

A REPRESENTAÇÃO DOS CORPOS REDONDOS NO ENSINO DA GEOMETRIA

Luiz Carlos Pais*

Este artigo tem sua origem nos trabalhos do Grupo de Pesquisa sobre o Ensino de Geometria do IREM de Montpellier. Esta equipe é coordenada pelo Professor Gérard AUDIBERT e composta por cerca de quinze professores envolvidos na pesquisa em Didática da Matemática. Um certo número de experiências realizadas por este grupo constatou que o ensino e a aprendizagem da geometria euclidiana e espacial são inseparáveis do desenho. O desenho e mais particularmente o desenho preciso feito com o uso de instrumentos desempenha um papel importante na aprendizagem geométrica, sobretudo na resolução de problemas. Foi a partir desta perspectiva que se desenvolveu a idéia de reservar, ao longo de todo o ensino do primeiro e segundo graus, a possibilidade de uma utilização mais diferenciada do recurso gráfico em que consiste o desenho geométrico. Nesta utilização pode-se destacar, de início, pelo menos duas dificuldades maiores por parte dos alunos: a leitura do desenho em perspectiva e a sua própria produção

representando um objeto do espaço.

É neste contexto de valorização do desenho para o ensino da geometria que o objetivo principal deste artigo é analisar a representação plana dos corpos redondos: cilindro, esfera e o cone no ensino de geometria ao nível de primeiro e segundo graus. A presença destes conceitos nos programas escolares implica, necessariamente, uma análise didática desta questão da representação plana que certamente tem conseqüências imediatas para o processo de aprendizagem. Analisamos esta problemática segundo três aspectos que nos parecem os mais fundamentais: algumas questões teóricas sobre o próprio processo de representação do espaço geométrico; os desenhos apresentados nos livros didáticos e as variáveis intervenientes na representação estruturada pelo aluno numa situação *a priori* de uma aprendizagem formal.

1. Representação do Espaço

No processo de representação

* Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Doutor em Didática da Matemática pela Universidade de Montpellier, França.

plana do espaço tridimensional distinguimos quatro elementos fundamentais que intervêm fortemente na aprendizagem da geometria. Trata-se do objeto, do desenho, da imagem mental e do conceito. Cada um destes elementos exerce uma influência considerável na representação do espaço. Nosso objetivo é descrever algumas observações didáticas que visam a contribuir para a análise da função destes elementos no processo de ensino e aprendizagem da geometria. De início, cabe salientar que, numa visão talvez platônica, o objeto, o desenho e a imagem mental podem ser considerados como diferentes formas de representações do conceito. Entre essas três formas de representações haveria uma ordem crescente de complexidade do ponto de vista operacional.

O objeto e o desenho que têm natureza essencialmente material são aqueles elementos mais acessíveis à manipulação dos alunos e por isso mesmo mais conformes ao aspecto experimental do conhecimento geométrico. Por outro lado, a imagem mental e o conceito, por terem uma natureza completamente abstrata, constituem elementos cujo domínio, por parte do aluno, é sensivelmente mais complexo do ponto de vista didático. Dentro de uma outra ótica, o conceito se refere, especialmente, ao aspecto racional do conhecimento. Um conceito geométrico está geralmente associado a outros conceitos mais fundamentais em

relação ao suporte teórico que se considera num determinado estágio da aprendizagem. O conceito de cubo, por exemplo, está associado, entre outros, aos conceitos de quadrado, ângulo e paralelismo.

Uma das características mais importantes do conceito, segundo o ponto de vista didático, é aquela de considerar que as idéias intervenientes no processo de sua formação devem estar constantemente num estado de trocas e evoluções. No processo de aprendizagem o conceito não pode ser concebido como algo estático e acabado. A propósito deste aspecto do conceito, GONSETH F. (1936), em suas pesquisas sobre o método axiomático, observou que o conceito fixado de uma vez por todas deve sempre ceder lugar ao conceito em devenir. É exatamente esta nova maneira de interpretar o conceito que nos leva a considerar, no processo de ensino e aprendizagem, a existência de estágios sucessivos no processo de aquisição do conhecimento teórico.

No que se refere à *imagem mental* como um dos elementos que interferem fortemente na representação do espaço, é importante lembrar que, antes de tudo, a própria expressão "imagem mental" encontra-se quase sempre presente no ensino da geometria espacial. Mas o sentido preciso desta expressão e sua função na representação do espaço estão ainda longe de serem elucidados do ponto de vista didático.

Se recorrermos à psicologia cognitiva, vemos que DENIS M. (1989) julga que essas imagens mentais *se acham ao centro dos debates epistemológicos levantados pela psicologia científica contemporânea*. Essas imagens se constituem numa forma de conhecimento mais imediato e operacional cuja explicitação e utilização, por parte do indivíduo, não exigem o recurso a um raciocínio mais elaborado. Neste sentido, há uma certa correlação entre as imagens mentais e o conhecimento intuitivo.

Dessa forma, reencontramos os três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico analisados por GONSETH F. (1945): o *intuitivo*, o *experimental* e o *racional*. Esses três aspectos estão respectivamente relacionados às imagens mentais, aos objetos (incluindo os desenhos) e aos conceitos. Essas três formas de conhecimento não são distintamente separáveis no transcorrer do processo de aprendizagem, da mesma forma em que os quatro elementos destacados são fortemente imbricados uns sobre os outros no processo de construção teórica vivenciado pelo aluno.

2. Representação nos Livros Didáticos

As observações referentes a esta parte foram obtidas a partir de uma

análise das páginas consagradas ao estudo dos corpos redondos em 25 livros didáticos publicados a partir de 1987 e utilizados atualmente no ensino da matemática no primeiro grau da França. Estes livros correspondem aos novos programas escolares implantados naquele país depois de 1985 como consequência das reformas que deixaram de priorizar o enfoque dado pelo movimento da matemática moderna. Esta análise é centrada mais particularmente sobre as figuras do cilindro, da esfera e do cone que são estudados, respectivamente, nas séries correspondentes às sexta, sétima e oitava séries do primeiro grau. Não se trata de uma simples crítica a esses livros. O objetivo principal é levantar informações que possam contribuir para o ensino e a aprendizagem destes conceitos. Faz-se necessário destacar ainda que estas informações são, com maior ênfase, pertinentes ao próprio grafismo utilizado para a representação destas noções geométricas. Partimos do princípio de que, para tentar melhor compreender os problemas da aprendizagem, é necessário também ter informações a respeito da maneira como os livros têm apresentado tais desenhos.

Constatamos a existência de certas figuras mais fundamentais do que outras que podem ser consideradas como configurações geométricas associadas aos conceitos de *corpos redondos*. Após os trabalhos de AUDIBERT G. (1990), uma *configuração* ou um desenho

fundamental é um desenho que ilustra um conceito ou uma propriedade de importância destacada numa determinada área do conhecimento científico, que apresenta um certo número de elementos caracterizando o equilíbrio da figura, geralmente, em relação aos referenciais horizontal e vertical, e, finalmente, trata-se de uma figura usada com uma grande frequência no ensino daquela ciência. Uma análise das configurações presentes nos livros utilizados atualmente em nossas escolas e também daquelas realizadas por alunos brasileiros pode ser encontrada no trabalho de GARDIMAN A. (1993).

As figuras numeradas por 1, 2 e 3 ilustram três possíveis configurações, associadas ao conceito de cilindro de revolução, encontradas nos livros analisados. Desenhos que se aproximam destes três foram também localizados entre aqueles feitos por alunos do primeiro grau quando trabalhavam na solução de um problema envolvendo a noção de cilindro. De forma análoga, as figuras 10 e 16 ilustram, respectivamente, as configurações geométricas associadas à esfera e ao cone. Um dos elementos de equilíbrio destas configurações pode ser reconhecido pela posição dos eixos das elipses que são sempre paralelos às bordas da página. Um outro elemento de equilíbrio é a existência, em todos esses desenhos, de um eixo de simetria na posição vertical. Trata-se, portanto, de fortes características encontradas

tanto nos desenhos dos livros como naqueles realizados pelos alunos. Mais de dois terços das representações dos corpos redondos respeitam esses critérios que caracterizam tais desenhos como configurações geométricas.

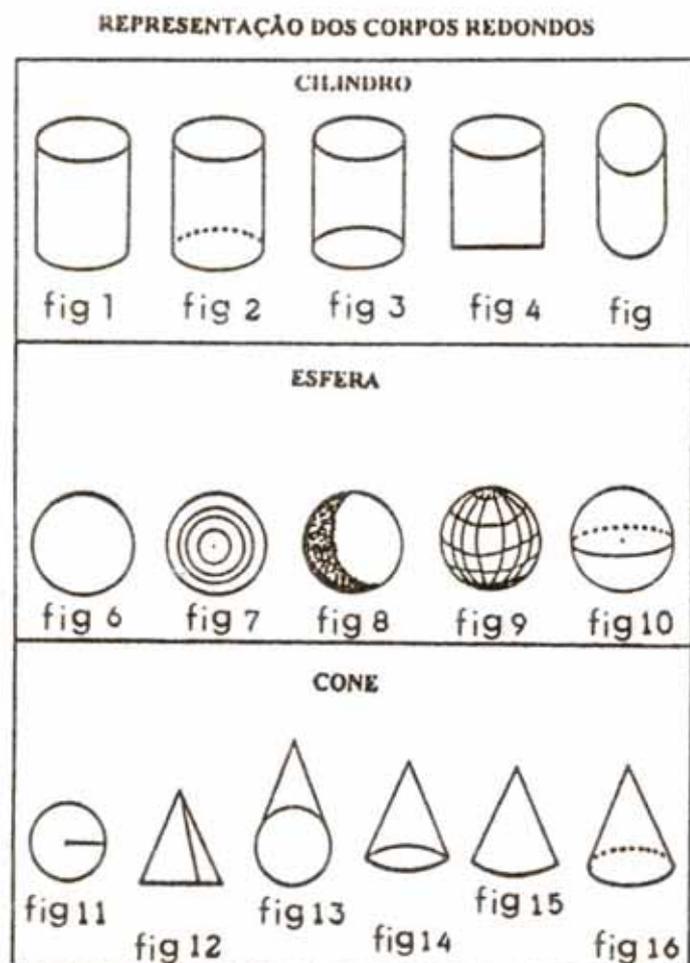


Fig. 1

Para o caso da representação do cilindro e do cone, é quase sempre adotada uma perspectiva cavaleira com um ângulo de fuga de 90 graus e um coeficiente de redução variando

aproximadamente entre $1/4$ e $1/2$. No caso do cilindro, existem ao menos dois segmentos verticais, representando duas geratrizes, e uma elipse representando o círculo de base superior. No que se refere ao círculo de base inferior, observa-se que ele aparece representado por uma das maneiras seguintes: uma elipse tendo a metade em traço pontilhado e a outra metade em traço contínuo, uma meia elipse ou uma elipse toda em traço contínuo. Constatamos, entretanto, que esta terceira maneira de representar o círculo de base inferior apresenta freqüentemente uma séria ambigüidade na leitura do desenho.

Na representação do cone, podemos destacar pelo menos dois segmentos com a mesma origem, simétricos em relação a um eixo vertical, representando duas geratrizes, e uma elipse representando o círculo de base do cone. A grande maioria destas elipses são traçadas com a metade em traços pontilhados e a outra metade em traço contínuo. Observamos também a existência de representações do círculo de base por uma elipse toda em traço contínuo. Como no caso do cilindro, acreditamos que esses desenhos não favorecem a leitura.

A esfera é quase sempre representada nos livros didáticos pelo desenho habitual, composto pelo menos por um círculo e uma elipse. A ausência de explicações sobre esses desenhos nos leva a estimar que o círculo representa

o *contorno aparente* da figura e que a elipse representa um círculo máximo, localizado num plano perpendicular ao plano de projeção. O centro da esfera aparece marcado na grande maioria desses desenhos. Portanto, podemos constatar o uso simultâneo de duas perspectivas diferentes nessa representação habitual da esfera: a elipse pode representar, por uma projeção não ortogonal, o círculo máximo localizado num plano perpendicular ao plano de projeção, e, por outro lado, o círculo, que estimamos ser o *contorno aparente* da figura, caracteriza uma projeção ortogonal da esfera. Existe, portanto, uma ambigüidade no que diz respeito à definição da projeção usada na representação da esfera. Este uso simultâneo de duas projeções, para o caso da representação dos corpos redondos, é uma dificuldade técnica de conciliação entre as coerências das regras de desenhos e a necessidade de legibilidade da figura. Se a projeção da esfera for feita segundo uma direção não-ortogonal ao plano de projeção temos então o caso do contorno aparente elíptico. A não escolha deste tipo de representação para a esfera deve-se, talvez, a uma certa dificuldade de leitura por parte do aluno.

Acreditamos que, do ponto de vista didático, é necessário priorizar desenhos que sejam ao mesmo tempo corretos e legíveis. Mas, quando esta conciliação apresentar dificuldades,

como no caso da esfera, a legibilidade da representação deve ser prioritária. Esta dificuldade técnica não pode ser, evidentemente, compensada por um emprego abusivo de desenhos muito aproximados que podem dificultar ainda mais o processo de representação, pelo aluno, dos conceitos geométricos.

Nos livros analisados, os exercícios consagrados aos corpos redondos que solicitam, explicitamente, a realização de um cálculo são muitíssimo mais numerosos do que aqueles que pedem a realização de um desenho. Os exercícios sobre a representação da esfera são quase inexistentes nesses livros; sete oitavos dos livros analisados não apresentam nenhum desses exercícios. No caso do cone, nove décimos dos exercícios são consagrados exclusivamente ao cálculo. Mais da metade dos exercícios sobre o cilindro são igualmente dedicados ao cálculo do volume, área ou um outro elemento qualquer. Estimamos que esse desequilíbrio quanto ao número desses exercícios é extremamente prejudicial à aprendizagem. Segundo nosso ponto de vista, a aprendizagem dos conceitos do espaço passa, necessariamente, por um certo equilíbrio dialético entre as atividades em torno da realização de cálculo e também de desenhos.

Os livros analisados não apresentam regras de representação suficientemente claras e explícitas sobre os corpos redondos. Essa mesma situação se estende igualmente para o

caso da representação das figuras geométricas de forma geral. Os desenhos não são, normalmente, acompanhados de comentários sobre o próprio desenho. As frases localizadas ao lado das figuras dizem respeito, somente, aos conceitos representados. Por exemplo, no caso do cilindro é comum encontrar uma elipse representando um círculo de base, mas ao lado desta curva aparece, muitas vezes, a expressão "círculo de base". Por um lado, o aluno vê uma elipse; mas, por outro, lê a informação de que esta curva é um círculo. É neste sentido que dizemos que os comentários se referem somente aos aspectos conceituais mas não fazem menção aos elementos do próprio desenho. Esta ausência de regras e de explicações fazem somente aumentar as dificuldades de uso do desenho. Essa explicitação de regras pode ser desde uma simples questão de informação a um problema que exija uma aprendizagem mais formal.

3. Representação Feita pelo Aluno

No que se refere à análise das representações do cilindro, da esfera e do cone, feitas pelos alunos, é necessário salientar que o objetivo principal dessa parte da pesquisa foi o de identificar o próprio conjunto de

traços empregados pelos alunos, para tentar realçar a terceira dimensão dos objetos representados. Estas experiências foram desenvolvidas numa situação *a priori* de qualquer aprendizagem formal do desenho.

Para analisar a representação do cilindro realizamos uma experiência em classe, usando a técnica de resolução de problemas, e fazendo intervir um problema que envolvesse o conceito de cilindro de revolução. Obtivemos, assim, uma coleção considerável de desenhos na qual foi possível identificar cinco categorias que foram chamadas de: *meia-oval*, *oval com pontilhado*, *oval em traço contínuo*, *segmento e círculo*. As figuras numeradas de 1 a 5 ilustram respectivamente estas categorias de desenhos.

A representação mais freqüente é aquela mostrada pela figura 1, onde o aluno não utiliza pontilhados. Segundo nos parece, ele deseja desenhar somente a parte aparente do objeto. Por outro lado, os desenhos menos freqüentes são aqueles ilustrados pela figura 2, que, contrariamente, são os mais freqüentes nos livros escolares. Isto evidencia que os alunos, não tendo domínio da técnica de uso dos traços pontilhados, podem desenhar somente a parte visualizada do sólido.

Os desenhos das categorias *segmento e círculo*, encontrados somente entre os desenhos dos alunos, evidenciam a existência de uma dificuldade de coordenação entre dois

diferentes pontos de vista segundo os quais pode-se visualizar o cilindro. Portanto, esta dificuldade deve ser considerada no processo de ensino. Pode-se observar que uma das principais dificuldades dos alunos é a representação dos círculos de base do cilindro, da mesma forma que uma das características mais marcantes presentes em todos os desenhos é a existência de dois segmentos verticais, de mesmo comprimento, representando duas geratrizes particulares. A análise detalhada dos casos envolvendo a representação do círculo de base superior por um círculo preciso, traçado com o uso do compasso, nos levou a enunciar a seguinte *hipótese de ensino*:

O aluno, querendo realizar um desenho preciso do cilindro utilizando um instrumento de desenho, pode representar o círculo de base superior por um próprio círculo traçado com o uso do compasso. A ausência de um instrumento que lhes permita traçar elipses é claramente percebida por esses alunos.

Esta hipótese é enunciada a partir da constatação de que todos os alunos que realizaram um desenho como aquele mostrado pela figura 5, realizaram, simultaneamente, nas páginas de rascunho, pelo menos um outro desenho do cilindro no qual o círculo de base foi representado por uma curva oval, feita a mão livre, que

se aproxima de uma elipse. Portanto, estimamos que esses alunos têm uma certa intuição da maneira mais correta de representação. Mas, para apresentar um desenho preciso, estes alunos utilizaram o compasso, que era o instrumento que tinham disponível naquele momento.

Para analisar a representação da esfera, solicitamos aos alunos a realização de desenhos de dois objetos: uma bola e um disco em cartolina, tendo os dois cerca de 10 cm de diâmetro. Descrevemos aqui somente a análise dos desenhos da bola. A todo rigor, esses desenhos representam um objeto material, e não o conceito de esfera. Essa experiência foi realizada em quatro classes do primeiro grau com cerca de cem alunos da sétima série.

Nesta representação, o *contorno aparente* é quase um círculo. O aluno pode desenhar no interior deste círculo alguns elementos variados para tentar realçar a terceira dimensão do objeto. Identificamos cinco categorias de desenhos que foram chamadas de: *círculo, círculos concêntricos, geografia, sombra e oval*. As figuras numeradas de 6 a 10 ilustram respectivamente estas classes de desenhos. Estimamos que as categorias *círculo* e *círculos concêntricos* são representações que mostram a existência de processos menos desenvolvidos do ponto de vista do grafismo utilizado pelo aluno.

As categorias *geografia, sombra e oval* aparecem aproximadamente com a mesma frequência e em conjunto constituem cerca de 70% dos desenhos da esfera. Essas três categorias evidenciam forte influência, no processo de representação do espaço, do aspecto experimental do conhecimento geométrico. Considerando o conjunto de todas as representações da esfera, pode-se constatar que o aluno utiliza quase sempre o compasso. Mais precisamente, constatamos que 90% dos círculos são traçados com auxílio do compasso. Esta constatação sugere argumentos para enunciar uma segunda *hipótese de ensino*:

O uso do compasso é sempre sensivelmente privilegiado pelo aluno para traçar um círculo representando o contorno aparente da esfera.

No que se refere à representação do cone, foi examinada uma coleção de desenhos feitos por alunos de sete classes da oitava série do primeiro grau. A metodologia empregada ainda permaneceu como uma experiência planejada e consistiu na realização de desenhos representando o cone quando os alunos tinham diante de si um modelo sólido construído em cartolina.

A partir da análise destes desenhos, foi possível identificar seis categorias de representações do cone, que receberam o nome de: *círculo,*

triângulo, círculo-vértice, dois arcos de círculo, um arco de círculo e curva oval. As figuras numeradas de 11 a 16 ilustram respectivamente estas seis categorias. Os desenhos mais freqüentes são aqueles das categorias *curva oval, um arco de círculo e círculo*, que constituem em conjunto três quartos de todos os desenhos. No que se refere ao contorno aparente do cone, pode-se identificar um procedimento particular seguido por cerca de 70% dos alunos. Descrevemos este procedimento da seguinte maneira:

Para representar o cone, o aluno desenha dois segmentos e uma curva. Esta curva pode ser um arco de elipse ou um arco de círculo representando a parte aparente do círculo de base do cone. Os segmentos que são quase sempre traçados com auxílio da régua têm uma mesma origem e são simétricos em relação a um eixo vertical.

O uso da régua e do compasso é sempre sensivelmente preferido por esses alunos, em vez da realização de um desenho feito a mão livre. Constatamos que dois terços dos alunos realizaram desenhos feitos somente com ajuda daqueles instrumentos. Aproximadamente um terço dos alunos apresenta simultaneamente esses dois tipos de desenhos que se diferenciam pelo uso ou não da régua e do compasso. Um número muito reduzido

de alunos fez somente desenhos a mão livre. Esta constatação serviu para confirmar resultados já obtidos pelo Grupo de Geometria de Montpellier no que se refere, para uma determinada faixa etária de alunos, a preferência pela realização de um desenho utilizando os instrumentos disponíveis.

Nós estimamos que a representação do círculo de base do cone por dois arcos de círculo é motivada pelo compasso que o aluno tem, habitualmente, a sua disposição. A este propósito, identificamos um procedimento, seguido por cerca de um quarto dos alunos, que nos revela informações sobre a representação do cone: o aluno realiza dois desenhos do cone. Num primeiro desenho, o círculo de base é representado por uma elipse a mão livre e, num segundo desenho, o círculo de base é representado por dois arcos de círculo traçados com compasso. O primeiro desses desenhos é quase sempre apresentado nas páginas de rascunho, indicando que é ao segundo desenho que o aluno atribui mais importância. Estas observações podem ser resumidas na seguinte hipótese de ensino:

Para realizar um desenho preciso, utilizando um instrumento de desenho, o aluno representa o círculo de base do cone por um ou dois arcos de círculos traçados com compasso. A ausência de um instrumento que lhe permita traçar elipses pode ser

facilmente observada no procedimento adotado por esses alunos.

No que se refere à necessidade desses instrumentos, realizamos uma experiência em classe para investigar as possibilidades de uso de uma régua própria para traçar elipses na representação dos corpos redondos. A manipulação desse instrumento não apresentou maiores dificuldades para a grande maioria dos alunos. Embora nos pareça que este instrumento ofereça boas possibilidades de uso didático no primeiro grau, compreendemos igualmente que qualquer recomendação desta natureza dependeria da multiplicação do número de experiências deste tipo.

4. Elementos de Conclusão

A elipse é um elemento fundamental na representação dos corpos redondos. No ensino da geometria no primeiro grau, pode-se prever e valorizar o uso de desenhos que fazem intervir elipses que apresentem os eixos paralelos às bordas da página de desenho. Trata-se de um elemento de equilíbrio muito freqüente nos desenhos apresentados pelos livros didáticos e também naqueles feitos pelos alunos. Na representação dos corpos redondos, o aluno prefere sempre a realização de um desenho feito com o auxílio dos instrumentos de

desenho, que podem ser a régua, o compasso ou ainda uma régua de traçar elipses.

Os traços pontilhados não são espontaneamente utilizados pela grande maioria dos alunos. Por outro lado, a utilização correta desse tipo de traço não aparece, normalmente, explicitado nos livros de geometria. Consideramos que algumas regras de desenhos devam ser claramente explicitadas no ensino da geometria. As representações do círculo de base do cilindro por um círculo preciso, traçado com compasso, e do círculo de base do cone por um ou dois arcos de círculo podem ser motivadas pelo uso habitual do compasso, que é o instrumento disponível ao aluno. Para terminar, realçamos que a leitura e a realização de um desenho constituem uma passagem obrigatória no processo de ensino-aprendizagem da geometria plana e espacial. Por este motivo, é necessário utilizar desenhos legíveis, que não permitam ambigüidade para o aluno. As *configurações geométricas*, em particular, parecem oferecer essa boa qualidade de leitura.

BIBLIOGRAFIA

- AUDIBERT, G. *La Perspective Cavalière*. Paris, Publicação da APMEP (Associação dos Professores de Matemática do Ensino Público da França), 1990.

- DENIS, M. *Image et Cognition*. Paris, PUF (Presse Universitaire Française), 1989.
- GONSETH, F. *Les Mathématiques et la Réalité*. Paris, Librairie Scientifique, Edição de 1974, 1936.
- GONSETH, F. *La Géométrie e le Probleme de l'espace*. Editions Neuchatel, Genebra, 1945, 06 volumes.
- PAIS, L.C. *La représentation du cylindre dans les manuels scolaires et chez les élèves*. Publicação do IREM-Universidade de Montpellier, 1990.
- PAIS, L.C., NAUDEILLO, J. e PELOUZET, B. *Les Corps Ronds Répères-IREM*, número 04, Paris, 1990.
- PAIS L.C. *La représentation des Corps Ronds dans l'enseignement de la Géométrie au College: Analyse de livre, Pratiques d'élèves*. Tese de doutorado defendida na Universidade de Montpellier, 1991.
- GARDIMAN, A. *Uma Análise de Configurações Geométricas Intervenientes no Processo de Ensino-Aprendizagem da Geometria*. Dissertação de Mestrado em educação a ser apresentada na UFMS, 1993.

1870-1871

1871-1872

1872-1873

1873-1874

1874-1875

1875-1876

1876-1877

1877-1878

1878-1879

1879-1880

1880-1881

1881-1882

1882-1883

1883-1884

1884-1885

1885-1886

1886-1887

1887-1888

1888-1889

1889-1890

1890-1891

1891-1892

1892-1893

1893-1894

1894-1895

1895-1896

1896-1897

1897-1898

1898-1899

1899-1900

1900-1901