, Editora Ática, 1990. D'Ambrósio explicita como o conhecimento tem origem na ação que o sujeito tem sobre a realidade e como essa realidade interfere no pensamento do sujeito cognoscente no ato de aprender. Em particular, oferece, como ponto central, a influência que uma dada cultura tem sobre a criação dos "mentefatos" e "artefatos".

[18] BASSANEZI, R. C., "Modelagem Matemática como Metodologia de Ensino de Matemática", in: *Actas De La Sétima CIAEM*, San Domingos, Enseñanza Científica y Tecnológica, Coleccion de Documentos, nº 37, 1990.

de modelagem, a ciência é entendida como "a sensata experiência" acompanhada pela "mate-matização necessária", uma proposta muito próxima de ciência como a concebida por Galileu.

Os **sensos matemáticos** apontam para uma proposta em Educação Matemática na qual os fundamentos básicos da pedagogia localizam-se na prática humana; assim, o enquadramento da educação é a questão sócio-cultural. Assim também, o surgimento da **argumentação** coincide com o início do raciocínio matemático que vai estender-se ao **algoritmo** e ao **modelo**, pelo movimento de **teorização**. Essa proposta tem, então, nos **sensos matemáticos**, fundamentos muito próximos da Etnomatemática e, na **teorização**, princípios teóricos que sugerem uma aproximação com a Modelagem Matemática.

BIBLIOGRAFIA

ARQUIMEDES. *El Metodo*. Madrid: Alianza, 1986.

BALDINO, R.R. A Ética de Uma Definição Circular de Número Real. in: *BOLEMA*, Rio Claro, n. 9, ano 9, 1994.

BANFI, A. *Galileu*. Lisboa: Edições 70, 1981.

BASSANEZI, R. C. *Modelagem como Metodologia de Ensino de Matemática*. Campinas, IMECC-UNICAMP, xerox, s/d.

____. Modelagem Matemática como Metodologia do Ensino de Matemática. In: *ACTAS DE LA SÉTIMA CIAEM*, San Domingo, Enseñanza Científica y Tecnólógica, Coleccion de Documentos, nº 37, 1990.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1981.

D'AMBROSIO, U. Culture, Cognition and Science Learning. In: *Inter-American Seminar on Science Education*, Report, Panamá, 1984.

____. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1990.

____. Mathematics and Society: Some Historical Considerations and Pedagogical Implications. In: *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, v. 11, n. 4, pp. 479-488, 1980.

DAVIS, P. J., e HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

FARRINGTON, B. *A Ciência Grega*. São Paulo: Ibrasa, 1953.

GERDES, P. *Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico, Dresden*, Instituto Superior Pedagógico "Karl Wilhelm Wander", 1986. (Tese de Doutorado).

GIANNOTTI, J. A. *Filosofia Miúda*. São Paulo: Brasiliense, 1985.

GONSETH, F. *Philosophie Mathématique*. Paris: Librairie Scientifique

Hermann, 1939.

KARSON, P. *A Magia dos Números.* Porto Alegre: Globo, 1961.

KNEALE, W., & KNEALE, M. *O Desenvolvimento da Lógica.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980.

KOPNIN, P. V. *A Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira., 1978.

KOSIK, K. *Dialética do Concreto.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LEFEBVRE, H. *Lógica Formal/Lógica Dialética.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1983.

LINTZ, R. G., *História da Matemática,* Campinas, mimeografado, s.d.

PIAGET, J. *Recherches Sur L' Abstraction Réfléchissante.* Paris: Presses Universitaires de France, 1977.

PIAGET, J., & INHELDER, B. *Gênese das Estruturas Lógicas Elementares.* Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. *The Child's Conception of Geometry.* New York: Harper Torchbooks, 1964.

____. *A Gênese do Número na Criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PIAGET, J. et al, *La Enseñanza de las Matematicas.* Madrid: Aguilar, 1968.

PINTO, A. V. *Ciência e Existência.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

SOUZA, A. C. C. *Matemática e Sociedade: Um Estudo das Categorias do Conhecimento Matemático,* Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 1986. (Dissertação de Mestrado).

____. *Sensos Matemáticos: Uma Abordagem Externalista da Matemática.* Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP, 1992 (Tese de Doutorado).

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1989.

UCHÔA, A. M. R. *A Constituição do Sujeito por Reconstrução Endógena das Interações: Um Estudo Sobre a Abstração Reflexiva.* São Paulo, SP: Instituto de Psicologia da USP, 1988. (Dissertação de Mestrado).

VÁZQUEZ, A. S. *Filosofia da Práxis.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977.

VERA, F. *Cientificos Gregos.* Madrid: Aguilar, 1970.

VYGOTSKY, L. S. *A Formação Social da Mente.* São Paulo: Martins Fontes Editora, 1989.

____. *Pensamento e Linguagem.* São Paulo: Martins Fontes, 1989.