Mancha negra: reflexões sobre um projeto no ensino de Cálculo

*Margarida P. Mello e Sandra A. Santos**

Resumo: Usando como mote o vazamento de petróleo de um navio em uma região costeira, elabora-se um projeto de Cálculo de várias variáveis que explora, principalmente, o tópico "curvas de nível". Após modelar e estudar um dado problema, pede-se também que o aluno pesquise outros fenômenos que tenham relação com este tópico e crie novas situações-problema. Apresentamos os objetivos e estratégias adotadas no trabalho com projetos, no contexto do *Cálculo com Aplicações*, uma iniciativa de inovação e aprimoramento do ensino de Cálculo empreendida por um grupo de professores da Unicamp que data de 1990. Os trinta e seis trabalhos produzidos por uma turma de setenta e um alunos são analisados, levando-nos a refletir sobre os resultados e conseqüências da realização do projeto nesta turma de Engenharia.

Palavras-chave: Cálculo, projetos no ensino, Engenharia

Abstract: Oil spilling from a tanker in a coastal region forms the setting of a Calculus project, which chiefly explores the topic "level curves." After tackling a given problem, the student is asked to research other phenomena that bear relation with this topic, and devise new problems. The objectives and strategies adopted in the work with projects undertaken by the authors in the context of the *Calculus with Applications* team, formed by a group of teachers from the State University of Campinas, are described. The thirty-six projects produced by a class of seventy-one students are analyzed. Reflections are made upon the results achieved and the effects of the project work for this class of Engineering students.

Key words: Calculus, project work, Engineering.

* Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científic (IMECC) – Unicamp. margarid@ime.unicamp.br, sandra@ime.unicamp.br.

1. Introdução

Não se trata do personagem de histórias em quadrinhos da Disney ou do título de um filme de terror, embora esta possa ser exatamente a idéia que ativistas do *Greenpeace* tenham de um derramamento de petróleo. A mancha negra decorrente de vazamentos de petróleo e derivados representa um prejuízo econômico direto, e traz também incontáveis danos ao meio-ambiente, indústrias de pesca e de turismo, cujos valores econômicos são temas de infindáveis controvérsias. A freqüência com que ocorrem causa permanente motivo de preocupação, e calcula-se que um milionésimo do petróleo transportado seja perdido em acidentes (HUANG, 1996).

Os inúmeros acidentes relacionados ao transporte e/ou produção de petróleo e derivados têm uma repercussão efetiva na vida da população em geral. Por outro lado, o mundo acadêmico há muito se dedica ao estudo de problemas relacionados a todos os aspectos destas atividades. Esta conjunção de fatores inspirou a elaboração de um projeto para alunos de Cálculo de várias variáveis baseado neste tema.

Partindo da simulação de um acidente de derramamento de petróleo em uma região costeira, vários conceitos de Cálculo são estudados e suas ferramentas exploradas para obter estimativas, tirar conclusões, fazer previsões, etc. Como um desdobramento natural desta atividade, pede-se que o aluno pesquise outras possíveis aplicações dos conceitos e ferramentas estudados, criando seu próprio problema. Conforme veremos neste artigo, o retorno desta proposta foi muito positivo, refletindo o grau de envolvimento e dedicação despertado.

Buscando contribuir com elementos para estimular outros professores a repensar e aprimorar sua prática docente, neste artigo descrevemos o projeto e fazemos uma análise detalhada dos trabalhos realizados por uma

turma de estudantes de Engenharia da Unicamp, durante o segundo semestre de 1999.

A seção 2 contém a motivação para o projeto e o contexto do tema proposto. Na seção 3 traçamos um breve panorama do ensino por meio de projetos, delineando nossa maneira de trabalhar e procurando nortear o leitor para a produção de outras propostas. A descrição do projeto é feita na seção 4. Na seção 5 apresentamos uma compilação das principais soluções e abordagens adotadas pelos estudantes, acompanhadas de considerações que enfatizam o conteúdo matemático presente e de uma análise qualitativa da produção obtida. As variadas contribuições de alunos são incluídas não só pelo seu valor intrínseco, mas também para justificar nossas afirmações acerca da repercussão e dos efeitos do projeto como, por exemplo, o incentivo à criatividade. Concluímos a seção 6 com um balanço dos nossos objetivos na proposição do projeto e dos resultados alcançados.

2. Motivação

Acidentes recentes amplamente noticiados pela mídia, como o vazamento do navio na Baía de Guanabara, no Rio de Janeiro, em janeiro de 2000, o vazamento do oleoduto em Araucária, no Paraná, em abril de 2000, e o afundamento da plataforma P-36 (no qual faleceram onze funcionários) na Bacia de Campos, em março de 2001, trouxeram, mais uma vez, às manchetes dos jornais, o drama e a discussão que acompanham tais desastres. No vazamento carioca, 1,29 milhões de litros de óleo foram despejados na Baía e, no paranaense, esta cifra subiu para 4 milhões de litros, que atingiram os rios Barigui e Iguaçu. A perda da plataforma P-36 foi o segundo maior acidente da história da Petrobras, que, somente na Bacia de Campos, já acumulou três episódios em 2001. Embora a quantidade de óleo perdida (42 mil litros) tenha sido pequena comparada às dos demais acidentes, o prejuízo advindo do afundamento foi considerável, por tratar-se da maior plataforma da Petrobras, com produção diária, em média, de 74 mil barris de petróleo.

Em particular, comentou-se na imprensa o tempo de resposta da Petrobras com relação aos acidentes; as primeiras providências tomadas; o tipo, quantidade e disponibilidade dos recursos necessários ao combate aos efeitos dos derramamentos; o impacto ambiental, etc.

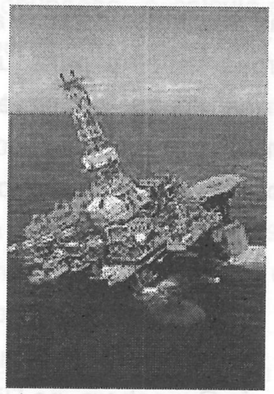


Figura 1: Plataforma P-36 da Petrobras[1]

Como não poderia deixar de ser, estes tipos de acidente são motivos de preocupação para a indústria petrolífera, que tem interesse em fomentar pesquisas sobre as melhores maneiras de evitá-los e combatê-los. O grupo de Biomatemática do departamento de Matemática Aplicada, do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp, atua nesta área, tendo produzido trabalhos sobre o assunto (CANTÃO, 1998;

[1] Foto extraída do *site* http://www.estadao.com.br/ext/plata/galeria.htm

CANTÃO, DE OLIVEIRA, MEYER, 2000; CANTÃO, MEYER, 2000; MEYER, 1993; MEYER, CANTÃO, POFFO, 1998). Os modelos matemáticos adotados nestes trabalhos envolvem equações diferenciais de difusão-advecção. Justamente um destes trabalhos (CANTÃO, 1998) foi a inspiração para a formulação do projeto de Cálculo objeto deste artigo. Na sua dissertação de mestrado, o autor produziu simulações realistas da propagação de derrames de óleo no Canal de São Sebastião, em São Paulo, que lembravam o mapa das curvas de nível de uma função de duas variáveis. Além disso, no segundo semestre de 1999, uma das participantes do grupo coordenado de professores que lecionava a disciplina de Cálculo de várias variáveis, a docente Márcia Scialom, do Departamento de Matemática do IMECC, sugeriu que trabalhássemos com o tema *Curvas de nível* no projeto que seria atribuído aos alunos como trabalho extra-classe.

No projeto colocamos, então, o problema inverso ao apresentado por Cantão (1998): dado o mapa que retratava a evolução de um derrame fictício, o que poderia ser deduzido? Claramente não se esperava de alunos de segundo semestre de Cálculo a elaboração de um modelo que envolvesse equações diferenciais parciais. O desafio era produzir algum modelo baseado nos conhecimentos já disponíveis, saber extrair informações deste modelo e identificar suas deficiências e limitações.

Cabe notar que os alunos já haviam passado pela experiência de trabalhar com projetos no primeiro semestre de 1999, na disciplina de Cálculo de uma variável.

3. Ensino com projetos

A utilização de projetos no ensino e aprendizagem tem uma história que remonta ao início do século XX, tendo ressurgido em época mais recente, conforme observa Abrantes (1995a, p. 84–85):

> ... O interesse pela pedagogia do projecto, de que Dewey (1916) e Kilpatrick (1918) foram os iniciadores, terá reaparecido meio século depois do trabalho dos seus pioneiros "em reacção ao fracasso da pedagogia por objetivos" (BOUTINET, 1990, p. 167). Na educação matemática, alguns autores vêm destacando o papel da realização de projectos pelos alunos, em relação com as novas finalidades do ensino da Matemática (NISS, 1977) ou como forma de ajudar a desenvolver a "competência democrática" ao ligar os processos de aprendizagem, a produção de "conhecimento local" e a acção interventiva (KEITEL, 1993).
>
> Mas o valor educativo do trabalho de projecto como componente do currículo de Matemática está ligado a factores de natureza pedagógica que incluem a escolha dos problemas a abordar, o ambiente de aprendizagem e a própria gestão do projecto e a sua relação com os conhecimentos e competências dos alunos (ORMELL, 1992).

A atribuição de projetos é uma das características do grupo de trabalho *Cálculo com Aplicações* do IMECC-Unicamp (ver COSTA; GROU, 1995; FIGUEIREDO; SANTOS, 1997). No *Cálculo com Aplicações*, as várias turmas participantes trabalham de modo coordenado, sob a orientação de um ou mais coordenadores, e com o auxílio de monitores. Os professores e monitores têm reuniões semanais de trabalho (*Oficina de Trabalho*) para discutir o andamento do curso, esclarecer dúvidas, trocar idéias a respeito de exercícios, provas, atividades de laboratório, etc. Nestas reuniões desenvolve-se o trabalho coletivo da equipe, possibilitado pela troca de experiências entre os participantes. A pesquisa de campo do trabalho de Souza Junior (2000) foi realizada junto a este grupo, detectando a riqueza do

momento de reunião, quando o todo soma mais do que as partes. As contribuições dos membros se complementam e do esforço coletivo surge algo que supera o que cada um poderia construir individualmente. A sistemática de trabalho adotada abre também uma oportunidade de aprendizagem única para cada membro participante. Estas qualidades do trabalho coletivo norteiam a atribuição do projeto a grupos de alunos, em geral duplas.

A maneira como vimos trabalhando com projetos em cursos de Cálculo compreende as etapas de planejamento, elaboração e implementação da proposta, tendo em vista os objetivos visados, expostos adiante. Todos os projetos têm em comum o uso de modelagem com adaptações, já que algumas etapas da dinâmica da modelagem são suprimidas, como escolha de tema e validação. As ações envolvidas no planejamento da proposta consistem em:

1. delimitar o conteúdo que pretende ser trabalhado e com que ênfase;
2. preparar um ponto de partida (conjunto de tarefas razoavelmente objetivas que ajudem a encaminhar o estudante) contemplando o conteúdo delimitado;
3. planejar um desdobramento rico, estimulando o aluno a pesquisar e criando ampla oportunidade para o exercício de sua criatividade.

O primeiro item é de suma importância, pois o projeto pode servir para (i) solidificar e sedimentar conceitos já vistos no curso; (ii) aprofundar tópicos já trabalhados ou (iii) orientar o estudo de tópicos que não serão cobertos em sala de aula. No primeiro caso, o objetivo é permitir que o estudante incorpore os conhecimentos, trabalhando-os sob diversos pontos de vista, procurando novos exemplos, propondo e resolvendo problemas relacionados. No segundo caso, busca-se ir além, levando o aluno a generalizar um resultado matemático, ou a trazer mais rigor (construindo demonstrações cuidadosas, contra-exemplos, etc.), ou ainda a considerar outras possibilidades que ampliariam o olhar sobre o tópico, acrescentando aspectos novos (como otimização, propriedades físicas, geométricas, analíticas, entre outras), e criando conexões. No terceiro caso, o projeto proporciona um guia para um estudo independente, incentivando o aluno a assumir um papel mais ativo e responsável na construção de seu conhecimento.

O retorno da etapa do projeto, objeto do segundo item, deve ser bastante previsível. O objetivo deste item é que o aluno ganhe confiança, tendo um terreno conhecido onde pisar. O sucesso neste item será um fator impulsionador do trabalho restante.

Já para o trecho do projeto contemplado no terceiro item, espera-se um resultado mais surpreendente. Se tudo der certo, o retorno desta parte vai ser bem variado e mesmo imprevisível, refletindo as individualidades dos estudantes.

Os aspectos descritos acima evidenciam que a escolha do tema é uma tarefa delicada, principalmente se considerarmos as características que a proposta de projeto a ser elaborada deve ter, características estas intimamente ligadas aos objetivos do trabalho com projetos:

1. atuar como fator de integração, tanto do conteúdo quanto do grupo de trabalho (alunos, monitores e professores);
2. propiciar o desenvolvimento da criatividade de todos os envolvidos;
3. valorizar a conduta ética, visando a formação do aluno cidadão;
4. ressaltar o caráter multidisciplinar que a Matemática possui;

5. conscientizar para o papel exercido pela Matemática em diversas situações na vida cotidiana;
6. incentivar a realização de um trabalho nos moldes de uma pesquisa científica, tratando tipicamente de problemas abertos e desafiadores, que admitam várias estratégias de ataque;
7. estimular o intercâmbio de idéias e experiências, por meio de apresentações orais, que permitam a valorização e divulgação do trabalho realizado.

O incentivo ao trabalho em grupo, à discussão e à troca de idéias, corroboram a importância da conduta ética. Todo material utilizado deve ter sua fonte (internet, livros, revistas) devidamente identificadas e a discussão entre grupos deve estimular o compartilhamento de estratégias de ataque aos problemas em questão, mas não da forma nem dos resultados finais do trabalho. Cada grupo deve *possuir* seu projeto, cada elemento do grupo deve ser capaz de defender seu projeto e explicar cada passagem, se isto for necessário. Quando possível, também a escolha do tema em torno do qual gira o "ponto de partida" procura contemplar aspectos éticos e de cidadania. Neste caso o mote foi a poluição, mas outros temas nesta linha, como o lixo (ver FIGUEIREDO; SANTOS, 1997), já foram utilizados. Como ressaltam Monteiro e Pompeu (2001, p. 99), o tema *Meio Ambiente* é de *fundamental importância na formação do cidadão*, chegando a educação ambiental a ser objeto de lei federal.

Na implementação do projeto todos trabalham, alunos, monitores e professores. Os monitores sentem a necessidade de se prepararem para esclarecer as dúvidas dos alunos e para isso formulam e discutem possíveis soluções para o projeto. A *Oficina de Trabalho* é o fórum para estas discussões, mediadas pelos professores da equipe. Em geral, a resolução do projeto constitui um desafio não só para os estudantes como também para os monitores e professores, pois surgem dúvidas inesperadas. Os professores geralmente são solicitados pelos alunos a comentarem sobre aspectos do projeto durante as aulas regulares. A grade para orientar os monitores na correção dos projetos também é elaborada e discutida na *Oficina de Trabalho*.

É neste momento do curso que o aluno percebe o valor do recurso computacional, trabalhado nas aulas semanais em laboratório computacional, uma prática adotada no *Cálculo com Aplicações*. Conforme observado por Abrantes (1994, p. 3), *aumentando a acessibilidade da informação e apoiando os alunos na abordagem de problemas realistas e na construção de produtos, a tecnologia poderá conferir novas possibilidades ao trabalho de projecto*. Convém observar, no entanto, que, ao contrário das experiências citadas em Abrantes (1995, p. 89-91), nas quais o uso de projetos constituía a locomotiva da disciplina, empregamos uma abordagem mais conservadora, no sentido em que o projeto aparece como uma atividade a ser desenvolvida preponderantemente em horário extra-classe. De fato, a introdução de projetos nos cursos de Cálculo não implicou em uma modificação da ementa, sendo o programa coberto[2] no Cálculo de várias variáveis o mesmo que em outras turmas que não utilizam projetos.

Ressaltamos ainda o papel dos projetos como precioso instrumento de avaliação. Concordamos com Santos (1997, p.112), quando esta afirma que

[2] *Funções de várias variáveis*: gráficos; derivadas parciais; limite e continuidade; diferenciabilidade; derivada direcional; regra da cadeia; funções implícitas; fórmula de Taylor; máximos e mínimos; multiplicadores de Lagrange. *Integrais múltiplas*: integrais duplas e triplas; mudança de variáveis; integração em coordenadas cilíndricas e esféricas. *Integrais de linha e de superfície*: curvas no plano e no espaço; campos vetoriais; fluxo e circulação; teorema de Green; independência de caminho; integrais de superfície; teoremas de Gauss e de Stokes.

> O professor/a precisa estar atento/a para que haja coerência entre seu trabalho pedagógico e a forma de avaliação por ele/ela utilizada. A forma como elaboramos nossas avaliações e os critérios de correção adotados transmitem uma forte mensagem para nossos alunos sobre o que priorizamos e valorizamos em matemática. Em suma, o uso de uma nova prática pedagógica e de formas alternativas de avaliação contribuem para que o aluno perceba a matemática de forma mais integral e abrangente. Além disso, estas estratégias alternativas de avaliação devem mostrar aos professores se os alunos sabem utilizar adequadamente o pensamento matemático para questionar, argumentar, formular hipóteses, validar e apresentar diferentes soluções para situações desafiadoras dentro e fora do contexto escolar.

Neste sentido, os projetos como instrumento de avaliação têm ampla potencialidade e extrema riqueza. Cabe a nós, professores, buscar explorar este instrumento em grande extensão, e colher, juntamente com os alunos, frutos saborosos deste manancial.

Não podemos, entretanto, omitir os desafios enfrentados por professores dispostos a se engajar neste tipo de empreendimento. Borba e Penteado (2001, p. 55), por exemplo, advertem sobre a perda de controle decorrente do uso de informática no ensino. Estes autores mencionam a *zona de risco* proveniente *de problemas técnicos e da diversidade de caminhos e dúvidas que surgem quando os alunos trabalham com o computador*. Por outro lado, Monteiro e Pompeu (2001), ponderam que

> ... muitos professores não se sentem capacitados a desenvolver a Modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações da matemática em áreas que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo para preparar as aulas e também não terão tempo para cumprir todo o programa do curso. (MONTEIRO; POMPEU, 2001, p.76-77).

Já Biembengut e Hein (2000, p. 29), destacam a necessidade de *audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender* por parte do professor que deseje incorporar modelagem em suas atividades docentes. Trabalhos como o presente, que descrevem o uso combinado de informática e modelagem, podem ajudar o professor que pretenda investir nesta direção, sugerindo idéias para o trabalho com projetos, descrevendo detalhes práticos de sua implementação, apontando os resultados positivos e negativos, e delineando estratégias para evitar os últimos em propostas futuras.

4. O projeto

Nesta seção é descrita a Parte I do projeto proposto no segundo semestre de 1999, para alunos de Cálculo de várias variáveis, elaborada pela primeira autora deste artigo. Apenas esta parte é enfocada no presente artigo, embora o projeto completo original contivesse três partes. As Partes II e III serão apresentadas resumidamente ao final desta seção. O peso do projeto na média final da disciplina foi de 20%. Nesta oportunidade participavam da equipe do *Cálculo com Aplicações* sete professores regulares, um estagiário do Programa de Estágio Capacitação Docente (PECD) e quinze monitores, atendendo a cerca de quatrocentos alunos.

O texto do projeto foi divulgado após um mês e meio do início do semestre e foi concedido um prazo de sete semanas para o trabalho, que deveria ser apresentado na forma de um relatório escrito. O item 2 faz referência a um mapa que retrata a evolução no tempo de um derrame de óleo no mar. Foram confeccionados 36 mapas fictícios para que cada grupo (de dois alunos) tivesse um problema individualizado (a maior turma participante tinha 72 alunos). Um exemplar de tal mapa pode ser visto na Figura 2. Permitiu-se também que os trabalhos fossem apresentados sob o formato de páginas da internet. No final do semestre foi organizada, por

iniciativa da professora Vera L.X. Figueiredo, a *1ª Mostra dos trabalhos da equipe do Cálculo com Aplicações,* na qual os alunos que assim desejaram tiveram a oportunidade de apresentar seus trabalhos, oralmente ou em poster. O material referente a todas as apresentações da equipe, na forma de textos, *slides*, fotos e *links* encontra-se em http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/mostra.

Os monitores do PAEG[3] e os professores participantes auxiliaram os alunos durante a execução do projeto. Na turma de Estatística foi estabelecida a entrega de um pré-projeto, duas semanas antes do prazo final, para que os alunos pudessem ter um retorno do monitor sobre seu trabalho previamente à entrega da última versão. Esta experiência foi muito positiva sob o ponto de vista de todos os envolvidos. Encaminhou a sistematização do trabalho dos alunos, permitindo correções de curso e identificação de problemas de interação em determinadas duplas. A exposição preliminar facilitou também a tarefa de avaliação posterior do monitor. Este compromisso fez com que os alunos efetivamente iniciassem o trabalho, não deixando tudo para a última hora. Em turmas que não fizeram o pré-projeto, foi comum a sobrecarga de trabalho na semana anterior à entrega.

Apresentamos a seguir as instruções que os alunos receberam para a elaboração da Parte I do projeto.

---

[3] O Programa de Apoio ao Ensino de Graduação (PAEG) da Pró-Reitoria de Graduação da Unicamp (1995–2000), permitia a contratação de alunos de graduação e pós-graduação para atuarem como monitores (chamados de *tutores* pelo programa) auxiliando professores, prestando atendimento, corrigindo listas, ministrando aulas de laboratório ou de exercícios.

Parte I: Curvas de Nível

Curvas de nível têm aplicações surpreendentes nas mais diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, estudos meteorológicos(a) e pesquisas médicas(b). Inspire-se nestas e noutras fontes de material para ajudá-lo no desenvolvimento desta parte do projeto.

1) Pesquisa de campo

Obtenha três ou mais exemplares de mapas de curvas de nível. Por exemplo, mapas de relevo geográfico, conjunto de isotermas, curvas de indiferença (em economia), disseminação de doenças, etc. Descreva em palavras o significado do mapa, e como foi desenhado, ou, caso você não tenha esta informação, como poderia ter sido produzido.

2) Estudo de caso

O mapa em anexo (exemplar na Figura 2) indica a propagação de óleo que vaza de um navio. As curvas correspondem à fronteira da mancha nos vários instantes de tempo. As curvas correspondem a intervalos de tempo de meia hora, começando às seis horas da manhã. Admitindo que estas curvas são as curvas de nível de uma função, descreva em palavras o significado desta função e dê uma interpretação física para seu vetor gradiente. Com base neste mapa e utilizando seus conhecimentos de Cálculo(c), estime: a) a localização do navio às seis horas da manhã; b) o vetor gradiente no ponto indicado no mapa; c) o instante e o ponto em que a mancha atingirá a costa.

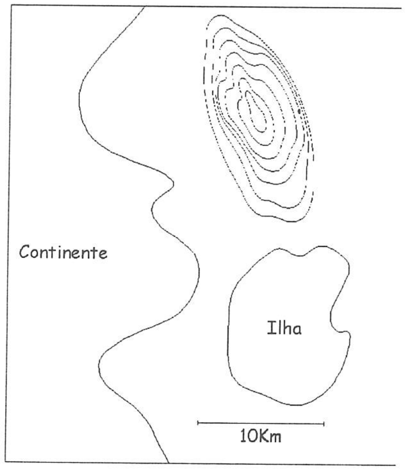


Figura 2: Exemplar de mapa referente à Parte I.2 do Projeto.

3) Criando um novo estudo

Formule e responda perguntas pertinentes ao contexto e semelhantes às formuladas no item 2 para um dos mapas que você obteve em sua pesquisa de campo.

(a) http://www.nationalgeographic.com/elnino/mainpage.html

http://www.math.iupui.edu/m261vis/m261vis.html

(b) http://www.nationalgeographic.com/education/ideas58/58cholera.html

(c) A referência *Cálculo e Geometria Analítica*, vol. 2, de Al Shenk, traz uma boa discussão sobre curvas de nível, derivadas direcionais e gradiente, na seção 13.4, que pode ser útil na sua análise.

Resumimos, a seguir, o restante do projeto. Na Parte II, o foco consistiu na aplicação do Cálculo para a resolução de problemas de otimização. A modelagem de um recipiente de lixo foi sugerida no roteiro proposto, embora tenhamos aberto a possibilidade de exploração de outros temas (embalagem, transporte, aeromodelo, cúpulas etc.), desde que o trabalho desenvolvido utilizasse conceitos de otimização de funções de várias variáveis e apresentasse riqueza e complexidade similares à da proposta feita. Divulgamos, na página da disciplina na internet, material de apoio produzido por nossos alunos e pela equipe em anos anteriores, para estimular a criatividade. A Parte III criou a oportunidade de refletir sobre os aspectos ambientais e sociais explorados no projeto. O aluno foi convidado a ponderar e comentar sobre o papel que a Matemática pode desempenhar fora do mundo acadêmico. Certamente os resultados da segunda e terceira partes do projeto também mereceriam análises detalhadas, o que, no entanto, foge do objetivo do presente artigo. Daqui em diante, as referências ao projeto devem ser entendidas como referências à Parte I do projeto.

5. Soluções e abordagens

Além de trabalhar os conceitos matemáticos relacionados ao tema *Curvas de nível*, este projeto incentivou a criatividade dos alunos, pelo tipo de questões formuladas. Assim como em várias situações da vida real, os alunos foram confrontados com problemas para os quais não tinham ainda teoria, modelo, ou dados, para um tratamento mais completo. A conseqüência, extremamente benéfica, é que o problema mostrou-se suficientemente rico e indeterminado de forma a permitir várias soluções aceitáveis, sob o ponto de vista do arsenal de conhecimentos à disposição do aluno naquele momento. O aluno foi desafiado a propor e defender sua estratégia para responder às perguntas. Esta estratégia devia ser baseada na sua modelagem do problema, recriando assim os desafios dos "resolvedores de problemas" ao longo da história da humanidade, os grandes nomes da ciência (Arquimedes, Kepler, Newton, Euler, Gauss, etc.), que desenvolveram teorias a partir do estudo de problemas concretos (ver, por exemplo, EDWARDS, 1979).

As seções 5.1, 5.2 e 5.3, a seguir, referem-se aos ítens 1, 2 e 3 da Parte I do projeto, respectivamente. Nestas seções apresentamos elementos selecionados dos trabalhos de trinta e seis grupos, de uma turma de setenta e um alunos de Engenharia Elétrica da Unicamp, cursando a disciplina de Cálculo de várias variáveis, durante o segundo semestre de 1999. Dentre as características que nos motivaram a escolher esta turma para a elaboração do presente artigo, destacam-se: (i) trata-se da turma da segunda autora deste artigo, com mais que o dobro do número de alunos da turma da primeira autora; (ii) constitui um exemplar da platéia típica da disciplina de Cálculo para Engenharias; (iii) a turma participava pelo segundo semestre consecutivo do *Cálculo com Aplicações*, já tendo desenvolvido um projeto no primeiro semestre, na disciplina de Cálculo de uma variável; (iv) os projetos feitos pelos alunos ficaram sob a guarda da segunda autora, o que viabilizou a pesquisa do material, com a permissão dos estudantes.

5.1 Pesquisa de campo

A internet revelou-se uma fonte riquíssima de material para este item. Vários grupos apresentaram lindas fotos e gráficos extraídos da rede. Embora a variedade de temas exemplificados tenha sido grande, dois temas se destacaram: meteorologia e topografia. Em todos os trabalhos pelo menos um destes dois temas aparece. Curiosamente, o comentário feito por um dos grupos na introdução do projeto, ver texto no Quadro 1, antecipava este resultado.

Quadro 1: Primeiros contatos com curvas de nível

> "Na geografia do primeiro e do segundo graus, uma das formas de se enxergar as formas do relevo é justamente através de curvas de nível. Aliás, o termo "curva de nível" nos é apresentado não como uma representação matemática, mas como o nome de uma técnica agrícola que evita a erosão das encostas plantadas, pois impede que a água da chuva atinja velocidades críticas."
>
> F.R. Kawaoka e R. Egas

Outros temas abordados foram: mapeamento da camada de ozônio terrestre; topografia da córnea; mapas de lençóis freáticos; contaminação radioativa; declinação magnética na região dos EUA; incidência sonora na vizinhança de um aeroporto; densidade populacional; potencial elétrico; salinidade; produção de soja; poluição do ar; atividade sísmica; risco de incêndio; expansão de bactérias; ondas oceânicas (tsunamis); temperatura corporal; aglomerados de galáxias; velocidade de fluidos em cursos (correntes); escoamento supersônico; cobertura telefônica celular no Rio de Janeiro. Na verdade, a maioria dos mapas apresentados eram de densidade, contendo curvas e código de cores, indicando valores médios nas regiões delimitadas pelas curvas.

Dentre os *sites* citados pelos alunos em suas referências, vários não estão disponíveis atualmente, sintoma do caráter dinâmico e volátil desta fonte de pesquisa. Relacionamos a seguir algumas páginas mencionadas nos trabalhos, que pudemos revisitar em novembro de 2001, por ocasião da redação deste artigo:

http://www.cpa.unicamp.br

http://www.oglobo.com.br

http://www.option.line.com/members/Arai

http://www.chernobyl.com

http://www.zeuter.com

http://www.cptec.inpe.br

http://www.greenpeace.org.br

http://www.weather.com

http://www.geomag.usgs.gov/world.html

http://www.nationalgeographic.com

http://www.ibge.org.br

http://www.nasa.gov

http://www.earth.nasa.gov

http://www.starwars.com

http://www.oceanweather.com

http://www.inmet.gov.br

http://www.ob-ultrasound.net

http://www.aelc.com.au/CaseStudy/corneal/Toposphere.html

http://www.americaneye.com/general982/46.html

http://www.epa.gov

http://www.ermspain.com/esp/aplicacion/mapprod.htm

http://www.aoml.noaa.gov/general/lib/hurricbro.html

http://www.dga.min-amb.pt/atlas/m3_curvas.html

Embora a utilização da internet confira muita praticidade ao trabalho, principalmente com respeito à obtenção e manuseio de ilustrações, ela deveria ser vista apenas como um ponto de partida para posterior investigação, pois, freqüentemente, os assuntos são tratados de maneira por demais sucinta nesta mídia. Esta deficiência foi percebida por um dos grupos, que ofereceu uma sugestão para projetos futuros (ver primeiro texto do Quadro 2). Por outro lado, alguns grupos tiveram exatamente a iniciativa sugerida, consultando profissionais da universidade que pudessem contribuir com seus conhecimentos específicos, orientando os alunos na consulta de literatura e tipos de problema. Cabe notar que este tipo de iniciativa ressalta e valoriza um dos principais recursos do ambiente acadêmico proporcionado pela universidade: a facilidade e possibilidade de intercâmbio interdisciplinar. O projeto preenche, assim, um de seus objetivos: o de gerar oportunidades de cooperação entre a Matemática e outras disciplinas (Quadro 2).

Quadro 2: Comentários sobre a pesquisa

"Nossa principal fonte de pesquisa foi, sem dúvida, a Internet. Optamos pela Rede tanto pela conveniência em termos de acesso, como pela grande variedade temática que ela oferece. Pudemos encontrar curvas de nível referentes a uma série de campos de estudo diferentes. Após terminada a busca por curvas de nível, sentimos um certo arrependimento por não termos pesquisado as curvas em outras fontes. A Internet, apesar de oferecer uma grande quantidade de informação, ainda é um pouco limitada quanto à qualidade da informação que oferece. Há muitos sites superficiais. Seria interessante encorajar os futuros "projetistas" a buscar exemplos de curvas de nível nos departamentos da Unicamp ligados à área de Geografia, em órgãos de planejamento do Governo ou em empresas privadas de cartografia." F.R. Kawaoka e R. Egas
"Consulta a professores do Instituto de Geociências da Unicamp, e utilização de apostilas ministradas no curso, cedidas pelos mesmos." Extraído de "Referências bibliográficas" de A.C. Souza

Analisando os projetos dos estudantes, com relação à solicitada descrição em palavras dos significados dos mapas, observamos o seguinte: 33% deles fizeram uma leitura rica do ponto de vista matemático; 23% perceberam a importância do tema, complementando verbalmente informações presentes nos mapas, mas não exploraram suas características matemáticas; 44% dos alunos, no entanto, apresentaram uma leitura matematicamente pobre e óbvia de seus mapas.

Para a explicação da produção dos mapas, isto é, como foi desenhado, ou como poderia ter sido produzido, apenas 8% dos alunos detalharam os aspectos matemáticos inerentes à construção das curvas. A grande maioria (81%) mencionou algo sobre a obtenção de pontos do mapa, mas considerou a construção propriamente dita como uma caixa preta. O restante dos estudantes (11%) não fizeram este item.

Por um lado, isto evidencia a dificuldade, advinda da total falta de prática, dos alunos em explicarem conceitos ou raciocínios matemáticos em palavras. Esta dificuldade é sentida em outros contextos, conforme menciona Abrantes (1995b, p. 45):

> O "Programa de Avaliação da Califórnia" (1989) experimentou um conjunto de 5 questões de resposta aberta no seu "Estudo de Competências Acadêmicas no 12º ano", realizado em 1987–1988. As perguntas aparentaram ser bastantes difíceis: as respostas classificadas como "demonstrando competência" nunca foram mais do que 20% do total, e de 50% a quase 70% não forneceram resposta ou forneceram uma resposta "inadequada". A "Comissão de Aconselhamento da Avaliação em Matemática" conjecturou que o fraco resultado se devia à falta de experiência dos alunos em expressarem idéias matemáticas por escrito. Várias gerações de testes de resposta curta nos EUA parece terem causado dificuldades aos alunos quando lidam com perguntas de resposta aberta.

Observamos também que há uma tradição da resolução de problemas matemáticos vir expressa de uma forma telegráfica, em linguagem simbólica. Sem dúvida a simbologia é fundamental para a síntese na exposição de uma seqüência de cálculos. Contudo, no contexto da sala de aula, por exemplo, a linguagem sintética escrita na lousa vem acompanhada de uma explicação oral. Quando a explicação verbal é requerida por escrito, os alunos ressentem-se da baixa freqüência de oportunidades para a aquisição desta competência. Fica clara a necessidade de incluir maior quantidade de exercícios que peçam a descrição do raciocínio empregado, o significado de uma fórmula, ou ainda a crítica a um modelo.

Por outro lado, a falta de iniciativa para desvendar os princípios matemáticos utilizados no processo de construção do mapa de curvas pesquisado reflete um fenômeno já comentado por Carreira (1995, p. 45):

> A matemática analítica é suprimida e substituída pela matemática analógica. Quer dizer, ficam os instrumentos computacionais, as mensagens de computador e as leituras

dos instrumentos analógicos. Quanto mais sucesso tem uma aplicação da matemática, mais automática, rotinada e programada ela se torna.

A matematização na sociedade corresponde à materialização dos objectos e à trivialização dos processos, através da criação de caixas negras cujo funcionamento se torna apenas acessível a um pequeno grupo de peritos.

Ou seja, para o aluno, que se vê como um não-perito, o entendimento de como o mapa foi construído estaria fora de seu alcance. O enunciado admitia inclusive uma resposta especulativa. De novo, nosso interesse não residia no maquinário específico utilizado para produzir o mapa do exemplo escolhido, mas sim na identificação dos aspectos matemáticos relacionados a esta construção.

5.2 Estudo de caso

O item 2 causou surpresa aos alunos e monitores pela gama de possíveis abordagens, e pelo fato de que não havia uma resposta certa para conferir. Isto provocou ansiedade e insegurança nos monitores, que seriam solicitados a tirar dúvidas dos alunos. Em virtude disto, pedimos a dois deles que propusessem e implementassem uma estratégia de solução do item 2, a título de exemplo. Esta solução foi apresentada em uma de nossas *Oficinas de Trabalho* e, além de fornecer um ponto de partida para os demais monitores, serviu para promover a discussão sobre outras possibilidades. Posteriormente, estes dois estudantes apresentaram comunicação em conferência de modelagem e Educação Matemática sobre a estratégia adotada (DRUMMOND; SANTANA, 1999).

A definição da função foi objeto de dificuldades para os alunos. Poucos forneceram uma definição precisa do significado. A maioria (61%) teceu comentários sobre as possíveis interpretações da função, mas não

chegou a descrever seu significado formal em palavras. Destacamos duas, das poucas (11%) definições completas apresentadas, no Quadro 3.

Quadro 3: Interpretações da função cujas curvas de nível estariam representadas no mapa

"Há duas interpretações possíveis para a função f(x,y). A primeira é que f(x,y) determina o *horário* em que a fronteira da mancha atinge o ponto (x,y) do mapa. A segunda interpretação é que f(x,y) determina o *intervalo de tempo* DT = T_f – 6h que a mancha de óleo leva para atingir o ponto (x,y) a partir das seis horas – início do vazamento." F.R. Kawaoka e R. Egas	"... poderíamos interpretar a relação como a função do tempo (em relação a x e y) que a fronteira da mancha de óleo levará para atingir um certo ponto (x,y) localizado sobre a superfície do oceano. As variáveis independentes no caso seriam x e y e a variável dependente seria o tempo t." J.L. Targueta e G.R. Donoso

Em virtude da dificuldade experimentada para definir a função, a interpretação física do vetor gradiente ficou incompleta. O objetivo era que o estudante partisse da definição matemática do gradiente e, acoplando esta definição ao significado estabelecido para a função, fosse capaz de extrair um significado para o vetor gradiente, como feito pelo grupo citado no Quadro 4.

Quadro 4: Definição detalhada da função e seu vetor gradiente

"Em nossa análise, vamos considerar que estas curvas são as curvas de nível de uma certa função do tipo z=f(x,y). Sendo assim, os pares (x,y) nos dão coordenadas geográficas de pontos sobre a terra ou o oceano, dentro do sistema referencial que adotamos, enquanto que o valor z associado a cada ponto (x,y) nos dá o momento em que a mancha atinge tal ponto. Em outras palavras, a função f nos retorna, a partir de um ponto no plano, um valor de tempo associado a ele, no caso o tempo em que a mancha chega ao ponto. Isto posto, podemos interpretar fisicamente o vetor gradiente desta função. Sabemos que o gradiente é um vetor cujas componentes são as derivadas parciais de f em relação a x e a y: $\nabla f=(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. Analisando essas derivadas, percebemos que, em cada uma, temos um diferencial de tempo (∂f) dividido por um diferencial de comprimento (∂x ou ∂y). Isso nos mostra que o gradiente nos dá o tempo que a mancha demora para percorrer

uma unidade de comprimento. Mas essa definição ainda não é completa. Sabemos que o gradiente nos dá a direção de maior crescimento da função a partir de um ponto determinado. Mesclando essa informação com o que já deduzimos, podemos elaborar uma definição melhor: o gradiente da função f em um determinado ponto nos dá a direção e o sentido em que a mancha demora mais tempo para percorrer uma unidade de comprimento. O módulo do gradiente nos diz qual é este tempo. Outra possibilidade de interpretação do gradiente é pela velocidade de propagação da mancha: vemos que o módulo do gradiente, dado em tempo por unidade de comprimento, é o inverso da velocidade instantânea. Ou seja, o vetor gradiente mostra a direção e o sentido da menor velocidade instantânea da mancha em um ponto, sendo que o inverso de seu módulo nos diz qual o valor dessa menor velocidade." H. Gomes e R.A. Monastier

Muitos estudantes (56%) terminaram por queimar etapas, tentando construir uma interpretação para o gradiente sem passar por uma cuidadosa definição da função. Isto levou a interpretações errôneas, como exemplificadas no Quadro 5.

Quadro 5: Interpretações equivocadas para o vetor gradiente

"Se essas curvas são curvas de nível de uma função, então esta função representa a propagação da mancha de óleo no mar com o tempo, e seu vetor gradiente indica a direção e a velocidade máximas da propagação num ponto. Isso porque o vetor gradiente tem componentes dadas pela derivação de um função de espaços em relação ao tempo."	"Admitindo que estas curvas são as curvas de nível de uma função, podemos interpretar seu vetor gradiente como o inverso da velocidade máxima de propagação do óleo, indicando no caso, a direção e o sentido em que o óleo em um dado ponto da curva se propaga o mais rápido possível. ... O vetor gradiente sempre traz nesse caso a noção de taxa máxima de propagação, ou em termos de fluxo, para onde (direção e sentido) o escoamento de óleo é maior em um dado ponto da curva."
"Se parametrizarmos esta propagação em função do tempo, o vetor gradiente nos daria a velocidade com que esta mancha de óleo se expande (ou seja, a vazão volumétrica), ..."	

Outros alunos (39%), guiados por uma análise dimensional, "adivinharam" parte da interpretação (trechos à direita no Quadro 6), mas

raros (6%) conseguiram fornecer uma explicação fundamentada (texto à esquerda no Quadro 6).

Quadro 6: Outras interpretações para o vetor gradiente

"Como o vetor gradiente, por definição, nos apresenta a taxa máxima de variação para qualquer função a partir de determinado ponto, temos, para este vetor gradiente, a informação da taxa máxima de minutos necessária para avançar cada quilômetro a partir de um determinado ponto no mapa. R.P. Navarro e B.M. Freitas	"Assim obtemos o significado físico do vetor gradiente, que é o inverso da velocidade, ..."
	"O gradiente de f(x,y) representa, em (x0,y0), a taxa instantânea de passagem do tempo por deslocamento na superfície do mar do segmento da fronteira da mancha passando em (x0,y0)."

O retorno desta parte do projeto permite concluir que faltou no enunciado uma ênfase maior ao que estava sendo solicitado. De fato, por não terem sido explicitadas como um item, vários alunos (função: 28%, gradiente: 17%) sequer comentaram estas questões, passando diretamente para a resolução do item 2a. As dificuldades encontradas mostraram que este exemplo é muito pertinente para a discussão dos significados dos conceitos de curva de nível e vetor gradiente. É interessante observar como a intuição física e geométrica pode ajudar, quando o significado da função foi percebido, mesmo que intuitivamente, ou atrapalhar, quando esta etapa, de pensar sobre a função, foi omitida.

Um aluno preparou uma simulação do acidente, a partir dos dados fornecidos pelo seu mapa. O Quadro 7 ilustra e resume sua definição da função que corresponderia a tal conjunto de curvas de nível. Sua abordagem para responder às demais questões do item 2 baseou-se na modelagem representada pela figura da direita.

Quadro 7: Simulação do acidente e aproximação das curvas

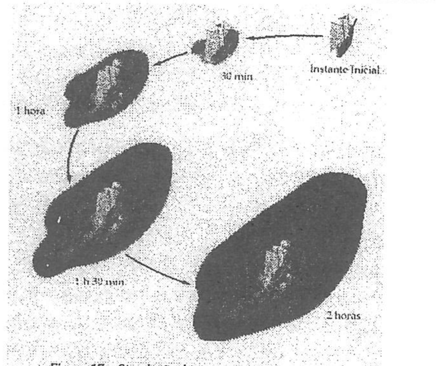
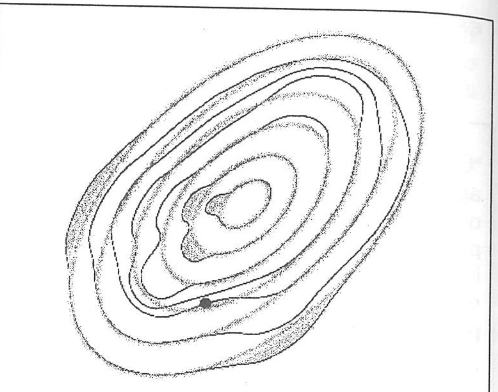


Figura 17 - Simulação da propagação da mancha de óleo.

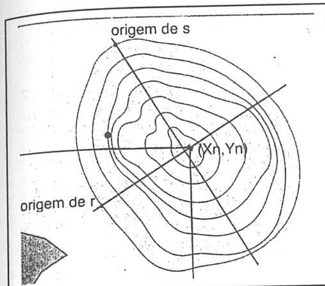


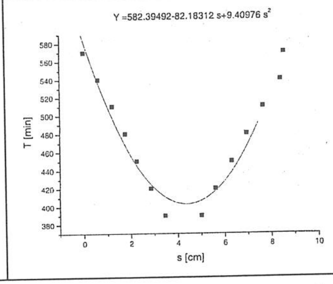
A figura da esquerda acima mostra a evolução do acidente, com a mancha aumentando em torno do navio: "se fotografássemos a mancha de óleo de meia em meia hora teríamos algo parecido com a figura 17 que ilustra como se aplica o significado da função que trabalhamos". As curvas são aproximadas por elipses na figura da direita.

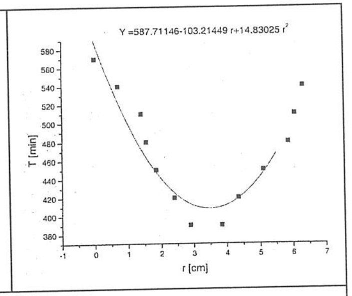
A.C. Souza

Várias estratégias foram sugeridas para responder à pergunta 2a, onde se encontrava o navio às 6h da manhã. Um exemplo envolvendo ajuste polinomial pode ser encontrado no material resumido no Quadro 8.

Quadro 8: Estabelecendo a posição do navio no início do vazamento







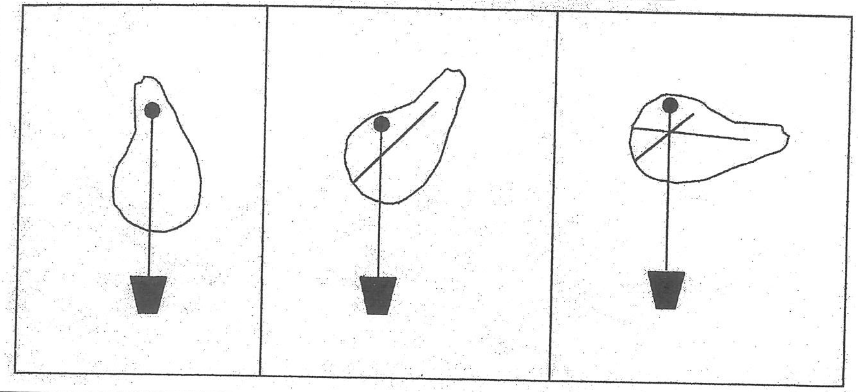
Os alunos escolheram o eixo coordenado s indicado na figura da esquerda, com origem na interseção com a curva de nível mais externa. Mediram as posições de cada interseção deste eixo com as curvas de nível. Plotaram estas posições (expressas em cm) em relação ao tempo (expresso em minutos) correspondente a cada curva. Ajustaram os pontos no gráfico da figura central por uma parábola, obtida por regressão polinomial. O ponto de mínimo da parábola corresponderia à posição do navio no início do vazamento. Passaram então um eixo r, perpendicular a s, por este ponto, e repetiram o procedimento. O novo ponto de mínimo foi considerado então uma melhor aproximação para a posição do navio.

P.H.L. Faria e L.A.V. Regis Filho

A maioria dos grupos (83%) utilizou o conceito de centróide para justificar a resposta de 2a. Os alunos supuseram plausível que o navio estivesse inicialmente no centróide da região plana delimitada pela curva de nível mais interna. Selecionamos três abordagens que utilizam métodos diferentes para determinação deste centróide, apresentadas nos Quadros 9, 10 e 11.

Quadro 9: Calculando o centróide pelo método do prumo

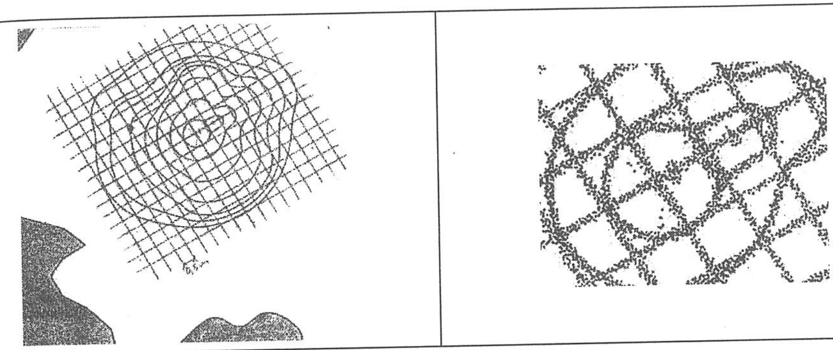
FIGURA 1 – MÉTODO DO PRUMO



Os alunos fizeram em cartolina uma cópia aumentada da região delimitada pela curva de nível mais interna e utilizaram o método do prumo para achar geometricamente o centróide desta região. A figura acima descreve pictoricamente o procedimento. O objeto é pendurado por três pontos diferentes. O centróide está na interseção das três linhas determinadas pelo fio de prumo. Na verdade duas linhas seriam suficientes, mas utilizando três tem-se um procedimento mais robusto.

M.A. Pudenzi e L.V. Machado

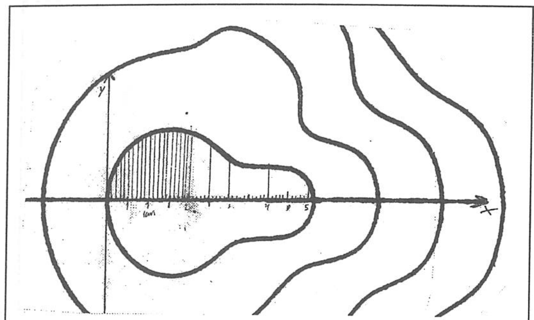
Quadro 10: Calculando o centróide como média de centróides de figuras conhecidas

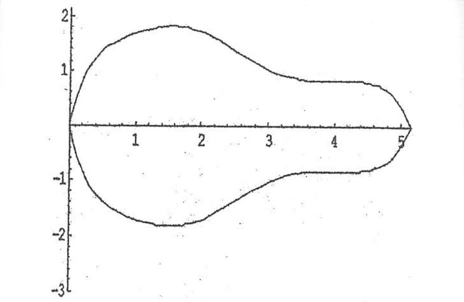


Devido ao seu formato, a região delimitada pela curva de nível correspondente às 6h foi aproximada pela união de duas regiões: a primeira delimitada por uma circunferência e a segunda, por uma elipse. A figura da esquerda mostra as curvas e o quadriculado que foi sobreposto para localização. No detalhe à direita vemos ampliada a região de interesse. Os centróides destas duas regiões localizam-se em seus centros de simetria. O centróide da região total pode ser obtido como uma média dos dois centróides, ponderada pelas frações das áreas das regiões pela área total.

M.G.G. Lopes e T.M. Dias

Quadro 11: Cálculo analítico do centróide





Foi adotado um sistema de referência cujo eixo *x* constituísse o eixo de simetria da região delimitada pela curva mais interna. O intervalo no eixo *x* delimitado pela curva foi particionado em 54 subintervalos de mesmo comprimento, conforme figura da esquerda. Utilizou-se um polinômio de grau nove para ajustar os pontos na metade superior da fronteira da região correspondentes a esta partição. Os gráficos do polinômio e seu simétrico com relação ao eixo *x* estão desenhados na figura da direita. A área e o centróide foram então obtidos analiticamente, com integração do polinômio.

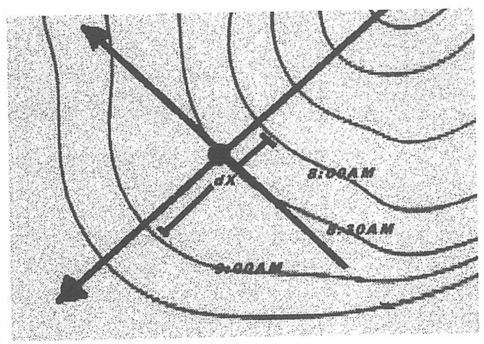
R.P.Navarro e B.M. Freitas

Nota-se que, apesar do ponto de partida comum, os três grupos utilizaram recursos diferentes do ferramental matemático do qual já tinham se apropriado para o cálculo do centróide. A mesma informação e teoria foram utilizadas de maneiras diferentes, evidenciando criatividade e indicando com quais instrumentos o estudante se sentiu mais à vontade para trabalhar e criar.

A estimativa do vetor gradiente no ponto indicado no mapa, item 2b, poderia ser considerada uma tarefa mais mecânica, pois a referência *Cálculo e Geometria Analítica*, vol. 2, de Al Shenk, mencionada na Parte I, traz exemplos resolvidos e praticamente fornece uma receita para fazer tal estimativa. Apesar disso, a falta de reflexão sobre os pontos preliminares do item 2 (definição e interpretação da função) levou a 28% de estimativas

incorretas, 6% de estimativas ambíguas (incompletas), 22% de corretas, porém contraditórias com a interpretação feita anteriormente e 44% corretas e compatíveis com a definição prévia. Um quarto dos grupos (25%) fez apenas a parte gráfica do procedimento (desenho mostrando retas tangente e normal à curva de nível no ponto assinalado, ilustrada no Quadro 12). A maioria (64%) foi além, efetuando parte dos cálculos pertinentes, com base na parte gráfica e na orientação presente na referência. Porém, a transposição do significado do desenho para uma expressão algébrica e/ou numérica juntamente com a finalização correta (incluindo utilização de unidades e interpretação do resultado) foi feita com sucesso por apenas 8%.

Quadro 12: Estimativa do vetor gradiente

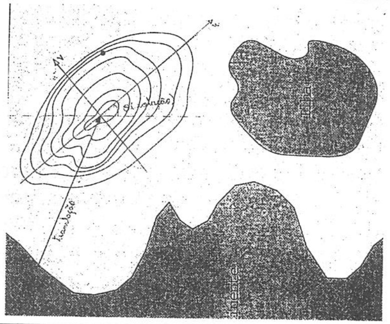


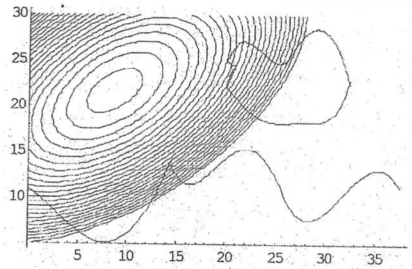
G.Levin e A. Rizzo

As retas indicadas consistem no sistema de referência escolhido pelo grupo. Embora não siga a orientação usual, é um sistema conveniente para expressar o gradiente pois a reta tangente à curva é o eixo y e o eixo x aponta na direção do gradiente. Os alunos mediram o segmento designado por "dX" na figura e utilizaram a escala fornecida na figura para calcular a distância correspondente em quilômetros. Como este segmento mede a distância entre as curvas correspondentes a 8h e 9h ao longo da reta indicada, o módulo do vetor gradiente no ponto foi estimado como a fração 1/dX h/Km.

As estratégias adotadas para estimar qual o primeiro ponto da costa a ser atingido pela mancha, item 2c, podem ser agrupadas em três linhas principais: (i) graficamente, desenhando à mão-livre curvas que se assemelhassem ao padrão das já existentes (ver Quadro 14); (ii) aproximando as curvas por elipses ou circunferências (de acordo com a geometria do mapa em questão), conforme já ilustrado na figura à esquerda do Quadro 7 e no Quadro 13; (iii) extrapolando o comportamento das curvas ao longo de retas pré-determinadas segundo critério visual de pontos candidatos a serem primeiramente atingidos (estratégia ilustrada nos Quadros 14 e 15. A estratégia (i) foi utilizada em 11% dos trabalhos; a (ii), em 19% e a (iii) em 64%, sendo esta última a que apresentou maior diversificação na implementação (escolha de retas e métodos de extrapolação distintos).

Quadro 13: Estratégia de aproximação das curvas de nível por elipses





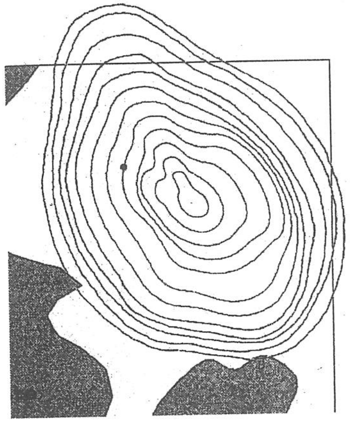
H. Gomes e R.A. Monastier

Os estudantes escolheram um sistema de referência conveniente, de modo que pudessem assumir que a função correspondente às curvas fosse da forma z=ax2+by2 (os eixos coincidem com os semi-eixos das elipses). Vários pontos sobre as curvas foram colhidos e os parâmetros a e b foram obtidos, minimizando-se a soma dos quadrados dos erros.

Os litorais da ilha e do continente foram modelados por polinômios.

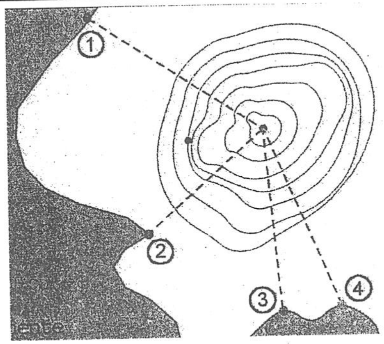
Para calcular o primeiro ponto a ser atingido foram traçadas curvas de nível a intervalos de uma hora. O ponto de contato foi estimado visualmente e o instante exato obtido por um cálculo algébrico. A figura da direita foi incluída como curiosidade para descrever "o que aconteceria se a mancha continuasse a se expandir da maneira prevista durante um dia".

Quadro 14: Estratégia "mão-livre" (esquerda) e extrapolação (direita)



Foram traçadas à mão-livre cinco curvas de nível que, de alguma forma imitassem as originais. Dois pontos parecem ser atingidos simultaneamente, um no continente e outro na ilha.

F.P. Benjovengo e G.V. Castilho



Quatro pontos candidatos são escolhidos e as retas ligando estes pontos à posição inicial "N" do navio são traçadas. A velocidade média da mancha ao longo de cada reta é calculada, dividindo-se a distância de "N" até a curva mais externa pelo tempo correspondente. Os tempos para atingir os pontos indicados são calculados supondo-se que a mancha percorre a distância restante com a respectiva velocidade média calculada.

A.Y. Kawase e M.P. Pavanelli

O Quadro 15 apresenta uma estratégia do tipo (iii), que consiste em supor a velocidade de propagação da mancha em cada uma das direções escolhidas igual à média observada nas medidas disponíveis nestas mesmas direções.

Quadro 15: Estimando o primeiro ponto da costa a ser atingido pela mancha

"Determinou-se um centro para a mancha e traçou-se quatro retas, conforme a Figura 9. Em cada reta, fez-se o seguinte: com o auxílio da reta, mediu-se a distância entre cada curva sobre a reta. Fez-se a média das distâncias. Com esse valor, desenhou-se os pontos coloridos sobre a reta. Feito isso com todas as retas, ligou-se os pontos coloridos, formando pedaços de novas curvas de nível.

Observando a figura conclui-se que a mancha atingirá a costa entre 11h e 11:30h."

J.C.M. Ferreira e W.H. Lai

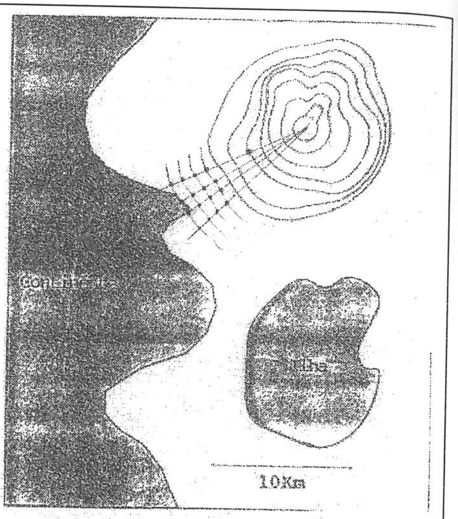


Figura 9. Mapa para estimar o instante em que a mancha atingirá a costa através do 1º método.

5.3 Criando um novo estudo

Embora neste item do projeto esperássemos novas contribuições dos alunos, percebemos que em poucos trabalhos (8%) houve introdução de novos elementos na formulação das perguntas. Foi freqüente (40%) uma reprodução de questões como as do item 2, ou então uma simples leitura do mapa pesquisado (44%). Alguns equívocos foram cometidos (6%) e o restante (2%) não fez este item.

Para responder às perguntas formuladas o padrão já descrito se manteve: apenas 6% dos alunos foi além em sua análise; 36% responderam suas perguntas de maneira análoga ao feito no item 2; 42% simplesmente

leram o mapa; houve equívoco em 14% dos projetos e 2% não fizeram este item.

Acreditamos que este caráter de simples adaptação e pouca inovação foi influenciado por nossa solicitação de que o aluno formulasse e respondesse "perguntas pertinentes ao contexto e *semelhantes* às formuladas no item 2". Seria necessário que o enunciado fosse mais explícito no direcionamento esperado para a elaboração deste estudo, contemplando termos como *exploração*, *questionamento*, *risco*, *aventura*, tão bem empregados por Morin (1990, p. 27) para o significado da palavra investigação. Deve-se, no entanto, reconhecer que aqui residia o maior desafio do projeto, pois criar novos problemas exige confiança para ousar, resultado de maturidade, conhecimento e familiaridade não só com a Matemática, mas também com o assunto escolhido. Isto é evidenciado por alguns alunos ao justificarem a opção feita (ver Quadro 16).

Quadro 16: Justificativa para a escolha do problema

"Escolhemos este mapa devido ao grande interesse de um dos membros pela Geografia. Além disto, pela maior familiaridade que temos com curvas de nível em mapas topográficos, sentimo-nos mais seguros para "ousar" um pouco mais na nossa análise."

F.R. Kawaoka e R. Egas

Outros autores apontam a dificuldade, ou falta de confiança, que estudantes têm para aplicar conceitos recém-adquiridos a situações novas (ver, por exemplo, ELLERTON; CLARKSON, 1996, e suas citações). Embora muitos defendam a proposição de questões abertas e tarefas sem um objetivo fixo (*goal-free tasks*), pelo seu apelo intuitivo e a aparente flexibilidade que permite introduzir no ensino e aprendizagem da Matemática, a efetividade desta prática e detalhes de sua implementação devem ser ainda objetos de rigorosas investigações.

> Em geral, a actividade de ensino de cunho investigativo não tem sido sujeita a um escrutínio sério quer no que diz respeito ao papel da formulação de problemas no ensino, quer ao impacto a longo prazo da investigação sobre os alunos. (SILVER, 1996, p. 147).

Também é preciso considerar que abordagens deste tipo implicam numa perda de controle por parte do professor diversa daquela descrita por Borba e Penteado (2001), já mencionada na seção 3. Apesar da perspectiva promissora de ampliação do panorama do ensino e aprendizagem de Matemática, o processo do instrutor tornar-se guia, facilitador e coordenador está cercado de desafios e tensões. De fato,

> Pontos de partida vagos requerem sofisticação e confiança matemática por parte dos professores. Quando a confiança reside nos factos matemáticos que são conhecidos, nas técnicas que são automatizadas para lidar com os "problemas" padronizados, é difícil abrir, arriscar e trabalhar com os estudantes, em vez de perante os mesmos. Quando a confiança reside na sua percepção matemática, na sua intuição e consciência dos processos básicos de raciocínio matemático, é mais fácil seguir o que os estudantes estão a fazer, pressioná-los a encontrar uma suposição, ajudá-los a especializar e a generalizar. (...) Os professores parecem frequentemente inibidos em perder o controle matemático, em expor a sua matematicidade, ao colocarem publicamente questões para as quais não sabem nem a resposta, nem a técnica. Este facto não é surpreendente, se a percepção dominante da matemática é a de questões com respostas fixas (MASON, 1996, p. 84–85).

Compartilhamos com John Mason a crença de que a Matemática abordada via resolução de problemas de resposta aberta pode ganhar novos adeptos e influenciar atividades, comportamentos e opiniões de professores, desde que tal estratégia esteja associada a experiências ricas e amplamente divulgadas, de modo a conquistar tanto professores quanto estudantes. De qualquer forma,

> Vale ressaltar que um curso, uma palestra ou um artigo contendo definições e/ou resultados positivos de trabalhos realizados não são suficientes para se pôr em prática, num primeiro momento a modelação, com todas as turmas e alunos de que o professor dispõe. Habilidade e segurança só se ganham com a experiência. Uma experiência que deve ser feita de forma gradual, em consonância com o tempo disponível que se tem para planejar (BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p. 29).

6. Conclusões

O projeto procurou desenvolver o tema *Curvas de nível* no contexto do incidente de vazamento de óleo de um navio petroleiro. Embora não possa ser chamada de feliz, a coincidência dos vazamentos ocorridos em 2000 e 2001, sem dúvida, serviu para enfatizar a ligação entre a Matemática e a vida real para os alunos que fizeram o projeto no segundo semestre de 1999.

Destacamos que um dos objetivos da Parte I foi trabalhar os conceitos apresentados no curso, sem preocupações ou expectativas com relação a modelos matemáticos mais sofisticados, envolvendo dinâmica de fluidos, que costumam ser adotados neste tipo de estudo. As estimativas solicitadas deviam apenas ser embasadas em alguma argumentação de cunho matemático. Pediu-se também que o aluno utilizasse a experiência adquirida para investigar, propor e resolver questões semelhantes em outros contextos. Na compilação e análise do material produzido pelos alunos, detectamos os seguintes obstáculos: a descrição em palavras do significado do mapa, do significado da função, a interpretação física do vetor gradiente, e a criação de novos estudos. Isto evidencia a necessidade de trabalhar mais o uso da linguagem escrita no ensino da Matemática, em paralelo com atividades que permitam o exercício da criatividade no cenário matemático.

Vale a pena repetir a nossa percepção decorrente dos resultados obtidos: ao solicitarmos descrições em palavras e interpretações, devemos ser bastante claros e enfáticos. Além disso, a demanda por trabalhos criativos deve ser explícita, para evitar simples adaptações ou reproduções, procurando estimular as iniciativas inovadoras no enunciado.

É gratificante notar como o projeto sensibilizou vários alunos para a relevância e possibilidades de aplicações da Matemática — compreendendo não só o corpo de conhecimentos matemáticos, mas também a forma de raciocínio empregada — a problemas reais. O Quadro 17 traz os comentários de dois grupos a este respeito.

Quadro 17: Impressões finais dos alunos

"Esta parte do projeto – Curvas de Nível – nos mostrou quão importante esta ferramenta matemática é para a vida prática, tendo muitas aplicações, desde meteorológicas até medicinais, e é claro, em Engenharia, Física e outras ciências. Vale salientar que ainda hoje (21/11/99), antes das edições finais neste trabalho, observou-se no canal Discovery em um programa sobre combates a incêndios, como previsões sobre o comportamento do fogo através de curvas de nível poderiam salvar imensas áreas florestais e até vidas dos bombeiros em combate." A.A. Torres e L.R.B. de Campos	"Sobre a questão do navio, valeu pelo incentivo à criatividade, já que, usando princípios matemáticos e do Cálculo em si, nos vemos obrigados a descobrir maneiras de solucionar um problema que poderia ser real." E.A. de Souza e M.D. Erthal

A experiência do pré-projeto foi muito positiva e sugere a adoção desta prática em todas as turmas no futuro. Notamos a necessidade de maior interação dos professores e monitores com os alunos no decorrer do trabalho no projeto e de acrescentar uma apresentação oral final, como na Mostra. Esta interação não pode se resumir em uma disponibilidade de atendimento,

mas tem que ser planejada e prevista oficialmente, estabelecendo-se datas para discutir o andamento do projeto.

A qualidade dos projetos apresentados parece indicar que o objetivo de favorecer a desenvoltura para a realização de pesquisas científicas foi alcançado. Apesar da intensa troca de idéias entre as diferentes duplas, o que muitas vezes resulta em soluções muito parecidas, os alunos se sentiram desafiados e demonstraram empenho em produzir soluções originais e criativas. A propósito, percebemos que o trabalho cooperativo incrementou a integração da turma, uma característica já evidenciada neste grupo de alunos em especial.

Sem dúvida há um longo caminho a trilhar. O trabalho de projetos não está mapeado e as possibilidades de desdobramentos são grandes. Além disso, embora já venha sendo utilizada em vários contextos, a atividade de modelagem associada ao uso de informática merece atenção e análise cuidadosa pela comunidade de pesquisadores em Educação Matemática[4]. Acreditamos que esta comunidade possa lucrar com a descrição, os resultados e as reflexões sobre nossa experiência com este projeto. Por meio deste texto, além de compartilhar, com os colegas professores de Matemática e pesquisadores, o crescimento alcançado por nós, autoras, ao sistematizarmos nossas reflexões acerca de nossa prática nas várias etapas deste projeto, gostaríamos de convidá-los a trilharem também este caminho. É incontroverso que os desafios e questionamentos desencadeados por projetos, para alunos, monitores e professores, podem proporcionar oportunidades ímpares de trabalho (árduo!) para todos os envolvidos. Na

[4]Ver, por exemplo, o detalhamento da linha de investigação do GPIMEM, Grupo de Pesquisa em "Informática, Outras Mídias e Educação Matemática", Unesp, Rio Claro, SP, em Penteado et al (1998), e os trabalhos de Villarreal (1999) e Araújo (2002).

nossa opinião, os frutos desta empreitada são extremamente compensadores.

Agradecimentos: Este trabalho não teria sido possível sem o auxílio de todos os participantes do *Cálculo com Aplicações* do segundo semestre de 1999, professores, monitores e alunos. Agradecemos aos alunos pelo entusiasmo e pelos lindos e criativos projetos, assim como pela autorização para transcrever trechos de seus trabalhos e aos monitores e professores pelas sugestões, encorajamento e frutíferas trocas de idéias. Agradecemos também à professora Valéria de Carvalho e aos revisores pela cuidadosa leitura do manuscrito e valiosas sugestões, que contribuíram para o aprimoramento deste artigo.

Referências bibliográficas

ABRANTES, P. *Trabalho de projecto e aprendizagem da Matemática. Manuscrito*, 17p. Trabalho apresentado no II CIBEM — Blumenau, Brasil, julho de 1994.

ABRANTES, P. Matemática, Realidade e trabalho de projecto num ambiente de inovação curricular. In: MATOS, J.F., AMORIM, I., CARREIRA, S., MOTA, G., SANTOS, M. (orgs.). *Matemática e Realidade: Que papel na Educação e no Currículo?*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências na Educação (Secção de Educação Matemática), 1995a. p. 77-123.

ABRANTES, P. *Avaliação e Educação Matemática: Série Reflexões em Educação Matemática*. Volume I. Rio de Janeiro, R.J.: MEM/USU GEPEM, 1995b. 88p.

ARAÚJO, J.E. *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As Discussões dos Alunos*. 2002. Tese (Doutorado) – PGEM, IGCE, UNESP, Rio Claro.

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2002, 127p.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001, 98p.

CANTÃO, R.F. *Modelagem e Simulação Numérica de Derrames de Óleo no Canal de São Sebastião, SP*. 1998. 53p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – IMECC, Unicamp, Campinas.

CANTÃO, R.F.; DE OLIVEIRA, R.F.; MEYER, J.F.C.A. Numerical simulations of an oil spill accident in Guanabara Bay, Rio de Janeiro, Brazil. In: MARTINEZ, R.G.; BREBIA, C.A. (eds.). *Environmental Coastal Regions II*. Southampton, Boston: WIT Press, 2000.

CANTÃO, R.F.; MEYER, J.F.C.A. Oil Spill Accidents off the Coast of São Paulo State: History, Modelling and Simulations. In: DUBOIS, D.M. (ed.). *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, vol. 9, Bélgica: ASBL CHAOS, Université de Liège, 2001. p.204-214.

CARREIRA, S.P. A matematização na natureza e na sociedade: Uma forma de encarar a relação Matemática-Realidade. In: MATOS, J.F. et al. (orgs.). *Matemática e Realidade: Que papel na Educação e no Currículo?* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências na Educação (Secção de Educação Matemática), 1995, p.25-70.

COSTA, S.; GROU, M. A. La Enseñanza del Cálculo – Una Cuestion de Involucramiento. *Revista Educación Matemática*, 7, p. 100-107, 1995.

DRUMMOND, A.; SANTANA, L.A.R. *Desenvolvimento de modelo matemático simples para resolução de casos práticos envolvendo curvas de nível.* Trabalho apresentado na I Conferência Nacional em Modelagem e Educação Matemática, Rio Claro, SP, 1999. 351p.

EDWARDS, C.H., Jr. *The Historical Development of the Calculus*, New York: Springer-Verlag, 1979. 351p.

ELLERTON, N.F.; CLARKSON, P.C. Language Factors in Mathematics Teaching and Learning. In: BISHOP, A.J. et al (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 987-1033.

FIGUEIREDO, V. L.; SANTOS, S.A. Relato de Experiência: O Computador no Ensino de Cálculo: O Problema do Lixo na Unicamp e outras Aplicações. *Zetetiké*, Campinas, vol 5, n. 7, p. 111-128, 1997.

HUANG, J.Y.C. Water pollution, Microsoft Encarta 96 Encyclopedia, EUA, 1993–1995, Microsoft Corporation, versão 1996. CD-ROM.

MASON, J. Resolução de Problemas Matemáticos no Reino Unido: Problemas Abertos, Fechados e Exploratórios. In: ABRANTES, P.; LEAL, L.C.; PONTE, J.P. (orgs.). *Investigar para Aprender Matemática* (*textos seleccionados*). Lisboa: Matemática para Todos — investigações na sala de aula e Associação de Professores de Matemática, 1996. p. 73-88.

MEYER, J.F.C.A. Derrames de Petróleo em Águas Costeiras: Modelagem Matemática e Simulação Numérica. *III Simpósio de Ecossistemas da Costa Brasileira*, Serra Negra, SP, p. 238-247, 1993.

MEYER, J.F.C.A.; CANTÃO, R.F.; POFFO, I.R.F. Oil Spill Movement in Coastal Seas: Modelling and Numerical Simulations, In: BREBBIA, C.A. (ed.). *Oil Spill 98*. Southampton: Comp. Mech. Publ., 1998. p. 76-87.

MONTEIRO, A.; POMPEU Jr., G. *A matemática e os temas transversais*. São Paulo: Editora Moderna Ltda, 2001. 160 p.

MORIN, E. *Ciência com Consciência*. Nova Edição, Revista e Aumentada. Biblioteca Universitária 32. Trad.: M.G. de Bragança e M.G. Pinhão. Título original: Science avec conscience. Portugal: Publicações Europa-América Ltda, 1994. 263 p.

PENTEADO, M.G.; BORBA, M.C.; GRACIAS, T.S. Informática como veículo para mudança. *Zetetiké*, Campinas, vol 6, n. 10, p. 77-86, 1998.

SANTOS, V.M.P. (coord. e org.) *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos*. IM-UFRJ, Projeto Fundão – Setor Matemática - SR1, SR2, SR5/UFRJ – SPEC/PADCT/CAPES, CNPq e FNDE. Rio de Janeiro, 1997. 220 p.

SILVER, E.A. Acerca da Formulação de Problemas de Matemática. In: ABRANTES, P., LEAL, L.C., PONTE, J.P. (orgs.), *Investigar para Aprender Matemática (textos seleccionados)*. Lisboa: Matemática para Todos — investigações na sala de aula e Associação de Professores de Matemática, 1996. p. 139-162.

SOUZA JUNIOR., A.J. *Trabalho Coletivo na Universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral*. 2000. 323 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – FE, Unicamp, Campinas.

VILLARREAL, M.E. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. 1999. Tese (Doutorado) – PGEM, IGCE, UNESP, Rio Claro. Ver Resenha em *Bolema*, Rio Claro, vol 15, n. 17, p. 127-134, 2002.