O conceito de função em situações de modelagem matemática

Dirceu dos Santos Brito[*] ; Lourdes Maria Werle de Almeida[**]

Resumo: Este trabalho ilustra como os alunos concebem o conceito de função em situações de modelagem matemática. Analisamos a influência do contexto dessas situações sobre o modo como os alunos constroem o conceito de função. Concluímos que, em situações de modelagem matemática, os alunos percebem o valor instrumental da matemática e constroem uma visão dinâmica do conceito de função, percebendo-o no seu aspecto variacional, como relação entre variáveis e não apenas como um conjunto de pares ordenados.

Palavras-chave: Educação matemática; modelagem matemática.

The function concept in mathematical modeling situations

Abstract: This work illustrates how students conceive the function concept in mathematical modelling situations. The influence of the context of those situations and the way as the students build the function concept is analyzed. We concluded that, in situations of mathematical modelling, the students notice the instrumental value of mathematics and they built a dynamic vision of the function concept, as a relation among variables and not just like a group of orderly pairs.

Key words: Mathematical education; mathematics modelling.

1 – Introdução

Uma dificuldade, comumente enfrentada por professores de matemática, consiste em tornar compreensíveis conceitos que foram sendo construídos ao longo de muitos anos e cuja sistematização atual os distancia da linguagem empregada pela maioria das pessoas em seu cotidiano. Diante

[*] Aluno do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. dirceumestrado@yahoo.com.br.

[**] Professora do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. lourdes@uel.br.

dessa dificuldade, duas saídas “clássicas” podem ser colocadas. A primeira consiste em apresentar os conceitos matemáticos, mantendo fidelidade à linguagem na qual esses conceitos são atualmente sistematizados. Todavia, uma das possíveis conseqüências dessa saída é que as pessoas “aprendam” a operar com a linguagem, sem compreender a que ela se refere. A segunda saída para contornar essa dificuldade consiste em “simplificar” a apresentação dos conceitos matemáticos, despindo-os da linguagem e do rigor em que são expressos no nível científico e vestindo-os de uma linguagem intuitiva, beirando o coloquial. Com isso, espera-se aproximar a matemática da linguagem cotidiana, facilitando sua compreensão. No entanto, tratar de modo simplificado um corpo de conhecimentos rico em sutilezas pode acabar por fazer com que ele se torne ininteligível, pela excessiva ambigüidade das definições.

O ensino do conceito de função parece exemplificar essa discussão. Diversos estudos têm mostrado que professores e alunos apresentam obstáculos diversos ao lidarem com funções (ZUFFI, 2001; MACHADO, 1998; SIERPINSKA, 1992). Esses obstáculos são evidenciados, em boa parte desses estudos, pela diversidade de conceituações que alunos e professores manifestam.

Nosso trabalho discute uma possibilidade de lidar com esse problema, analisando a produção de significado para o conceito de função, a partir de situações de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula. As questões que norteiam este estudo são: Como os alunos concebem a matemática e o conceito de função que empregam em situações de modelagem matemática? Como as situações de modelagem influenciam na significação do conceito de função?

2 – Modelagem matemática na educação matemática

A matemática, como atividade humana, tem seu desenvolvimento imbricado nos problemas oriundos da vida social. Neste sentido, Caraça coloca que:

> Sem dúvida que a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro ramo qualquer da ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre (CARAÇA, 2000, p. 23).

Nesse mesmo sentido, D'Ambrosio (2003) afirma que a origem das idéias matemáticas é resultado de um processo que procura explicar e entender fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas idéias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações da realidade. Tais representações constituem o que se costuma chamar de "modelos matemáticos", cuja obtenção, aplicação e avaliação compõem a modelagem matemática.

Assim, modelos matemáticos constituem formas de representação da realidade. Tabelas, relações funcionais, gráficos, figuras geométricas são alguns exemplos de modelos matemáticos. Nosso trabalho debruça-se sobre a idéia de que muitos exemplos de modelos matemáticos incluem usualmente o uso de variáveis e relações entre essas variáveis que podem ser expressas por meio de funções reais.

No âmbito da educação matemática, diversos estudos têm apontado a possibilidade de se utilizar a modelagem matemática como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática, visando relacionar as temáticas escolares com a realidade (ALMEIDA; BRITO, 2003; BORSSOI; ALMEIDA, 2002; ALMEIDA e DIAS, 2004; BLUM e NISS, 1991; CARREIRA, 2001; DOERR, 2003; BARBOSA, 2001).

Embora o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em sala de aula não se expresse necessariamente por meio de esquemas explicativos, envolve, comumente, um conjunto de ações que vão desde a definição de uma situação-problema, identificação e seleção de suas variáveis mais importantes, elaboração de hipóteses simplificadoras, obtenção de um modelo matemático e resolução do problema por meio de procedimentos adequados. Todo esse conjunto de ações deve desembocar na análise do modelo obtido, na qual são confrontadas as soluções com os dados reais observados. Esse confronto pode sugerir a complementação ou o aperfeiçoamento do modelo, conferindo um caráter essencialmente dinâmico à atividade. Todavia, quando desenvolvidas em sala de aula, onde tarefas distintas cabem ao professor e aos alunos, não se pode estabelecer uma seqüência rigorosa para essas ações e, muitas vezes, nem mesmo se consegue distingui-las.

No âmbito da educação matemática, assumem grande importância a obtenção e a validação dos modelos matemáticos. Quando usadas como alternativa pedagógica, na modelagem matemática

> [...] o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas em que o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado [...]. Mais importante do que os modelos obtidos são o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive (BASSANEZI, 2002, p.38).

Diversas experiências de modelagem matemática têm sido conduzidas em sala de aula, tanto no Brasil quanto no mundo (GALBRAIGTH, 1995; BARBOSA, 2001; VERSCHAFFEL; CORTE, 1997; JONES, 1997; CURY, 2003; ALMEIDA e DIAS, 2004, entre muitos outros). O modo como são conduzidas essas experiências reflete, muitas vezes, a necessidade de adequação às especificidades do contexto escolar e também as concepções sobre o papel da modelagem no currículo. O que se pode perceber é que, em geral, a matemática do programa escolar pode surgir à medida que se vai lidando com os problemas. Nessa forma de organização do trabalho "o programa vai sendo desenvolvido à medida que o problema exige novos conceitos" (BASSANEZI, 1990, p.147).

No Paraná, algumas experiências têm mostrado a viabilidade de se trabalhar com modelagem no ensino de matemática em cursos regulares, nos diferentes níveis de ensino. Nessas experiências têm-se adotado a idéia defendida por Almeida e Dias (2004), de que o envolvimento dos alunos nas atividades de modelagem deve se dar de forma gradativa, respeitando diferentes momentos.

Em um primeiro momento são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático a partir de uma situação-problema já estabelecida e apresentada pelo professor. A formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto por todos os alunos e pelo professor. Podemos observar que, neste momento, a atividade é dirigida pelo professor e visa proporcionar aos alunos o primeiro contato com o processo de modelagem e não simplesmente a apresentação de um modelo. Assim, é preciso justificar e analisar as escolhas e hipóteses feitas, bem como avaliar a adequação do modelo ao problema em estudo e as conclusões fundamentadas nesse modelo.

Posteriormente, uma situação-problema já reconhecida, aliada a um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação. A seguir, validam o modelo encontrado. É quando um conjunto de informações obtidas de uma situação, preferencialmente "extramatemática", conduz a sistematização de um modelo matemático pelos alunos. O professor assume um papel de orientador, no sentido de oferecer esclarecimentos e estimular o aluno a desenvolver as estratégias de resolução. No entanto, levando em consideração que o professor já conhece o problema, em geral não há grandes surpresas em relação aos conceitos matemáticos necessários. Além disso, o professor pode se organizar no sentido de que novos conceitos sejam ou não introduzidos.

Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem, com a orientação do professor, uma modelagem matemática a partir de um tema escolhido por eles. Este momento envolve a construção de modelos a partir de um problema de interesse do aluno. Assim, nem sempre é possível prever os conteúdos que serão necessários para resolver o problema, e podem ser obtidos modelos de diferentes níveis de complexidade. Os conceitos usados podem ser conhecidos, ou não. Se não o forem, o momento deve ser aproveitado para introduzi-los e somente depois prosseguir com a atividade de modelagem. Isto faz com que o aluno perceba a utilidade da matemática e se torne capaz de aplicar conceitos em situações diversas. Como bem salienta D’Ambrosio (1986),

> [...] o ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino (p 44).

Este encaminhamento às atividades de modelagem matemática tem se mostrado bastante adequado na prática de sala de aula, em diferentes níveis de ensino, e proporciona ao aluno uma compreensão do processo de modelagem, da resolução dos problemas em estudo e a reflexão sobre as soluções encontradas.

Ferruzzi (2003), por exemplo, desenvolveu, com alunos de uma disciplina do curso superior de tecnologia, diversas atividades tendo como objetivo o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Inicialmente realizou uma série de atividades "dirigidas" com os alunos, envolvendo os conteúdos do programa e, em seguida, os alunos realizaram, de forma independente, trabalhos com temas escolhidos por eles.

Em outro trabalho, Borssoi (2004) desenvolveu com alunos do curso de Química uma série de atividades de modelagem para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias. Após as atividades iniciais, os alunos escolheram alguns temas e desenvolveram trabalhos de modelagem de forma independente, trabalhando com os diferentes tipos de equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem.

A proposta de ensino — desenvolvida em Brito (2004) — que aplicamos com duas turmas do Ensino Médio e aqui apresentamos, adota essa perspectiva na condução da modelagem em sala de aula, envolvendo as funções elementares (linear, afim, quadrática, exponencial e logarítmica).

Neste trabalho, no entanto, a ênfase está em investigar como as situações de modelagem matemática em sala de aula podem favorecer a atribuição de sentido e construção de significado matemático na escola.

3 – Significado e sentido em situações de modelagem matemática

A aprendizagem da matemática tem sido objeto de estudo em diferentes perspectivas teóricas. Não é nosso objetivo neste trabalho discutir esses diferentes enfoques, mas adotar uma conceituação que nos permita analisar uma situação de ensino e aprendizagem na qual a modelagem é o ingrediente principal. O que temos em mente é analisar como os alunos aprendem o conceito de função em situações de modelagem matemática. Vamos admitir que aprender um conceito é compreender o seu significado. É compreender as relações que envolvem esse conceito.

Todavia, um conceito pode assumir níveis diferentes de significação. Vygotsky propõe dois: o nível do sentido e do significado.

> O primeiro alude à série de conotações que um termo possui para um sujeito, de acordo com seu próprio repertório de experiências; o sentido de uma palavra é instável, dinâmico, mutante de acordo com os contextos em que o termo em questão se situe. O significado de um termo representará sua "zona mais estável", na medida em que alude a seu uso convencional; o significado remete a uma espécie de definição mais ou menos expressa e convencionada (BAQUERO, 1998, p.62).

Desse modo, pode-se dizer que aprender um conceito é atribuir-lhe sentido e construir o seu significado. Em outras palavras, é estabelecer relações desse conceito com um sistema mais amplo. Todavia, a noção de sentido, como estamos empregando neste trabalho, envolve relações com um sujeito, numa atividade, portador de necessidades e inquietações e que traz experiências adquiridas no tempo, vivendo num contexto social e cultural historicamente determinado. Assim, a noção de sentido implica relações num sistema que inclui as relações com um sujeito.

Essas relações têm, portanto, natureza subjetiva e envolvem as razões que mobilizam o sujeito na modelagem. Entendemos que essas razões se encontram na relação entre os elementos componentes de uma modelagem: uma situação-problema, a matemática e o(s) sujeito(s) da modelagem.

4 – Sobre o conceito de função

Segundo Zuffi (2002), o conceito de função, atualmente ensinado e presente no currículo das escolas do Ensino Médio, teve um longo e delicado processo de desenvolvimento histórico que culminou com as definições de Dirichlet (1837) e Bourbaki (1939), as quais possibilitaram um nível de abstração desse conceito, ampliando-o para um conjunto de objetos matemáticos antes pouco imagináveis.

Todavia, ao entrar em contato com essas definições, os alunos do Ensino Médio, muitas vezes, apresentam dificuldades na compreensão do seu significado. Quando se sinaliza para o ensino de um conceito formal e amplo de "funções", o que se constata "é uma expressão de idéias através de uma linguagem matemática truncada, muitas vezes, com objetivos em si mesma e pouca construção de significados" (ZUFFI, 2000). Essa autora, ao pesquisar a linguagem dos professores lidando com o conceito de função, conclui que:

> A linguagem formal do professor tenta aproximar o conceito de função das suas definições mais atuais, como as de Bourbaki e Dirichlet. Entretanto, em seu uso prático, este tema fica restrito a concepções mais clássicas, como a de Euler. Em ambos os casos, parece haver uma dicotomia entre a linguagem matemática utilizada para lidar com o teórico e aquela para expressar as questões práticas (ZUFFI, 2000, p.7).

Essa dicotomia sinaliza a necessidade de se levar em conta conceituações intermediárias do conceito de função entre seu uso prático e uso teórico. Esses dois aspectos da noção de função nos remetem a duas possibilidades de significação desse conceito. A primeira pode ser expressa nas definições mais formais em que esse conceito é apresentado como um conjunto de pares ordenados. E a segunda, mais ligada ao contexto de seu uso "prático" e vinculada com a idéia de correspondência entre variáveis. Estas representam, segundo Biehler (1994), perspectivas distintas para o estudo de funções.

Vasco também discute a diferença entre essas duas possibilidades de significação, acentuando o fato de as definições usuais eliminarem o aspecto variacional da noção de função ligada aos contextos em que são utilizadas.

> Pareceria que las funciones, en particular las funciones cuyo argumento es el tiempo t, reflejan matemáticamente las variaciones de la realidad espacio-temporal. Pero pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada. Eso estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada (VASCO, 2003, p.6).

Essas duas diferentes possibilidades de significação do conceito de função geram questões extremamente interessantes para a pesquisa em educação matemática. Faz-se necessário compreender o sentido que o conceito de função pode assumir nos diferentes contextos e, que significado o aluno pode produzir para o conceito de função, a partir de situações em que esse conceito é aplicado, o que em nossa pesquisa se dá nas situações de modelagem matemática.

5 – Situações de modelagem matemática em sala de aula

Durante a realização deste estudo, desenvolvemos com duas turmas de alunos do Ensino Médio uma seqüência de situações de modelagem matemática. Inicialmente, desenvolvemos com todos os alunos uma modelagem a partir de um tema proposto pelo professor. No segundo momento, os alunos de cada turma escolheram um tema que foi investigado nas aulas de matemática. Finalmente, os alunos foram organizados em grupos de até cinco membros e escolheram um tema a partir do qual desenvolveram uma modelagem.

O tema inicialmente proposto foi “O corpo humano”, que gerou vários problemas, entre eles: Qual é a relação entre o tamanho do pé e o número do calçado? Como perder peso controlando sua pulsação nas atividades físicas? As situações de modelagem matemática desenvolvidas possibilitaram introduzir a noção de variável dependente e independente e o conceito de função linear e suas propriedades associadas a cada problema em particular, além de oportunizar a construção de um conjunto de conhecimentos extramatemáticos relativos às situações estudadas.

No segundo momento, um dos problemas foi levantado pela classe, a partir de uma reportagem da revista *Veja*, relativa aos riscos de saúde decorrentes do diabetes do tipo 2. Os conteúdos matemáticos curriculares introduzidos a partir deste problema foram função exponencial e suas propriedades e função logarítmica, construída aí como inversa da função exponencial, no problema em estudo.

No terceiro momento, os alunos formaram grupos e cada um deles definiu um tema ou um problema para estudar. Diferentes tipos de funções surgiram durante o desenvolvimento desses trabalhos.

Aulas expositivas e de exercícios eram dadas sempre que não havia um problema para resolver, ou conforme o interesse em abordar conteúdos não contemplados com as situações de modelagem.

Nosso trabalho de investigação consistiu em observar como os alunos lidavam com as funções em todas as situações. Desse modo, procuramos colocar em evidência alguns aspectos que caracterizam o modo como os alunos percebem o conceito de função nas situações de modelagem.

Esses aspectos foram investigados por meio de vários instrumentos de coleta de informações. Primeiro, pela observação direta que fizemos durante todo o desenvolvimento da pesquisa: situações, falas, atitudes que consideramos importantes foram registradas, descritas e incorporadas como elementos de informação. Além disso, realizamos uma entrevista semi-estruturada com 15 alunos de cada turma e propusemos a todos os alunos da classe algumas questões cujas respostas eram dissertativas. Todos esses instrumentos forneceram uma quantidade razoável de evidências por meio das quais procuramos compreender como os alunos concebiam as funções que empregavam na realização dos trabalhos de modelagem. Elaboramos um esquema que possibilitasse dar visibilidade às informações coletadas. Além de trechos de entrevistas e respostas elaboradas pelos alunos a questionários escritos, utilizamos também um esquema de associação de idéias para relacionar as diversas percepções dos alunos para analisar as informações obtidas. Esse esquema é uma adaptação da "árvore de associação de idéias", de (SPINK, 1999), e permite visualizar o fluxo das associações de idéias inaugurado pela pergunta do entrevistador e encerrado com as sínteses do entrevistado. Além disso, ajudam "a entender como um determinado argumento é construído no afã de produzir sentido num contexto dialógico" (SPINK, 1999, p.114). Doravante, esse esquema será chamado de quadro.

5.1 Duas situações de modelagem matemática

Os dois exemplos de modelagem que apresentamos neste trabalho foram realizados no terceiro momento por grupos de alunos. Parte deles foi desenvolvida durante as aulas e parte foi realizada pelos alunos como atividades complementares fora da sala de aula e com a orientação do professor. Sobre cada atividade concluída, um trabalho escrito foi entregue ao professor e uma comunicação oral foi feita aos colegas.

A descrição aqui apresentada é uma forma abreviada do texto entregue pelos alunos. Convém ressaltar que algumas equipes tinham bastante independência para desenvolver seu trabalho. Outras, no entanto, precisavam de muita orientação para dar um bom encaminhamento para seu estudo.

Um grupo de alunos escolheu como tema: "Milho de pipoca e o tempo de estoura do mesmo". Nas embalagens de milho de pipoca para forno de microondas, vem geralmente escrito que "o tempo ideal para retirar a pipoca do forno microondas varia entre 2 e 3 minutos, dependendo da potência do forno de microondas. Mas, em geral, o instante ideal para tirar o pacote do forno de microondas é quando o tempo entre um estouro e outro for superior a 2 segundos". Grande parte dos fornos de microondas, no entanto, vem com um tempo de estouro já programado, fazendo com que o usuário apenas tenha que acionar um botão. Sendo assim, o problema que esse grupo de alunos investigou nessa modelagem foi estudar como é programado o tempo de estouro do milho de pipoca nos fornos de microondas.

Os alunos estouraram três pacotes de 100 gramas de milho de pipoca de mesma marca num forno de microondas que sugeria o tempo de 2 minutos e 40 segundos, ou seja, 160 segundos. A tabela 1 mostra os dados obtidos. Além disso, determinamos empiricamente que 100 grãos de milho de pipoca equivalem a aproximadamente 14 gramas. Desse modo, 100 gramas são equivalentes a 715 grãos, aproximadamente.

Tabela 1 – Tempo e quantidade de pipocas não estouradas no forno de microondas

Pipoca	Instante do primeiro estouro	Instante em que o pacote foi retirado do forno	Grãos que não estouraram
Pacote1	95 s	110 s	364 grãos
Pacote2	103 s	140 s	68 grãos
Pacote3	97 s	160 s	25 grãos

Experimentalmente observavam, pelo som dos estouros, que a velocidade de transformação do milho em pipoca ia diminuindo à medida que diminuía o número de pipocas que não estouraram. Em outras palavras, observamos que, quanto menos milho há para estourar, menor é a rapidez com que os milhos estouram.

A partir dessa constatação, propuseram que a variação do número de grãos que se transformam em pipoca é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca.

Assim,

$(P_{n+1} - P_n) = kP_n$ (1)

onde P_n é o número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca no instante n, k é uma constante de proporcionalidade e n é a variável que representa o tempo.

De $(P_{n+1} - P_n) = kP_n$

segue que:

$P_{n+1} = P_n (1 + k)$

Usando o tempo como variável discreta, temos:

Para $n = 0$, temos $P_1 = P_o (1 + k)^1$

Para $n = 1$, temos $P_2 = P_o (1 + k)^2$

Procedendo assim sucessivamente, obtemos:

$P_n = P_o (1 + k)^n$ (2)

Durante o desenvolvimento do trabalho, neste momento os alunos não conseguiam dar continuidade à obtenção do modelo e só conseguiram fazê-lo sob orientação do professor, que os alertou para o fato de que as pipocas só começaram a estourar depois de 98 segundos. Esta resolução não foi simplesmente apresentada pelo professor, mas construída com os alunos por meio de uma investigação conjunta.

Considerando agora o tempo como a variável contínua t, e $t = 98$ como sendo o instante médio do primeiro estouro das pipocas dos três pacotes, podemos escrever:

$$P(t) = \begin{cases} 715 & \text{para } t < 98 \\ 715(1+k)^{t-98} & \text{para } t \geq 98 \end{cases}$$

onde *P(t)* é o número de pipocas que não estouraram no tempo *t* e *k* é a constante de proporcionalidade apresentada na equação (1).

Tomando-se dados da tabela, por exemplo, o ponto *t = 160* e *P(160) = 25*, substituindo-se esses valores na função *P(t)* e resolvendo em *k*, obtemos o modelo:

$$P(t) = \begin{cases} 715 & \text{para } t < 98 \\ 715(0.9473)^{t-98} & \text{para } t \geq 98 \end{cases} \qquad (3)$$

que determina o número de pipocas que ainda não estouraram no instante *t.*

Obtida a função *P*(*t*), podemos resolver o problema, que é saber o tempo ideal para tirar a pipoca do forno microondas. A condição dada nas embalagens é que o tempo entre um e outro estouro seja superior a dois segundos. Para representar esta situação de forma matemática, os alunos novamente precisaram ser estimulados pelo professor para concluir que equivale a escrever:

$$P(t) - P(t + 2) = 1,$$

ou seja, a variação na quantidade de pipocas que estão estourando entre o tempo *t* e *t* + 2 é igual a 1.

Resolvendo esta igualdade, usando *P(t)* dado pelo modelo (3), obtemos $t \cong 177{,}4$ segundos como sendo o instante ideal para retirar a pipoca do forno. Podemos perceber que a hipótese inicial de que os fornos vêm programados com um tempo de estouro entre 2 minutos e 3 minutos está verificada.

Nessa modelagem, a compreensão da função requer a compreensão da situação-problema envolvida. Nesse caso, os alunos transferiram os aspectos do problema em estudo para caracterizar a própria noção de função exponencial. Isso parece estar evidenciado na seqüência da entrevista que fizemos com o grupo.

> PROFESSOR: Que tipo de função matemática vocês utilizaram para resolver esse problema?
>
> ALUNO 2: Função exponencial.
>
> PROFESSOR: Como é essa função?
>
> ALUNO 1: ... ela é assim bem rápida... sobe rápido. Então como foi estourado a pipoca... começou do nada ... de repente... tururururu... e parou no nada ... ela não foi tec...tec...tec...tec... tec... tec... e foi parando. E então foi isso né, bem rápido, né? Não um *The Flash*[1], mas ela vai rápido e pára.
>
> ALUNO 2: Ela começa estourando... poucas estouram... depois vai rápido e vai parando.

Esses alunos analisam a velocidade com que as pipocas vão estourando para explicar o comportamento da função exponencial decrescente. Nesse caso, os alunos dizem que essa função decresce rápido, *significando* com isso que a função decresce mais rapidamente no início do que no fim. Esses alunos passam a significar mais ou menos a noção de função exponencial a partir do contexto em que foi ela empregada. O conceito de função, nesse caso, carrega as relações que os alunos estabelecem com a modelagem que realizaram. Ocorre o que Vygotsky chama de "predomínio do sentido sobre o significado":

> A palavra está inserida no contexto do qual toma o conteúdo intelectual e afetivo, se impregna desse conteúdo e passa a significar mais ou menos o que significa isoladamente e fora do contexto: mais porque se amplia seu repertório de significados, adquirindo novas áreas de conteúdo; menos porque o contexto em questão limita e concretiza seu significado abstrato (VYGOTSKY, 2001, p. 321).

[1] Super-herói de revista em quadrinhos que possui o poder de correr em altíssimas velocidades.

A impregnação da situação de modelagem no significado do conceito de função, ou seja, o predomínio do sentido sobre o significado pode ampliar as possibilidades de significação da noção de função. O quadro de associação de idéias apresenta descrições que os alunos fazem dos comportamentos das funções e mostra que eles pensam as funções como relações entre variáveis. Associam com a idéia de variação, de movimento, de transformação. Nesse caso, o sentido dinâmico da função predomina sobre a definição estática das definições usuais das funções.

Em outra situação de modelagem, um grupo de alunos produz significados para a função quadrática a partir de uma situação em que eles, para resolverem um problema, precisavam ajustar uma função quadrática a um conjunto de dados. Esse grupo leu uma reportagem que trazia um teste para estimar a idade real de uma pessoa, sua idade biológica, a partir da sua capacidade auditiva. A capacidade auditiva de uma pessoa é medida pela distância máxima da qual essa pessoa consegue ouvir uma conversa em tom normal. Assim, os alunos puderam estimar a idade biológica de diversas pessoas, medindo sua capacidade auditiva e comparando com a média de todas elas.

Tabela 2 – Relação Idade biológica e Capacidade auditiva

Capacidade Auditiva (em metros)	**Idade Biológica (em anos)**
12	Entre 20 e 30
11,5	40
9	50
7	60
4	70

Fonte: Revista *Veja* de 11/07/2003

O trabalho desse grupo consistiu em ajustar, utilizando o *software Excel*, uma função quadrática aos dados fornecidos na tabela 2. Para justificar a opção pela função quadrática, o grupo procurou discutir o significado dos seus pontos no contexto da situação estudada. O ponto em que a função intercepta o eixo das coordenadas é a distância média que os bebês ouvem; o ponto máximo da função no vértice da parábola dá a idade em que a pessoa ouve melhor; e o ponto em que a função intercepta o eixo das abscissas fornece a idade em que as pessoas ficam totalmente surdas. Como disseram alguns alunos desse grupo:

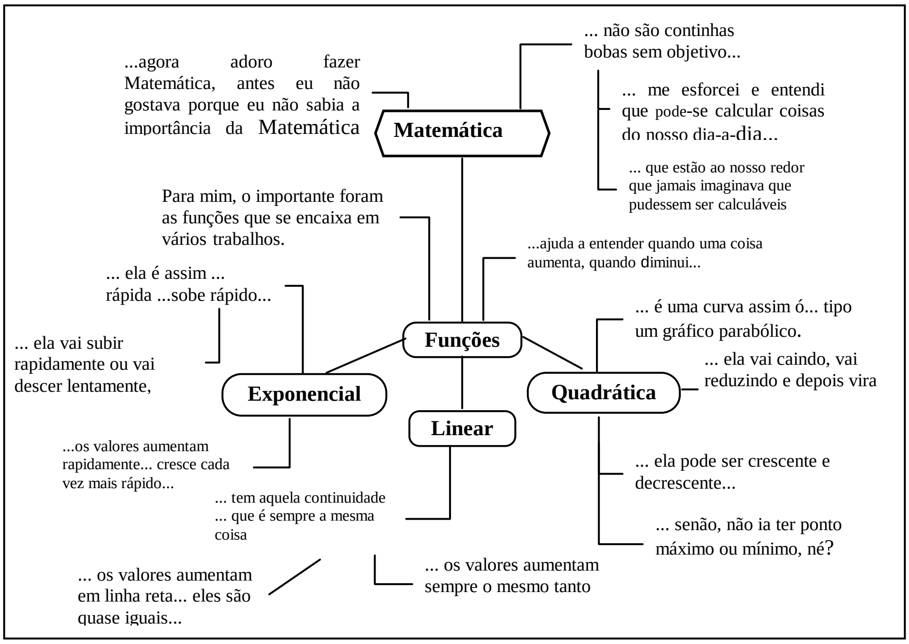
> ALUNO 2: O problema era saber conforme vai aumentando os anos da pessoa como vai diminuindo a audição...
>
> ALUNO 1: O ponto máximo era o ponto que a gente escutava melhor... daí tinha a idade certa lá que tinha o ponto máximo que quando você ia escutar melhor porque pequeno você não escuta muito bem, nem velho... então tem uma idade exata que você escuta melhor... achar essa idade é o problema do trabalho.

Ao se referirem à função quadrática, os alunos desse grupo não a definiam apenas como um polinômio do segundo grau, ou apenas pela sua expressão analítica $y = ax^2 + bx + c$, mas referiam-se principalmente ao seu comportamento, ao fato de "crescer e decrescer", "ter concavidade voltada para cima ou para baixo", "ter ponto máximo ou mínimo". Assim, ao transferir o significado da correlação entre as variáveis da situação estudada para o significado da função quadrática, os alunos construíram uma visão dinâmica da parábola, gráfico dessa função.

6 – Discussão de algumas percepções dos alunos

As informações obtidas neste trabalho nos levam a crer que as atividades de modelagem matemática podem auxiliar o aluno a compreender o aspecto dinâmico do conceito de função, pensando-a como uma relação entre variáveis. Além disso, na modelagem, o aluno pode perceber o papel instrumental da matemática. Pode perceber a matemática como uma ferramenta, como um instrumento utilizado para explicar e entender situações reais. Nesse caso, as relações induzidas nas situações de modelagem podem ajudar os alunos a atribuir sentido e significado à matemática porque “produz inteligibilidade sobre algo, aclara algo no mundo” (CHARLOT, 2000, p.56).

Colocamos em evidência, no Quadro 1, as percepções dos alunos que apontam nessa direção. Apresentamos o sentido e o significado construídos como relações entre as noções matemáticas empregadas nas modelagens e os contextos dessas situações. Além disso, incluímos percepções gerais sobre a matemática e sobre os conteúdos desenvolvidos.



Quadro 1 – Relações estabelecidas com a Matemática e com o conceito de função

Em várias oportunidades, os alunos mostraram valorizar a Em várias oportunidades, os alunos mostraram valorizar a matemática aprendida em situações de modelagem. Perceber como a matemática é importante em situações de sua vida possibilita aos alunos valorizarem o que estão aprendendo. Como diz uma aluna "... agora adoro fazer matemática, antes eu não gostava porque eu não sabia a importância da matemática na nossa vida". Essa valorização pode vir também da percepção de que a Matemática não é "um jogo" realizado com símbolos, mas pode ser utilizada para calcular diversas coisas em sua vida.

A valorização da matemática em situações de modelagem pode se dar também quando os alunos percebem as possíveis generalizações para os modelos matemáticos obtidos. Os mesmos conceitos matemáticos podem servir de modelos para estudar diversas situações. Como diz um aluno: "Para mim, o importante foram as funções que se encaixam em vários trabalhos". As funções podem ser importantes, por exemplo, porque "*...* ajudam a entender quando uma coisa aumenta, quando diminui...", disseram os alunos.

Nesses casos, as situações de modelagem parecem contribuir para que os alunos vejam a matemática como um modo de relação com o mundo e com os outros. As relações "induzidas e supostas" nas situações de modelagem permitem aos alunos atribuir sentidos e construir significados matemáticos porque, nesse caso, a própria Matemática é vista como relação. Como bem salienta Charlot,

Se o saber é relação, o valor e o sentido do saber nascem das relações induzidas e supostas por sua apropriação. Em outras palavras, um saber só tem sentido e valor por referência às relações que supõe e produz com o mundo, consigo, e com os outros (2000 p. 64).

7 – Considerações finais

Neste trabalho procuramos mostrar que, ao produzirem significados para o conceito de função em situações de modelagem matemática, os alunos adquirem uma visão dinâmica da matemática. Nesse sentido, situações de modelagem podem contribuir para desenvolver o que Vasco (2003) chama de pensamento variacional. Segundo esse autor, trata-se de:

> Una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. El objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariacón entre cantidades de magnitud, principalmente-pero no exclusivamente-las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los padrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (VASCO, 2003 p. 9 e 10).

Essas evidências reforçam nossa crença de que situações de modelagem podem contribuir para a construção de percepções inovadoras da matemática. Ao passar de uma visão estática para uma visão dinâmica e relacional para as funções, os alunos constroem uma imagem viva da matemática.

Esse argumento, por si só, bastaria para defender o uso de modelagem matemática na sala de aula. Todavia, este trabalho procurou mostrar que, além do aspecto da construção de significados para o conceito de função como correlação entre variação de grandezas, a modelagem matemática é ainda um campo fértil para indagações sobre a própria natureza da matemática, seu papel instrumental e dinâmico na descrição, explicação e previsão de comportamentos de situações reais.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Modelagem Matemática na sala de aula: algumas implicações para o ensino e a aprendizagem da Matemática. *Anais eletrônicos do CIAEM* – Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau, 2003.

ALMEIDA, L.M.W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*,ano 12, nº22, pp 19-36, 2004.

BAQUERO, Ricardo. *Vygotsky e a aprendizagem escolar*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da Anped, 24, 2001, Caxambu. *Anais...* Disponível em http://wwwanped.org.br Acesso em 10 fev. 2003.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEHLER, R. Functional Thinking with graphs. *Journal for Research in mathematics Education*. v. 25, n.5, 526-533, 1994.

BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L. M. W. O ensino de cálculo e as atividades de modelagem matemática em ambientes informatizados. *Anais do VI EBRAPEM – Encontro Brasileiro de estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. UNICAMP, 2002, pp 76-81.

BORSSOI, A.H. A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Dissertação de Mestrado*, Uel, Londrina, PR, 2004,140p.

BRITO, D. S. e ALMEIDA, L. M. W. Refletindo sobre "a duração do dia" por meio de uma atividade de Modelagem Matemática. *Anais eletrônicos do VIIEPREM* – Encontro Paranaense de Educação Matemática, Foz do Iguaçu, Pr, 2002.

BRITO, D.S. Atribuição de sentido e construção de significados em situações de modelagem matemática. *Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática*, UEL, 2004.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – State, trends and issues in Mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), pp 36-38, 1991.

CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Sá da Costa, 1984. Portugal.

CARREIRA, S. Where there’s a model, there’s a methapfor: methaphorical thinking in students’ understanding of a mathematical model. *Mathematical Thinking and Learning*, 3(4), 261-267, 2001.

CHARLOT, B. *Da relação com o saber: elementos para uma teoria*. Porto Alegre, RS: Artmed Editora, 2000.

CURY, H. N. Modelagem matemática e problemas em ciências: uma experiência eu um curso de mestrado. *Revista Perspectiva*, v.27, n.98, p. 75-86, 2003.

D’AMBROSIO, U. Dos fatos reais à modelagem: Uma proposta de conhecimento matemático [on line] disponível na Internet via *http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm* Arquivo capturado em 05/06/2003

DOERR, H. M. A modeling perspective on students’ mathematical reasoning about data. *Journal Research in Mathematics Education*, Vol 34, 110-136, 2003.

FERRUZZI, E. C. A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia. *Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas*, UFSC, 2003.

GALBRAITH, P. Modelling, teaching, reflecting- what I have learned. In: SLOYER, C. et al. *Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modeling and Applications*. Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1995, p. 21-45.

JONES, M. S. Teaching mathematical modeling. International *Journal of mathematics Education Science and Technology*, Vol 28, N 4, 533-560, 1997.

OLIVEIRA, M.K. Vigotsky, *aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico*. São Paulo, Editora Scipione, 2001.

SPINK, J. M. (org.) *Práticas discursivas e produção de sentidos no cotidiano*. São Paulo, SP: Cortez Editora, 1999.

VASCO, Carlos E. El pensamiento variacional y la modelación matemática. Anais eletrônicos do CIAEM – *Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau, 2003.

VERSCHAFFEL, L. Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: a teaching experiment with fifth graders. *Journal for research in Mathematics Education*, Vol. 28, N 5, 577-601, 1997.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda. 2001.

ZUFFI, E. M. e PACCA, J.L. Sobre funções e linguagem matemática de professores do Ensino Médio. *Zetetiké*, vol 8, N 13/14, 7-28, 2000.

ZUFFI, E. M. e PACCA, J.L. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista*. Número 9, ano 8, 2001.

ZUFFI, E. M. e PACCA, J.L. Sobre funções e linguagem matemática de professores de Matemática e de Ciências. *Ciência &Educação*, Vol 8, N 1, 1-12, 2002.