

Aprender matemática investigando*

*Alexandra Rocha** e João Pedro da Ponte****

Resumo: Este estudo tem por objectivo verificar o alcance da realização de um conjunto de investigações matemáticas em alunos do 7.º ano de escolaridade. Em especial, pretende-se saber se os alunos evidenciam novos conhecimentos e capacidades matemáticas e novas concepções e atitudes em relação à matemática e à sua aprendizagem nesta disciplina. Trata-se de um estudo sobre a prática profissional, de natureza qualitativo-interpretativa, baseado em dois estudos de caso de alunos de diferentes níveis de desempenho. Os dados foram recolhidos por observação participante, entrevistas, questionários e documentos produzidos pelos alunos. Os resultados evidenciam que a realização de investigações matemáticas constitui uma situação nova para os alunos, que mostram compreender de forma progressiva o seu papel neste tipo de tarefa. Apesar de ambos os alunos fazerem em certos momentos raciocínios que constituem provas matemáticas, nenhum deles chega a desenvolver uma compreensão clara da necessidade da demonstração. Na realização das tarefas propostas, ambos tiram partido dos seus conhecimentos matemáticos prévios e mostram aprender diversos conceitos. Além disso, ambos mostram adesão a este tipo de tarefa, que sentem favorecer a sua aprendizagem. Sem abandonar muitos dos traços da sua visão da matemática, passam a considerá-la de modo mais dinâmico e a ver-se a si próprios num papel mais activo na exploração de situações matemáticas. O estudo mostra a necessidade de experiências mais continuadas e aprofundadas, recorrendo a uma maior diversidade de tarefas, para promover aprendizagens e mudanças mais profundas nas concepções dos alunos.

Palavras-chave: Investigações matemáticas; aprendizagem; atitudes; concepções dos alunos.

* O presente artigo, escrito em colaboração, tem por base a tese de mestrado realizada pela primeira autora (Rocha, 2003), com orientação do segundo autor. O artigo usa a grafia do português de Portugal.

** Professora na Escola Secundária com 3.º Ciclo de São Pedro da Cova, Gondomar. E.mail: alexrocha@portugalmail.pt

*** Professor no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. E.mail: jponte@fc.ul.pt

Learning mathematics by investigating

Abstract: This study aims to verify the effects of carrying out a set of mathematical investigations in grade 7 students. In special, it seeks to know if students show the development of new mathematical knowledge and abilities and new conceptions and attitudes regarding mathematics and mathematics learning. It is a de qualitative-interpretative study about professional practice, based in two case studies of students of different achievement level. Data was collected by participant observation, interviews, questionnaires and documents produced by students. The results show that carrying out mathematical investigations is a new situation for students that show to understand in a progressive way their role on this kind of task. Even though both students do in some moments reasoning that constitute true mathematical proofs, none of them comes to a clear understanding of the need of proving. In carrying out the proposed tasks both use their previous mathematical knowledge and show that they learned several concepts. Furthermore, both show they appreciate this kind of task that they feel favours their learning. Without giving up many of their traces of their vision of mathematics, they come to it in a more dynamical way e to see themselves in a more active role in exploring mathematical situations. The study shows the need for more continued and deeper experiences, using a greater diversity of tasks, to promote deeper leaning and change of conceptions students.

Key words: Mathematical investigations; learning; attitudes; conceptions of students.

Introdução

A natureza das tarefas a propor aos alunos assume uma grande importância no ensino da matemática. Para o NCTM (1994), o trabalho na sala de aula deve basear-se em tarefas apropriadas. Só assim será possível proporcionar aos alunos experiências matemáticas significativas, que promovem o seu “poder matemático”, de modo que “saber matemática” corresponda a “fazer matemática” (NCTM, 1991). A Associação de Professores de matemática de Portugal (APM) também salienta a importância das tarefas a propor, referindo, em especial, a resolução de problemas, os projectos e as actividades de exploração e descoberta: “*Explorar* [significa] entrar em terreno desconhecido, recolher regularidades e padrões – ou porventura um sentido ainda mais forte – *investigar, procurar encontrar, procurar descobrir*” (APM, 1988, p. 59, ênfase no original).

Investigar envolve formular questões, propor conjecturas, realizar testes para validar ou rejeitar essas conjecturas, avaliar a sua plausibilidade, encontrar provas da sua correção e levantar novas questões para investigar. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) consideram que as actividades de investigação matemática podem assumir um lugar de destaque na aprendizagem dos alunos, trazendo para dentro da sala de aula o espírito do trabalho do matemático profissional. O presente estudo tem por objectivo verificar o interesse desta proposta pedagógica no 7.º ano de escolaridade¹. Em particular, pretendemos analisar se, ao realizarem este tipo de tarefa na sala de aula, os alunos evidenciam novos conhecimentos e capacidades matemáticas e novas concepções e atitudes em relação à matemática e à sua aprendizagem nesta disciplina.

Investigações matemáticas, aprendizagem e concepções dos alunos

A realização de investigações matemáticas pelos alunos pode contribuir para o seu desenvolvimento em vários níveis: (i) na aprendizagem do que são e como se fazem investigações; (ii) na aprendizagem de conceitos, ideias e procedimentos matemáticos; (iii) na aprendizagem de objectivos curriculares transversais, como a capacidade de comunicação e o trabalho em grupo; e (iv) na formação de novas concepções e atitudes em relação à matemática (Ponte, 2003). Dados os objectivos do presente trabalho, passamos em revista os estudos realizados com alunos deste nível etário que se centram no seu desempenho em actividades de investigação, na sua aprendizagem da matemática e nas suas concepções e atitudes.

Capacidade de investigação dos alunos. Como indicam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), investigar é formular questões e procurar uma resposta tanto quanto possível fundamentada e rigorosa. Para estes autores, o que mais caracteriza as investigações matemáticas é o seu “estilo de conjectura-teste-demonstração” (p. 10).

Um estudo de Segurado (1998, 2002), realizado numa turma do 6.º ano, dá-nos indicações sobre o desempenho dos alunos na realização de investigações matemáticas. Este estudo envolveu quatro tarefas, ao ritmo de uma por mês. Segundo a professora, os alunos desenvolveram a capacidade de observar, estabelecer relações, conjecturar, testar, justificar e argumentar. Na terceira tarefa eles revelaram já um certo espírito investigativo, formulando e testando conjecturas. Na última tarefa tornou-se ainda mais evidente que os alunos começaram a compreender a importância da organização dos dados, da procura de regularidades, da formulação de conjecturas, da sua validação através de exemplos e da necessidade de defender os seus pontos de vista com argumentos. A autora concluiu:

É possível proporcionar a alunos deste nível de escolaridade uma experiência matemática de natureza investigativa. Os alunos

¹ Em Portugal, o 3º Ciclo do ensino básico inclui os 7º, 8º e 9º anos de escolaridade, que correspondem no Brasil às 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e à 1ª série do Ensino Médio.

conseguem abordar as tarefas e evoluem no sentido de se tornarem confiantes nas suas capacidades, de aumentarem a sua capacidade de resolver e formular problemas e de comunicar e raciocinar matematicamente (SEGURADO, 2002, p. 72).

Brocardo (2002) realizou um estudo durante um ano lectivo, em colaboração com outra professora, numa turma do 8.º ano, envolvendo treze tarefas de investigação. Relativamente ao entendimento que os alunos mostraram deste tipo de tarefas, indicou que eles, inicialmente, têm tendência para transformar as primeiras experiências de recolha de dados num fim em si mesmo e mostraram alguma dificuldade em entender a investigação como um todo. No entanto, com a realização de novas tarefas, os alunos passaram a relacionar as observações iniciais e a procurar clarificar o foco da investigação, acabando por alcançar uma boa compreensão deste tipo de trabalho.

Num estudo anterior, Junqueira (1996) realizou uma experiência de ensino numa turma do 9.º ano de outro professor, usando o *Cabri-Geomètre*. A experiência versou a geometria no plano, ocupou 24 aulas de 50 minutos e seguiu uma abordagem não directiva. A autora constatou que, de início, o trabalho dos alunos foi pouco produtivo e concluiu que “a proposta de investigação de certas construções de forma muito aberta, sem um objectivo explícito para os alunos, pareceu provocar-lhes alguma insegurança. Apenas se apropriaram dessas actividades quando começaram a descortinar que conclusões poderiam obter” (p. 94). Indicou que, com o decorrer do tempo, a actividade dos alunos foi melhorando de qualidade: eles começaram por formular conjecturas restritas, isto é, baseadas na observação de um número reduzido de casos, mas a análise de exemplos levou-os ao estabelecimento de conjecturas mais genéricas.

Os pesquisadores têm-se debruçado sobre o desempenho dos alunos nas diversas fases do trabalho de investigação. Vários estudos mostram que os alunos, muitas vezes, não sentem necessidade de explicitar claramente a questão inicial e, outras vezes, mudam sem dar por isso a sua questão, pelo que o seu objectivo se torna confuso, até para eles próprios (Ponte & Matos, 1992; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira & Varandas, 1998). Isso acontece até quando os alunos têm uma experiência razoável na realização de investigações e uma certa compreensão deste processo (Brocardo, 2002).

Em contrapartida, a formulação de conjecturas parece não constituir um aspecto problemático. Isso é indicado, por exemplo, por Ponte et al. (1998), a partir de um trabalho realizado com alunos do 3.º ciclo do ensino básico, no qual estes demonstram capacidades para chegar a conjecturas integrando estratégias geométricas e aritméticas e usando estratégias de variação e generalização. Estes alunos mostram-se também capazes de alterar e adaptar conjecturas a partir de contra-exemplos. No entanto, Brocardo (2002) refere que os alunos, embora explicitem conjecturas com facilidade, demoram, com frequência, a compreender o seu estatuto, tomando-as como conclusões:

É muito forte nos alunos a ideia que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjecturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um

processo demorado e que tem de ser objecto de um trabalho explicito por parte do professor (p. 540).

Esta autora estudou em detalhe os casos de três alunos e mostra que eles têm tendência para encarar uma investigação como uma actividade linear em que (i) recolhem certos dados, (ii) organizam-nos e (iii) analisam-nos de modo a tirar conclusões. Progressivamente, à medida que fazem mais tarefas de investigação, os alunos vão compreendendo a não-linearidade do processo investigativo e a importância e o significado da prova dos resultados. Esta evolução processa-se, no entanto, em ritmos bastante diversos, sendo mais lenta nos alunos que evidenciam uma visão mecanicista da actividade matemática como a aplicação de procedimentos, sem dar atenção ao seu significado e implicações. Em contrapartida, é mais rápida nos alunos com maior gosto na realização de tarefas abertas.

Brocardo (2002) refere que “numa fase inicial os alunos da turma encararam a prova das suas conjecturas como uma ‘complicação’ desnecessária introduzida pela professora” (p. 544). Para eles, uma conjectura que resiste a vários testes é certamente verdadeira, não havendo necessidade de a provar. Numa segunda fase, alguns deles vão percebendo o que significa justificar uma conjectura, que encaram, no entanto, como algo exterior à investigação. Finalmente, nas últimas tarefas, “a grande maioria dos alunos tinha a clara noção de que se deveria pensar na prova das suas conjecturas antes de dar por concluído o seu trabalho” (p. 544). Para esta evolução, segundo a autora, muito terá contribuído o facto de ter sido feito um trabalho continuado ao longo do ano. Brocardo refere igualmente que os alunos tendem a melhorar a qualidade dos seus relatórios à medida que vão adquirindo experiência na sua realização. De início, os alunos apresentam sobretudo frases curtas, incidindo principalmente nos resultados, mas mais tarde já elaboram textos que explicam em pormenor o trabalho realizado.

Os estudos realizados mostram que, para muitos alunos, a realização de uma investigação matemática é uma experiência nova. No entanto, devidamente apoiados pelo professor e com a continuação do trabalho, conseguem compreender o que é uma investigação e o papel que lhes cabe assumir. Algumas das suas dificuldades são de natureza geral. Os alunos começam por usar as mesmas estratégias que empregam para resolver exercícios e evidenciam uma visão linear do trabalho, indo rapidamente da recolha e organização dos dados para a formulação de conclusões. Outras dificuldades respeitam a aspectos específicos da actividade investigativa. Por exemplo, tendem a dar pouca atenção à colocação de questões, demoram a compreender a necessidade de justificar as conjecturas e tomam-nas rapidamente como conclusões. A sua tendência natural é considerar que a verificação de diversos exemplos é suficiente para comprovar a validade de uma afirmação. No entanto, com a continuação da experiência na realização de investigações, a maioria dos alunos evidencia progressos significativos na superação destas dificuldades. Em particular, a realização de relatórios escritos parece ajudá-los a melhorar a sua capacidade de argumentar e justificar os resultados matemáticos obtidos.

Aprendizagens de matemática. É de grande interesse saber se, ao trabalharem em investigações matemáticas, os alunos utilizam e consolidam os seus conhecimentos de conceitos e procedimentos e realizam novas

aprendizagens no âmbito dos objectivos curriculares gerais e específicos desta disciplina.

No seu estudo com alunos do 6.º ano, Segurado (2002) indica ter sido bem visível, “durante a realização das tarefas, o domínio que os alunos têm de alguns conceitos anteriormente leccionados nomeadamente, potências, fracções, dízimas, números primos, divisores, múltiplos e da utilização da calculadora” (p. 72). Afirma esta professora:

Os conhecimentos adquiridos tomam valor para os alunos, quando estes sentem que precisam deles para poderem realizar as tarefas que lhes são propostas. Com estes alunos foi notório o interesse com que se apropriaram de alguns conceitos necessários à consecução das tarefas (p. 72).

Segurado e Ponte (1998) analisam em pormenor o caso de um aluno com bom desempenho em matemática. Indicam que a realização das tarefas mostra que ele se apropriou de certos conceitos e técnicas operatórias, evidenciando segurança em alguns aspectos, mas também uma surpreendente dificuldade noutros aspectos. Os autores sublinham que os conhecimentos mais básicos podem ser desenvolvidos neste tipo de actividade e que o facto de os alunos os dominarem apenas de modo parcial não constitui factor impeditivo para o seu trabalho.

Deste modo, a realização de investigações parece proporcionar uma oportunidade para os alunos usarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem as suas capacidades e efectuarem novas aprendizagens. No entanto, também se evidenciam fragilidades no seu conhecimento matemático, por vezes até em conceitos e ideias que se supunham bem aprendidos. É possível que a sua realização continuada ajude a promover nos alunos novas aprendizagens matemáticas, mas são necessários mais estudos para o comprovar.

Atitudes e concepções dos alunos. As concepções e as atitudes representam o modo como as pessoas encaram os objectos e situações e como se relacionam com eles (Ponte, 1992). A investigação indica que as atitudes e concepções dos alunos sobre a matemática e a aprendizagem interferem de forma frequentemente negativa no modo como participam no trabalho na aula (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Uma das suas concepções mais comuns é que “a matemática é cálculo”. Por exemplo, num estudo realizado por Frank (1988), alunos do 6.º ao 8.º ano com bom desempenho, após duas semanas de trabalho intensivo de resolução de problemas usando o computador, consideram na sua maioria que a matemática se resume essencialmente às operações aritméticas. Num outro artigo, Garofalo (1989) refere que a forma como os alunos habitualmente abordam os problemas indica uma concepção do pensamento matemático que “consiste em ser capaz de aprender, lembrar e aplicar factos, regras, fórmulas e procedimentos” (p. 503). Acrescenta que o modo como os alunos pensam está intimamente relacionado com a sua visão da matemática como “corpo altamente fragmentado de regras e procedimentos” (p. 503). Estudos realizados em Portugal sugerem também que muitos alunos vêem a matemática como um conjunto de definições e regras e consideram que aprendem ao ouvir explicações do professor e praticar regras (Brocardo, 2001;

Segurado, 1997). A investigação refere ainda que as experiências dos alunos na sala de aula influenciam as suas atitudes e concepções.

A influência nas atitudes é patente em alguns estudos realizados com investigações matemáticas. Na verdade, muitos alunos mostram o seu entusiasmo na realização destas actividades, como se vê, por exemplo, em diversas narrativas de Ponte, Cunha, Oliveira e Segurado (1998). Outra autora, Brocardo (2002), afirma que os alunos do 8.º ano reagem bem à exploração continuada de investigações. Indica, no entanto, que, inicialmente, “embora a grande maioria dos alunos se empenhasse bastante na exploração das tarefas [...] também manifestava algum desagrado por considerar tratar-se de um trabalho que exigia uma grande persistência pessoal” (p. 554), uma vez que a professora quase sempre considerava as suas explorações “incompletas”.

Brocardo (2002) apresenta em detalhe os casos de três alunos. Uma aluna mostrou desde o início do ano interesse em explorar tarefas não rotineiras. Outros dois alunos começaram por revelar grande dificuldade em entender o seu papel neste tipo de tarefas, mas, no final do ano, mostravam gostar das aulas com investigações e empenhavam-se na sua realização. Esta autora sugere que o sucesso e a receptividade dos alunos a este tipo de tarefas sofrem avanços e recuos, estando intimamente relacionados com as formas de organização do trabalho e com o ambiente de aprendizagem da turma (Brocardo, 2001). Argumenta ainda que, com a sua realização, a confiança dos alunos nas suas capacidades evolui num sentido positivo.

Tal como as atitudes dos alunos, também as suas concepções podem mudar com a realização de investigações matemáticas. Segurado e Ponte (1998) relatam o caso de Francisco, do 6.º ano, que evidencia uma interessante mudança de concepções:

No início do estudo, Francisco encara a matemática essencialmente como uma ciência onde o cálculo tem um papel preponderante. Para ele, o professor constitui a autoridade dominante na sala de aula, sendo o seu papel transmitir conhecimentos e avaliar os alunos. Estes, por sua vez, têm de estar com atenção nas aulas e estudar se querem aprender. No entanto, já nesta fase, Francisco revela gosto pela resolução de problemas e manifesta uma certa originalidade no modo de encarar as tarefas que lhe são propostas. Deste modo, a visão bastante limitada que apresenta da matemática e da sua aprendizagem não está completamente de acordo com a sua maneira de ser e o seu gosto pessoal, mas parece ser, sobretudo, o resultado da sua adaptação ao meio escolar e, muito especialmente, ao ensino da matemática que tem recebido (p. 33).

Segundo os autores, no decurso do ano, Francisco mostrava grande interesse pelas actividades de investigação. Nas primeiras tarefas, o seu raciocínio era limitado, não indo além da formulação de conjecturas que pedia à professora para validar. Progressivamente, começou a realizar testes, a refinar as conjecturas e até a ensaiar justificações. Revelou maior ousadia nos seus raciocínios e mostrou crescente autonomia e confiança. O trabalho efectuado nestas tarefas pareceu tê-lo ajudado a desenvolver as suas capacidades de raciocínio e a sua criatividade matemática. A realização destas actividades contribuiu para que ele assumisse uma nova perspectiva sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, passando a considerar que (i) esta é uma ciência

em desenvolvimento, tendo o processo de investigação um lugar importante; (ii) o papel do professor é orientar os alunos, motivando-os e incentivando-os para fazerem a sua matemática; e (iii) as tarefas devem levar os alunos a aprender, mas também ajudar a criar um ambiente de aprendizagem estimulante. Francisco, um aluno com forte inclinação para a matemática, é um caso fora do comum para quem as tarefas propostas e o ambiente criado parecem perfeitamente adequados.

Segurado (1998) refere igualmente as concepções de outros três alunos do 6.º ano. No início, e apesar do entusiasmo e empenho com que eles receberam as novas tarefas, nota bastante dificuldade na sua concretização. Relaciona estas dificuldades com as concepções iniciais destes alunos sobre a matemática e o papel do professor. Segundo a autora, os alunos consideram que cada questão matemática tem uma e uma só resposta e é o professor que estabelece a sua validade. Indica, também, que, o desempenho dos alunos evolui ao longo do estudo, verificando-se uma melhoria da sua capacidade de observar, conjecturar, testar e justificar, assim como da capacidade de comunicar matematicamente, alterando-se também a pouco e pouco as suas concepções.

Brocardo (2002) considera que, como consequência do trabalho realizado ao longo do ano, os alunos “estabeleceram uma forte ligação entre a matemática e as investigações matemáticas e realçaram os aspectos experimentais e indutivos” (p. 556). A autora documenta como os alunos passam de uma visão da matemática muito ligada ao cálculo, para uma visão que integra o “pensar” e a resolução de problemas. Segundo afirma, os alunos, no fim do ano, “consideram que podem investigar e descobrir relações em matemática e mostram uma clara preferência por um processo de aprendizagem em que participam activamente” (p. 560). Na sua perspectiva, a realização de investigações na aula ajuda a estabelecer um ambiente em que os alunos participam activamente, facilitando a compreensão dos processos e ideias matemáticas. A autora conclui que houve uma evolução dos alunos na participação no discurso na sala de aula, envolvendo-se fortemente na discussão das tarefas, com o que prolongam as suas investigações e recolhem ideias para explorações futuras.

Estes estudos documentam que os alunos deste nível de ensino se envolvem muitas vezes com entusiasmo na realização de investigações, actividades que parecem desafiar a sua curiosidade. Os estudos empreendidos mostram igualmente que a realização continuada de investigações, num quadro de discussão e reflexão dos resultados obtidos e dos processos empregues, é susceptível de influenciar de modo significativo as concepções dos alunos. Estes podem alterar a sua visão do trabalho investigativo, das características da matemática, do modo de aprender matemática e dos papéis do professor e do aluno, desenvolvendo gosto pela disciplina e confiança neste tipo de trabalho.

Metodologia

Actividades de investigação na sala de aula

Neste estudo, as actividades de investigação foram realizadas ao longo do ano lectivo por uma turma do 7.º ano, cuja professora é a primeira autora deste artigo. As tarefas enquadram-se na primeira unidade do programa

“Conhecer melhor os números”², que fornece muitas oportunidades para exploração matemática. Foram propostas cinco tarefas, uma por mês, entre Outubro de 2001 e Fevereiro de 2002, intercaladas com aulas onde foram tratadas as unidades “Proporcionalidade directa” e “Semelhança de figuras”. Nestas aulas, foram propostas aos alunos diferentes tarefas, com destaque para a resolução de problemas combinada com a resolução de exercícios. Os alunos trabalharam em grupo, individualmente e, algumas vezes, como turma. Nas primeiras aulas, a professora propôs diversos problemas envolvendo os conceitos de razão e proporção. Com isto, pretendia essencialmente aferir o desempenho dos alunos e o comportamento no trabalho em grupo. Desde as primeiras aulas, a professora pedia-lhes que explicassem sempre o seu raciocínio e questionassem os colegas sobre os resultados apresentados.

Todas as actividades de investigação foram realizadas numa sequência de três fases: introdução, desenvolvimento do trabalho e reflexão-discussão (Ponte, Brocardo, Oliveira, 2003). As investigações foram realizadas sempre à segunda-feira, num bloco de duas aulas (de 50 minutos cada), nos dois primeiros tempos da manhã, sendo a primeira para realizar a tarefa e a segunda para discutir as investigações efectuadas e elaborar o respectivo relatório. Quando necessário, o trabalho era concluído numa aula posterior. Para a realização do trabalho, os alunos foram organizados em grupos (de quatro, cinco e, num caso, seis elementos), modo de organização também adoptado com frequência noutras aulas.

As tarefas foram apresentadas por escrito, fazendo a professora a sua leitura com os alunos a fim de esclarecer alguma expressão desconhecida. Além disso, em certas tarefas, foram feitas algumas considerações sobre os conteúdos matemáticos, sem os quais os alunos, possivelmente, não conseguiriam avançar. Durante a realização do trabalho, a professora procurou não interferir nas discussões dos alunos, assumindo um papel de orientadora e moderadora. Procurou, ainda, observar, com a maior proximidade possível, o seu trabalho.

Os alunos efectuaram relatórios individuais nas tarefas 2 e 5 (RT2 e RT5) e relatórios em grupo nas tarefas 3 e 4 (RT3 e RT4). Uma vez que não tinham experiência na realização de relatórios, a professora forneceu-lhes um conjunto de indicações escritas, apoiadas por indicações orais. Nestas, pede-se aos alunos para descreverem como pensaram e o que fizeram, desde a leitura e interpretação da tarefa até à descoberta de determinados resultados. Indica-se que no relatório devem constar: título; objectivo (problema definido, problema formulado, situação apresentada, etc.); descrição dos processos utilizados, das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas; conclusões; comentários relativamente à tarefa proposta (se contribuiu ou não para uma melhor aprendizagem da matemática, de que forma, etc.). A elaboração dos relatórios das tarefas 2, 3 e 4 antecedeu o momento de discussão das conclusões. O relatório da tarefa 5 foi elaborado pelos alunos depois da discussão, na aula dos resultados.

² “Conhecer melhor os números” é primeira unidade temática do programa de matemática do 7.º ano e agrupa os seguintes tópicos: números primos, números compostos, potências de expoente natural, raiz quadrada e raiz cúbica e expressões com variáveis.

De seguida, apresentamos uma sinopse das tarefas realizadas na aula. Incluímos apenas o enunciado da tarefa 5, que serve de base ao trabalho dos alunos, analisado em detalhe neste artigo⁴.

Tarefa 1: À volta com os divisores. Esta tarefa apresenta uma estrutura algo orientada, colocando uma série de questões. O objectivo era que os alunos recordassem a noção de divisor como ponto de partida para o desenvolvimento de novos conceitos matemáticos, como número primo e quadrado perfeito. Na discussão final, foram introduzidos alguns conteúdos matemáticos, aproveitando as explorações dos alunos.

Tarefa 2: Explorando sequências. Mais aberta que a anterior, esta tarefa tinha como principal objectivo desenvolver nos alunos a capacidade de formular problemas a partir de uma situação aberta e, sobretudo, de identificar regularidades numéricas. Pretendia-se, ainda, que os alunos mobilizassem conhecimentos matemáticos já adquiridos sobre números. Cada aluno realizou um relatório individual do seu trabalho, tendo por base um conjunto de indicações fornecido para o efeito. A discussão dos resultados foi realizada depois de analisados os relatórios dos alunos.

Tarefa 3: Regularidades nas potências. O objectivo principal desta tarefa era levar os alunos a mobilizar conhecimentos sobre potências leccionados no ano anterior e desenvolver a sua capacidade de encontrar regularidades. Além disso, ela constituía um ponto de partida para explorar nas aulas seguintes as regras do produto e do quociente de potências com a mesma base e expoentes diferentes. Os alunos elaboraram um relatório em grupo que foi discutido na aula do dia seguinte.

Tarefa 4: Propriedades verdadeiras e falsas. Com uma estrutura algo orientada, esta tarefa procurou ir de encontro às dificuldades evidenciadas pelos alunos no cálculo de potências e na compreensão de algumas propriedades. Os alunos elaboraram, em grupo, um relatório da actividade desenvolvida, utilizado, na aula do dia seguinte, para a discussão dos resultados obtidos. Durante a discussão foi organizada no quadro uma síntese das conclusões que os alunos registaram no seu caderno.

Tarefa 5: Seguindo cadeias... Esta tarefa, bastante aberta, pretendia desafiar a criatividade dos alunos, desenvolvendo as suas capacidades de formulação de questões e conjecturas, de validar essas conjecturas e de comunicar os resultados oralmente e por escrito. Depois da apresentação e discussão, na aula, das investigações realizadas por cada grupo, os alunos elaboraram relatórios individuais, baseados no trabalho desenvolvido em grupo e nas discussões ocorridas na aula.

Tarefa n.º 5 – Seguindo cadeias...

A cadeia apresentada é construída a partir do seguinte procedimento:

Escolhe um número qualquer de três dígitos.

Considera o primeiro e o segundo dígitos e subtrai o menor ao maior.

Procede do mesmo modo, considerando agora o segundo e o terceiro dígitos e, posteriormente, o terceiro e o primeiro.

⁴ Os enunciados das outras quatro tarefas podem ser vistos em Rocha (2003).

Por exemplo, partindo do número 327, obteríamos a sequência:

327 → 154 → 413 → 321 → 112 → 011 → 101 → 110 → 011 →

1. Experimenta aplicar este procedimento a outros números de três dígitos. O que encontraste? Regista as conclusões que fores obtendo.

2. Será que todas as cadeias geradas deste modo terminam da mesma forma?

Investiga e apresenta as tuas conjecturas.

Investigação empírica

Esta investigação resultou do interesse da primeira autora, como professora, em explorar possíveis mudanças na sua prática pedagógica, procurando saber se a realização de tarefas de investigação matemática poderia ter influência na aprendizagem dos alunos e nas suas concepções. Trata-se, por isso, de uma pesquisa sobre a sua própria prática profissional (Ponte, 2002), realizada com a colaboração do segundo autor. A investigação segue uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1999), adoptando o formato de estudo de caso, que possibilita a compreensão de uma entidade complexa, mas bem definida, envolvendo relações humanas e outros factores (Cohen, Manion & Morrison, 2000). Este artigo foca dois alunos, com características diversas.

A escola onde decorre o estudo situa-se no interior do país, num meio rural, onde a agricultura é a principal actividade económica. Os pais, em geral, manifestam pouco interesse pela situação escolar dos seus filhos, o que se deve, possivelmente, ao seu reduzido grau de escolarização e ao facto de trabalharem no sector primário. A turma é constituída por alunos na sua maioria fracos. Inicialmente tinha 20 alunos – 12 rapazes e 8 raparigas – mas no fim do ano lectivo restam apenas 12. Os alunos têm idades compreendidas entre 12 e 16 anos, predominando os grupos etários dos 14 e 15 anos. Dos alunos, 9 estão a repetir o 7.º ano e alguns não transitaram noutros anos de escolaridade. A maior parte dos alunos, no início do ano, considera ter dificuldade na disciplina de matemática, havendo, no entanto, 4 que a referem como a sua disciplina preferida. Além disso, a maioria dos alunos revela também lacunas em Português.

Os alunos objecto de estudo são Orlando e Marta (pseudónimos). Optámos por estudar 2 alunos, um com baixo, outro com alto aproveitamento, de sexos diferentes e pertencentes a dois grupos distintos. A maioria dos alunos, no fim das aulas, apanhava o transporte para as suas aldeias, mas estes 2 tinham alguma flexibilidade de horários, pois Orlando pernoitava na residência de estudantes perto da escola e Marta era facilmente dispensada de algumas aulas, dado o seu bom aproveitamento escolar. Para além das observações realizadas nas aulas, foi-lhes solicitada a realização de duas entrevistas, tendo sido obtida a anuência dos respectivos encarregados de educação. Os dois alunos mostraram-se bastante receptivos e colaboraram em todas as actividades que lhes foram propostas.

A recolha de dados envolveu observação participante (Cohen et al., 2000), realizada pela primeira autora, na sua dupla qualidade de professora e investigadora, a partir da qual foram tiradas notas de campo. Foram também

realizadas 2 entrevistas aos alunos estudados, ambas com cerca de 50 minutos. Na primeira (E1) foi solicitada a realização de uma tarefa de investigação (“Somando números consecutivos”). Esta tarefa foi proposta de forma a poder observar-se, de forma mais próxima, de que modo os alunos percorrem as diferentes fases de investigação matemática e que tipo de dificuldades experimentam, sendo-lhes pedido para explicarem o seu pensamento. Na segunda entrevista (E2) recolheu-se mais informação sobre as suas concepções e atitudes relativamente à matemática e à sua aprendizagem. As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas. Tendo em vista conhecer as concepções dos alunos sobre a matemática e a aprendizagem desta disciplina, foram ainda administrados dois questionários, um (QA) no início da recolha de dados e outro (QB) no fim dessa recolha. Os relatórios das tarefas de investigação e as fichas de trabalho realizadas pelos alunos foram também recolhidos para estudar os seus processos matemáticos e eventuais dificuldades.

A análise de dados foi realizada tendo por base a transcrição das entrevistas gravadas em áudio, as fichas de trabalho, os relatórios, as notas de campo, os questionários e demais documentação. O primeiro passo foi a descrição das aulas, de modo a perceber como os alunos se envolveram na realização das investigações matemáticas. De seguida, procurámos identificar as concepções e atitudes dos dois alunos no início e no fim do estudo, a partir da segunda entrevista, da análise comparativa dos questionários e dos seus relatórios individuais. Depois, analisámos as capacidades matemáticas, com relevo para o raciocínio matemático de ambos no trabalho de grupo, identificando episódios significativos, analisando os relatórios individuais, bem como o seu desempenho individual na primeira entrevista. Para ilustrar estas capacidades foram seleccionados segmentos significativos relativos ao seu raciocínio, incluindo a mobilização de conhecimentos e o estabelecimento de conexões.

Orlando

Apresentação

Apesar dos seus treze anos de idade, Orlando apresenta um aspecto físico desenvolvido. O seu porte atlético deve-se, em parte, ao facto de praticar desporto regularmente. Sendo alto e forte, é também meigo e um pouco tímido. Contudo, é sociável e tem boa relação com os colegas, procurando não se envolver em conflitos.

Natural de uma aldeia afastada do centro da vila onde se situa a escola, fica alojado, durante a semana, numa residência de estudantes. Desta forma, contacta com os pais apenas ao fim de semana, quando vai a casa. É muito reservado no que diz respeito à família – sabe-se apenas que o pai é segurança numa discoteca e a mãe, doméstica. Nos seus tempos livres, gosta de ver televisão e desenhar. Numa aula, revelando o seu gosto particular pelo desenho, indica que gostaria de ser arquitecto. Além disso, menciona que gosta de jogar e apostar no salão de jogos, fazendo-o regularmente. Na escola, tal como alguns

colegas, pertence ao Clube da Floresta⁴. Em certas ocasiões, parece ausente da aula e habitualmente não se empenha nas tarefas propostas para casa. No entanto, quando trabalha em grupo, manifesta a sua opinião e procura colaborar com os colegas, tendo até uma certa preferência por este tipo de trabalho. No final do 6.º ano, obtém melhores resultados nas disciplinas de Educação Visual e Educação Física, as suas preferidas. No final do 7.º ano, volta a conseguir melhores resultados nestas disciplinas. É ainda de salientar que Orlando obtém nível 2 na disciplina de matemática durante o ano lectivo em que se realizou o estudo⁵. Apesar de ter desenvolvido algumas das capacidades básicas indicadas no programa do 7.º ano, não consegue atingir um nível de desempenho superior. O modo como Orlando se envolve nas aulas de matemática varia ao longo do ano. Participa de forma mais espontânea nas aulas em que se realizam tarefas de investigação, revelando bastante gosto por esta actividade. A sua interacção com outro aluno do seu grupo é de tal forma intensa que, na maioria dos casos, torna-se difícil saber qual dos dois realiza determinada exploração ou chega a certa conclusão. O seu reduzido empenho nos trabalhos de casa justifica que só tenha entregue um dos dois relatórios individuais pedidos. Nas aulas de natureza mais expositiva, nem sempre acompanha a abordagem dos assuntos, uma vez que, como ele próprio refere, tem tendência a distrair-se.

Tendo em consideração as suas características pessoais, não é de estranhar a sua atitude pouco expansiva nas entrevistas. Assim, as respostas obtidas são quase sempre sintéticas, limitando-se, algumas vezes, a afirmações do tipo “sei lá”, “sim” ou “não”, o que dificultou o desenrolar das entrevistas, obrigando a pesquisadora a reformular diversas questões.

Desempenho matemático

Raciocínio matemático nas quatro primeiras tarefas. Vejamos a actividade de Orlando durante o trabalho de grupo, na realização das tarefas de investigação, tendo em atenção, no entanto, que é difícil separar a sua actividade da de um outro colega.

A tarefa 1 permite a Orlando compreender como abordar uma tarefa deste tipo. De facto, perceber que se pretendia valorizar os processos matemáticos e não os resultados revela-se relativamente complicado, sendo só satisfatoriamente conseguido com a segunda tarefa de investigação matemática.

A tarefa 2 é marcada pela participação de Orlando na actividade do grupo, procurando explorar a situação apresentada em diferentes vertentes, todas relacionadas com as regularidades numéricas sugeridas pela figura. No relatório individual (RT2), mostra ter sido capaz de, perante uma situação matemática onde nada é definido *a priori*, formular uma meta a atingir. Em interacção com os colegas de grupo, mostra ter percebido o que é uma exploração, identificando algumas regularidades entre os números da sequência

⁴ O Clube da Floresta é dinamizado pelos professores de Ciências Naturais. As suas actividades têm por objectivo sensibilizar os alunos para a preservação da natureza, em particular, do património florestal.

⁵ Na escala de 1 a 5, trata-se do segundo nível mais fraco.

numérica gerada, assim como um procedimento para continuar a construção da figura apresentada.

Na tarefa 3, apesar da agitação geral da turma, o grupo de Orlando debruça-se sobre a proposta de investigação. Tal como os colegas de grupo, ele revela alguma dificuldade em escrever determinados números sob a forma de potência. Na verdade, ainda não domina o conceito de potência de expoente inteiro, como se pode depreender das tentativas realizadas pelo grupo de escrever o número 200 como potência de base 2.

Na tarefa 4, Orlando colabora activamente no trabalho desenvolvido pelo grupo. De facto, recorrendo à calculadora, efectua e verifica muitos dos cálculos necessários para a determinação das potências pedidas. Além disso, no momento em que o grupo começa a elaborar o seu relatório, valoriza a parte gráfica, sem interferir no registo das conclusões do grupo.

Raciocínio matemático na tarefa 5. Nesta tarefa, Orlando não chega a elaborar o seu relatório individual. Sem ser a tarefa de que mais gostou, envolve-se nela de forma muito entusiástica, tanto no momento de exploração e investigação da situação apresentada, como no momento de discussão e apresentação das investigações a toda a turma. Em parceria com o seu colega, inicia a exploração da situação sugerida na tarefa, construindo uma cadeia com o número 007.

007 → 077 → 707 → 770 → 077 → 707 → ...

Rapidamente observa que a cadeia entra em ciclo, mas não consegue fornecer uma sugestão que possibilite ao grupo continuar a exploração. A intervenção da professora permite que Orlando, em interacção com os restantes elementos do grupo, compreenda de que forma pode prosseguir a sua exploração. Na verdade, constrói mais cadeias, mantendo invariantes certas características dos números iniciais, e formula questões que conduzem à elaboração de conjecturas interessantes. Por exemplo, Orlando e o seu colega do grupo experimentam gerar cadeias com os números 908 e 504, tendo observado que ao fim de oito e quatro passos, respectivamente, as cadeias entram em ciclo:

→ 908 → 981 → 178 → 617 → 561 → 154 → 413 → 321 → 112 →
 011 → 101 →
 504 → 541 → 134 → 213 → 121 → 110 →

Os alunos conjecturam que, se o primeiro algarismo é o maior dos três, o segundo é zero e o terceiro menor que o primeiro, então a cadeia, ao fim de um número de passos igual ao último algarismo do número inicialmente considerado, entra em ciclo. No entanto, o grupo aceita como correcta a conjectura com a realização de apenas alguns testes, verificando, no momento de discussão dos resultados, que esta não é afinal válida para todos os casos.

Deste modo, nas diferentes tarefas de investigação matemática que realiza, Orlando mostra ter percebido em que consiste a fase inicial de uma exploração matemática, formulando questões e conjecturas e testando a sua validade. No entanto, nunca demonstra as suas conjecturas, limitando-se a realizar testes para alguns casos.

Mobilização de conhecimentos e conexões. Durante o estudo, foi difícil perceber de que forma Orlando mobiliza conhecimentos matemáticos já estudados. Contudo, nos momentos em que realiza as várias tarefas de investigação matemática em grupo, é possível observar a sua capacidade de recorrer a algoritmos e regras matemáticas para efectuar cálculos e utilizar procedimentos úteis para o desenvolvimento de algumas explorações. Na tarefa 1, o aluno reconhece que os números com um número ímpar de divisores são todos os que se obtêm pelo “método da tabuada, por exemplo, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, etc.”. Com isto, pretende dizer que, ao escolher um número natural e efectuar o produto desse número por números naturais compreendidos entre um e dez, os únicos produtos que interessam são aqueles que se obtêm com dois factores iguais. Como o aluno não domina bem a linguagem específica da matemática, usa o termo “método da tabuada” para explicar o seu raciocínio, recorrendo ao seu conhecimento da tábua da multiplicação. Ainda relativamente ao conhecimento de procedimentos, na tarefa 4, mostra saber calcular potências de expoente inteiro, recorrendo, frequentemente, ao uso da calculadora para ser mais rápido.

Durante as actividades de investigação, além de evidenciar a sua capacidade de cálculo, Orlando aplica conhecimentos matemáticos já aprendidos. Assim, apresenta no seu relatório (RT2) várias sequências de números – pares, ímpares e naturais –, referindo: “Escrevendo os números em cruz da fórmula ficam números naturais”. Também na segunda entrevista, mostra saber diferenciar números pares e ímpares.

Orlando revela alguma dificuldade em exprimir leis e propriedades matemáticas fazendo uso da linguagem algébrica. De facto, parece pouco à vontade ao utilizar esta linguagem para exprimir um argumento aplicável a um conjunto infinito de casos. Por exemplo, elabora um argumento para justificar a validade de uma conjectura, referindo-se sempre a um caso concreto, utilizando apenas a língua materna: “Nós achamos metade [de 2523] que é 1261, que é do vírgula cinco, juntando mais um número... Mais uma unidade, a última unidade, portanto, em vez de pôr um, pôr dois, já dá o número certo!” (E2). No entanto, percebe-se que a sua justificação pode ser generalizada para qualquer número ímpar.

Concepções e atitudes

Sobre a matemática. No início do estudo, Orlando reflecte uma imagem algo redutora da matemática, mencionando que se trata de “uma disciplina que nos ensina a fazer contas”. No fim do ano, refere que “a matemática serve para ensinar os números, e fazer contas e aprender a Geometria”. Embora se note um alargamento do campo da matemática à Geometria, as “contas”, ou o cálculo, surgem sempre em primeiro lugar.

É de notar que esta expressão “fazer contas”, parece não se referir somente às operações numéricas, mas também a outras operações matemáticas eventualmente usadas na resolução de problemas. Com efeito, quando lhe é pedido para se explicar, a sua resposta dá a entender que se trata de um sentido mais abrangente:

Professora: Tu disseste que se tinha que fazer algumas contas... E eu estava a tentar perceber o que é que tu achas que realmente se podia fazer para se tentar resolver [o problema].

[Silêncio]

Professora: Então...

Aluno: Acho que não!

Professora: Então! Contas! Afinal não...

Aluno: Não! Se houver... Tem é que se descobrir qual é a flor!

Na entrevista, são-lhe propostas várias situações que se distinguem umas das outras pelo contexto, pela formulação da questão, pelo número de soluções e pelo método de abordagem da questão. O aluno observa que todas elas têm a ver com a disciplina: “Todas têm um bocadinho de matemática!” No entanto, considera uma situação envolvendo números como aquela onde a matemática está mais presente:

Aluno: Acho que é esta...

Professora: A quarta... Procura descobrir relações entre os números da figura! E por que é que te parece ser essa onde existe mais matemática?

Aluno: É assim, é uma situação onde se trabalha mais com os números e... E descobrir coisas!

No fim do estudo, Orlando, ao indicar que a matemática é uma disciplina onde “se trabalha mais com números”, parece encará-la, ainda, como um corpo de conhecimentos um tanto fechado. No entanto, relaciona-a também com a possibilidade de “descobrir coisas”. Este facto permite-nos concluir que as concepções do aluno relativamente a esta ciência parecem influenciadas pela experiência realizada, uma vez que o processo de descoberta, intimamente relacionado com a actividade investigativa, passa a ser um elemento fundamental na sua caracterização.

Sobre a aprendizagem da matemática. Percebe-se que a aprendizagem da matemática de Orlando nos anos lectivos anteriores era essencialmente rotineira: “Era só fazer exercícios depressa para se dar a matéria depressa” (E2). Igualmente, no fim do estudo, menciona que: “O mais importante é aprender um bocado de tudo, mas para mim o mais importante é aprender a fazer contas” (QB). No entanto, a sua visão sobre a aprendizagem desta disciplina parece alargar-se um pouco: “Aprendemos a... Fazer contas, mais... A mexer mais com os números” (E2). Já não se refere apenas a realizar exercícios, fala também em lidar de modo mais informal com os objectos matemáticos.

Para Orlando, a realização de actividades de investigação matemática favorece a aprendizagem, ajudando os alunos a não esquecer os resultados e as conclusões obtidas, assumindo as descobertas matemáticas como algo que lhes pertence. É o que se depreende da sua resposta à pergunta se tinha gostado de realizar tarefas de investigação:

Gostei! [...] Porque... Por uma tarefa de investigação... Gostei porque somos nós próprios a descobrir e como nós descobrindo... Já

*nos fica aquela coisa nossa... De sermos nós a descobrir... E pronto!
Já não nos conseguimos esquecer assim tão depressa! (E2).*

No final do estudo, Orlando refere que estas actividades contribuem de forma positiva para a aprendizagem da matemática, pois permitem aos alunos “[descobrir] melhor algumas coisas”. O facto de se trabalhar em grupo, “permite a combinação de ‘cérebros’ pensadores” (QB), possibilitando a discussão de ideias e abordagens diferentes, bem como a exploração e investigação de certas situações matemáticas com maior profundidade. Por outro lado, acrescenta que nas aulas “normais” os alunos não se sentem tão envolvidos quando o professor expõe algum assunto e, como tal, têm uma maior tendência para dispersar a sua atenção.

Marta

Apresentação

Marta irradia energia. Com os seus doze anos de idade, é o membro mais novo de uma família composta por quatro elementos e recebe os mimos de todos. Em casa, é muito cumpridora dos seus deveres, trabalhando para a escola com afinco e auxiliando a mãe no café que esta explora. Revela ter um bom ambiente familiar e é muito acompanhada, o que se evidencia quando refere que a mãe, apesar de ter apenas o 6.º ano de escolaridade, a ajuda na realização de alguns trabalhos de casa, sobretudo para lhe dar uma opinião crítica. Apesar de ter os dias bastante preenchidos, encontra algum tempo para jogar num pequeno clube de futebol feminino. Além disso, gosta de andar de bicicleta, passear, juntar-se com os amigos e, nos momentos mais sossegados, de ler e ouvir música.

A sua faceta dinâmica também se manifesta na escola, onde participa regularmente em actividades extra-curriculares, como o Clube da Floresta. Desde o início do 2.º período, participa regularmente no “problema do mês”⁶, apesar de indicar no início do ano que os problemas são o que menos gosta em matemática. Na escola, gosta de ser líder, tanto dentro como fora da sala de aula, revelando sentido de justiça e de cooperação e muita responsabilidade. Talvez por este motivo, os colegas a tenham eleito para representar a turma como delegada⁷. Na sala de aula, apesar de sentir prazer em ser a primeira a realizar os trabalhos propostos e descobrir alguma coisa diferente, não se importa de ajudar os colegas e de partilhar com eles as descobertas, desde que eles manifestem interesse. No fim do 6.º ano de escolaridade obteve bons resultados a todas as disciplinas, manifestando preferência por Francês, Português e História. Num inquérito realizado no final do ano lectivo, muda a sua atitude relativamente à matemática: “Pois não gostava lá muito de

⁶ Trata-se de um concurso dinamizado pelos professores de matemática da escola. Em cada mês foram apresentados dois problemas novos – um para os alunos do 3.º ciclo e outro para os alunos do ensino secundário. Este concurso tinha como objectivo atrair os alunos para a matemática a partir da resolução de problemas que não exigiam o domínio de conhecimentos específicos da disciplina.

⁷ A delegada é a representante dos alunos da turma em certas reuniões da escola e faz de porta-voz dos colegas junto dos professores.

matemática e este ano estou 'apaixonada' [pela disciplina]... Tem sido ótimo". Durante o 7.º ano, Marta obtém sempre boas classificações a matemática: no 1.º período lectivo tem nível 4 e nos dois últimos períodos tem nível 5.

Desde o início do estudo, Marta revela persistência e dinamismo na realização de investigações na aula de matemática. O seu empenho na escola contribui para o seu envolvimento nas tarefas de investigação, que se reflecte na dinâmica do seu grupo. Ao longo do estudo, assume no grupo um papel de destaque, procurando organizar o trabalho dos colegas de modo a que todos contribuam para a exploração das situações matemáticas. No entanto, em algumas tarefas, explora isoladamente as situações e só depois partilha com os colegas de grupo as suas descobertas.

Desempenho matemático

Raciocínio matemático nas quatro primeiras tarefas. Na tarefa 1, tal como os colegas de turma, Marta evidencia surpresa e perplexidade perante uma actividade com características muito diferentes do habitual. Para ela não é de todo claro o modo como pode abordar a situação apresentada, iniciar e dar continuidade à exploração, organizar os dados obtidos e também o que é formular, testar e validar uma conjectura. No entanto, durante esta actividade, parece ter compreendido o que está em jogo na exploração de uma situação matemática.

Na tarefa 2, Marta tem maior facilidade. Dinamiza a actividade do seu grupo, sendo notório o seu entusiasmo sempre que chama a professora para dar a conhecer as regularidades encontradas. Demonstra ter-se apropriado de alguns processos matemáticos próprios de uma investigação. Durante a discussão na turma, e tendo como base o seu relatório, defende o seu trabalho, revelando gosto em explicar aos outros o que tinha efectuado, e procura também acompanhar a exposição dos colegas.

Na tarefa 3, Marta revela perspicácia e flexibilidade na determinação de regularidades numéricas. É a única aluna da turma que consegue descobrir a regularidade que permite continuar a sequência dos cubos apresentada, tendo explicado ao grupo a sua descoberta. Sobre este assunto, redige no relatório do grupo:

Começámos por observar bem os números e posições, verificámos que os algarismos somados eram todos ímpares e estavam seguidos, por ordem crescente, e verificámos logo de seguida que quando a base aumentava o seu valor uma vez, os algarismos somados também aumentavam de valor e quantidade. Por exemplo o n.º 2 a base passava para a base 3 os números somados eram 2 em quantidade e passavam a ser 3. Com estas descobertas conseguimos continuar a sequência.

Na realização do relatório, em grupo, da tarefa 4, Marta evidencia alguma facilidade em registar as propriedades das potências em linguagem algébrica:

Se descobrirmos o resultado da potência $a^n = x$ e se quisermos descobrir o resultado da potência seguinte a^{n+1} devemos multiplicar ao resultado anterior x o algarismo da base a

$$a^n = x \quad a^{n+1} = x \times a = y$$

Nota-se que, ao longo do estudo, progride a sua capacidade de comunicar por escrito as conclusões e os resultados da actividade, bem como os processos utilizados, tanto em português como em linguagem algébrica.

Raciocínio matemático na tarefa 5. Nesta tarefa, Marta recorre com grande espontaneidade a diferentes processos matemáticos. Também aproveita o momento de discussão para questionar os colegas, defender as suas conjecturas e refinar as conjecturas por eles apresentadas. Este momento possibilita-lhe a organização de ideias que tomam forma quando elabora, individualmente, o seu relatório, pois não só descreve a investigação efectuada pelo seu grupo, como desenvolve alguns aspectos resultantes da exploração e investigação matemática realizada pelos outros grupos.

Vejam os – recorrendo, para isso, a algumas partes do seu relatório – alguns dos processos matemáticos que usa durante a actividade em grupo. Os alunos começam por estudar as cadeias que se geram a partir de diversos números, como 256, 234, 579 e 369. Em seguida Marta relata o processo pelo qual as conjecturas começam a adquirir forma:

Nestas quatro cadeias descobrimos algo interessante. Descobrimos que no final das cadeias há números que se repetem. Nas quatro cadeias há um dígito que é comum o 0 (zero) e juntamente ao zero, numa cadeia aparece o 1, noutra o 2 e noutra o 3, eles aparecem pela mesma ordem mas os valores são diferentes

110 → 011 → 101 → 110...

220 → 022 → 202 → 220...

330 → 033 → 303 → 330...

Após uma observação pormenorizada das cadeias construídas, Marta formula de modo explícito uma questão: “Mas por que é numas cadeias a sequência dos números repetidos aparece com 1, noutra com 2 e noutra com 3?” Parece assim ter desenvolvido a sua capacidade de “inquirir”, sobretudo quando confrontada com situações de natureza aberta. Efectivamente, durante esta actividade de investigação matemática, a formulação de questões é uma constante.

Prossegue a sua investigação, e depois de identificar um problema, retoma a sua exploração:

Tentámos explorar mais na tentativa de responder a esta questão.

Agarrámos no primeiro número das cadeias, o número escolhido, e tentámos encontrar alguma coisa fora do normal.

O primeiro número da 3.ª cadeia, 579.

5-7-9 → Verificámos que se somarmos ao primeiro dígito mais 2 obtemos o segundo dígito e se somarmos mais 2 ao segundo obtemos o terceiro dígito.

$$5 + 2 = 7 + 2 = 9$$

O primeiro número da 4.ª cadeia, 369.

3-6-9 → Verificámos que se somarmos ao primeiro dígito mais 3 obtemos o segundo dígito e se somarmos mais 3 ao segundo dígito obtemos o terceiro dígito.

$$3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

Faz algumas observações e apresenta as conjecturas sob a forma de conclusões para os casos referidos:

Assim concluímos que quando os dígitos de um número avançam de 2 em 2, como por exemplo, os números 579, 246, 468... Os dígitos dos números repetidos são o 0 e o 2.

Quando os dígitos de um número avançam de 3 em 3, como por exemplo, os números 369, 258, 147... Os dígitos dos números repetidos são o 0 e o 3.

Para os números repetidos em que os dígitos são o 0 e o 1 os primeiros números das cadeias podem ir avançando de 1 em 1 como é o exemplo dos números 123, 456, 567..."

No entanto, procurando generalizar as conjecturas acima formuladas, interroga-se: “Mas será que os dígitos dos números repetidos também podem ser 0 e 4? E 0 e 5?” E prossegue o seu raciocínio, testando o que acontece para os casos formulados na questão:

Para responder a esta questão inventámos novos números cujos dígitos aumentam de 4 em 4.

$$\begin{array}{l} 048 \rightarrow 448 \rightarrow 044 \rightarrow 404 \rightarrow 440 \rightarrow 044... \\ 480 \rightarrow 484 \rightarrow 440 \rightarrow 044 \rightarrow 404 \rightarrow 440... \end{array}$$

Verificámos que na sequência dos números repetidos os dígitos dos números são o 0 e o 4, mas não podemos fazer mais números cujos dígitos aumentem de 4 em 4.

Já para o 5 não se podem fazer números para além dos da cadeia, pois se somarmos 5 ao dígito 5 obtemos 10 que já é um número com dois dígitos e isto acontece para o 6, o 7, o 8 e o 9.

Marta procede a um teste por exaustão, verificando que a sua conjectura era válida para todos os casos que seguiam a regularidade descrita. Realiza assim um trabalho que se pode considerar uma prova matemática.

Mobilização de conhecimentos e conexões. Em diferentes momentos da sua actividade de investigação, Marta recorre a conhecimentos matemáticos adquiridos nesse ano ou em anos anteriores. Por exemplo, na tarefa 1, usa a noção de divisor de um número natural, determinando números com um número ímpar de divisores e mostrando saber distinguir números pares e ímpares. De modo análogo, o conhecimento de determinadas sequências numéricas, tais como as dos números pares, ímpares e inteiros, permite-lhe encaminhar a exploração da tarefa 2 noutras direcções.

Demonstra também o seu domínio do cálculo, recorrendo a algoritmos para explorar diversas vertentes das situações apresentadas nas tarefas de investigação. Na tarefa 2 recorre a operações aritméticas, como a adição e a sua operação inversa, para determinar o procedimento para continuar a construção geométrica da figura pretendida. Na tarefa 3, no início não está muito segura da

forma como pode calcular as potências. No entanto, depois de a professora o recordar através de um exemplo, mostra-se capaz de aplicar esse procedimento de modo profícuo. A aluna faz o seguinte registro: “Começámos por multiplicar várias vezes a base (2) até obter os resultados indicados. Verifiquei que para 64 o expoente seria 6, pois era o número de vezes que o algarismo 2, a base, se multiplicava para o obter”.

Ainda sobre a componente procedimental da actividade matemática, foi possível observar que Marta prolonga o domínio onde já tinha aplicado certos algoritmos. Por exemplo, na tarefa 4, calcula correctamente potências de base fraccionária, tendo como base o procedimento que já tinha usado no cálculo de potências de base inteira. A propósito desta situação, revela, uma vez mais, a sua capacidade de cálculo no momento em que efectua o produto de fracções:

$$(1/2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ e } \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$$

A aluna, em diferentes actividades de investigação matemática, usa a linguagem algébrica, procurando exprimir certos pensamentos matemáticos através de leis, propriedades ou regras gerais. Por exemplo, na tarefa 5, recorre a esta linguagem, usada pela professora noutras situações, nomeadamente, na discussão com toda a turma das regras das potências. Mostra também um entendimento da linguagem algébrica, quando indica, por exemplo, que dois números iguais são representados pela mesma letra. Sobre este assunto, observe-se o seguinte extracto do seu relatório individual, relativo à generalização das cadeias que se iniciam com um número com dois dígitos iguais:

Regra geral:

nmn	→ xx0	→ 0xx	→ 0x	→ xx0...
nmm	→ 0xx	→ x0x	→ xx0	→ 0xx...
mnn	→ x0x	→ xx0	→ 0xx	→ x0x...

Na realização de actividades de investigação, Marta, ao tentar resolver problemas por ela formulados, recorda heurísticas que já utilizou na resolução de outros problemas. Procura assim fazer analogias entre o raciocínio matemático desenvolvido em diferentes problemas, com o intuito de encontrar um caminho para atingir o objectivo por ela definido. Por exemplo, estabelece conexões entre as heurísticas a aplicar e as heurísticas seguidas na resolução de um problema anterior: “Mas se... Para dar 16, já não pode ser 7 e 8, ou 8 e 9, tem que ser 7 mais 9 porque tira-se aqui e põe-se aqui! E fica... É como aquele problema dos cães que deu no mês passado!” (E2).

Concepções e atitudes

Sobre a matemática. Ao longo do ano, Marta revela um grande interesse pelas actividades de investigação, envolvendo-se activamente na sua realização. Este interesse e entusiasmo pelas investigações matemáticas levam-na a mudar a sua relação com a disciplina: “Eu, sinceramente, adorei [as aulas deste ano] pois não gostava lá muito de matemática e este ano estou ‘apaixonada’ pela matemática, tem sido ótimo” (QB).

A sua adesão às actividades de investigação não significa, no entanto, uma mudança total das suas concepções da matemática. No final do ano lectivo, Marta ainda apresenta uma visão da matemática centrada no cálculo e na resolução de exercícios repetitivos. Esta ideia surge no questionário realizado no final do estudo, quando refere “que a matemática é um assunto que tem de ser praticado e compreendido” (QB). Também durante a entrevista, selecciona como sendo a situação que tem mais a ver com a matemática, uma que associa directamente ao cálculo: “Primeiro temos que efectuar mais cálculos...”. Só depois acrescenta, tentando justificar: “Pensar mais! É mais difícil, mais... Temos que efectuar mais cálculos... É assim!” (E2). Esta concepção da matemática está ligada ao ensino rotineiro que Marta teve anteriormente: “Nos anos anteriores, tinha aprendido que a matemática era uma coisa muito difícil, era uma coisa que se tinha que estar sempre a ‘marrar’, porque senão [...] não se conseguia aprender nada!” (E2).

No final do ano lectivo, apesar de continuar a manifestar algumas crenças antigas, Marta evidencia algumas modificações na forma como encara a matemática. Por um lado, passa a valorizar o pensamento matemático como um elemento que lhe permite associar uma situação à matemática. Por outro lado, percebe que esta disciplina é acessível a todos, não sendo “uma coisa muito difícil”. A realização de investigações matemáticas parece ter influenciado de modo significativo as suas concepções em relação à disciplina. Essa influência é ainda mais visível quando Marta se refere à sua natureza inacabada: “Explorar alguma coisa, porque eu acho a matemática é algo sem fim, quando se descobre algo há sempre outra coisa por trás e eu acho que é essa a actividade de um matemático” (QB).

Sobre a aprendizagem da matemática. No início do estudo, Marta vê a aprendizagem da matemática como uma actividade muito estruturada, em que o estudo das regras precede a sua aplicação em exercícios: “O ano passado, a stora⁸ começava, por exemplo, um exercício qualquer no quadro e depois mandava-nos logo fazer um montão de coisas logo a seguir!” (E2). Não altera completamente esta concepção, pois, no fim do estudo, ainda refere que o que é mais importante aprender nas aulas de matemática é “primeiro aprender as regras e depois praticar, claro, com alguma coisa interessante e divertida no meio” (QB). Trata-se de uma perspectiva da aprendizagem da matemática essencialmente tradicional, embora com a *nuance* que ela deve surgir de forma natural, no contexto de uma actividade matemática significativa, interessante e divertida. Parece haver aqui alguma influência da realização de investigações matemáticas, pois, como refere, estas actividades apresentam a matemática “de uma forma mais divertida” (E2). É também o que se pode concluir de outro seu comentário: “Agradeço estas propostas [de actividades de investigação matemática] pois ajudam-nos não só a gostar mais da matemática como a sabê-la dirigir e compreender por meios mais simples e que nos interessam” (RT5).

Houve, no entanto, aspectos das suas concepções em relação à aprendizagem da matemática que foram muito influenciados pelas experiências

⁸ Stora é a abreviatura de “senhora doutora”, sendo o termo habitual com que os alunos se dirigem às professoras nas escolas portuguesas deste nível de ensino

vividas nas aulas onde realizou actividades de investigação. Assim, quando questionada se, na realização de uma investigação, é de matemática que se trata, responde do seguinte modo:

Era matemática, mas era mais... O que nós já temos na cabeça... Não era de estudar e depois ir para a tarefa! É mais aquilo que nós... Uma pessoa normal, por exemplo, que não tenha quase [estudos]... Conseguir resolver alguma coisa, porque aquilo [uma actividade de investigação] é para descobrir mais coisas de matemática! E se formos descobrindo passo a passo é que chegamos a mais temas de matemática e isso... (E2).

A actividade investigativa permite-lhe actuar como uma “exploradora matemática” e, ao experimentar este papel, sente ter mais autonomia na forma como conduz o seu pensamento matemático. Além disso, Marta acredita que este tipo de actividade possibilita uma maior proximidade do aluno com a matemática, envolvendo-o de modo mais profundo e responsável na sua aprendizagem. Reconhece ainda que a actividade de investigação permite a qualquer aluno aprender matemática, pois, como menciona, qualquer pessoa, mesmo que não tenha muita formação escolar, consegue desenvolver algum trabalho. Com a realização do estudo, percebe que há outros modos de aprender matemática, com ênfase no processo de descoberta.

Conclusão

Este trabalho mostra que a realização de investigações matemáticas constitui uma situação completamente nova para estes alunos do 7.º ano. Apesar das dificuldades iniciais que, em grau diferente, ambos experimentaram, à medida que realizam estas tarefas, Marta e Orlando mostram compreender o papel a assumir numa investigação, evidenciando uma evolução significativa. Na verdade, ambos mostram terem-se apropriado de alguns processos matemáticos essenciais numa investigação. No trabalho realizado na aula, ao longo de cinco tarefas, desenvolvem a capacidade de explorar situações matemáticas abertas e tornam-se sensíveis a aspectos relacionados com o processo de descoberta em matemática. Estes resultados corroboram os de pesquisas anteriores (Brocardo, 2001; Segurado, 1997), sobre o modo como os alunos aprendem a realizar investigações matemáticas.

Nenhum dos alunos chega a desenvolver a compreensão da necessidade de uma prova matemática o que, de resto, é natural, dado frequentarem o 7.º ano. Nunca, até aqui, este processo foi formalmente abordado na escola, nem, provavelmente, fora dela. No entanto, ambos os alunos chegam a fazer raciocínios que constituem verdadeiras provas matemáticas – Marta, quando testa todos os casos possíveis num problema e Orlando, quando sustenta uma afirmação com um procedimento que permite dar a resposta para qualquer caso –, mas não parecem ter-se apercebido do alcance deste tipo de argumentação. Questionados para provarem as suas conjecturas, em diferentes momentos mostram não perceber a diferença entre verificar uma conjectura para alguns casos e demonstrá-la para todos. Isto evidencia claramente a importância de trabalhar este processo neste nível de escolaridade, em experiências de

aprendizagem diversificadas e continuadas, de forma a permitir uma progressiva apropriação da noção de demonstração matemática.

Tanto Marta como Orlando tiram partido dos seus conhecimentos matemáticos. Marta recorre a algoritmos para realizar cálculos e usa uma linguagem algébrica para formular regras e propriedades. Usa heurísticas relativas a problemas já solucionados para resolver novos problemas que formula. Por sua vez, Orlando mostra alguma destreza no cálculo, procurando aplicar algoritmos que já conhece e desenvolver algoritmos para explorar novas situações matemáticas. No entanto, ambos os alunos parecem sentir-se mais à vontade nas tarefas que não envolvem pré-requisitos matemáticos. Isto sugere que, na realização de investigações, eles têm alguma dificuldade em mobilizar aprendizagens anteriores, possivelmente por insegurança ou por estarem habituados a usar os conceitos e procedimentos matemáticos de modo mais restrito. A partir das tarefas propostas, os alunos aprenderam os conceitos de quadrado perfeito e número primo, bem como diversas estratégias e notações específicas. Além disso, Marta mostra-se capaz de generalizar as regras de cálculo das potências de base inteira para as potências de base fraccionária. Estes resultados mostram, com mais clareza do que as pesquisas de Junqueira (1996), Segurado (1997) e Brocardo (2001), as potencialidades do trabalho investigativo para a aprendizagem de conceitos e processos matemáticos.

Ambos os alunos aderem fortemente a este tipo de tarefa, que sentem ser positivo para a sua aprendizagem, tal como se verificou nas pesquisas anteriores. Eles passaram a ver a matemática de modo mais dinâmico e a ver-se a si próprios assumindo um papel mais activo na exploração de situações e na descoberta de relações matemáticas. No entanto, a mudança nas suas concepções esteve longe de ser profunda, ficando aquém do que se verificou no estudo de Brocardo (2002), que envolveu uma experiência mais prolongada no tempo. Isto evidencia que a realização de investigações num período de tempo circunscrito dificilmente tem o mesmo alcance que a sua realização frequente e regular ao longo de todo um ano lectivo.

Este trabalho confirma assim as potencialidades que a realização deste tipo de tarefas tem para proporcionar aos alunos de diferentes níveis de desempenho um novo tipo de experiência matemática, susceptível de estimular a sua capacidade de raciocínio, o seu desembaraço em lidar com situações matemáticas de natureza aberta e de alterar a sua visão desta disciplina. No entanto, mostra também que, para levar os alunos à construção de novas ideias matemáticas (conceitos, procedimentos, estratégias), a aperceberem-se da necessidade de uma prova matemática e a uma visão da matemática mais centrada na resolução de problemas e no raciocínio (e menos no cálculo e na memorização), é necessária uma experiência mais continuada e aprofundada, recorrendo eventualmente a uma maior diversidade de tarefas. Isto coloca, naturalmente, o problema da integração das actividades de investigação na gestão curricular do professor de matemática, o que constitui um interessante desafio para futuras investigações.

Referências bibliográficas

APM Renovação do currículo de matemática. Lisboa: APM, 1988.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1999.

BROCARD, J. Investigações na aula de matemática: A história da Rita. In LOPES, I. C., SILVA J; FIGUEIREDO, P (Eds.), *Actas ProfMat 2001* (pp. 155-161). Lisboa: APM, 2001.

BROCARD, J. As investigações na sala de aula de matemática: Um projecto curricular no 8.º ano (*Tese de doutoramento*, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. (disponível em <http://ia.fc.ul.pt>), 2002.

COHEN, L., MANION, L.; MORRISON, K. *Research methods in education*. London: Routledge, 2000.

FRANK, M. L. Problem solving and mathematical belief. *Arithmetic Teacher*, 35, 32-34, 1988.

GAROFALO, J. Beliefs and their influence on mathematical performance. *Mathematics Teacher*, 82(7), 502-505, 1989.

JUNQUEIRA, M. Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, 5(1), 61-108, 1996.

NCTM. *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM, 1991.

NCTM. *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: IIE e APM, 1994.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação, educação matemática: *Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE, 1992.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM, 2002.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em educação*, 2, 93-169, 2003.

PONTE, J. P., BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; MATOS, J. F. Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In: ABRANTES, P L. C. LEAL; PONTE, J.P. (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996.

PONTE, J. P.; MATOS, J. F. Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In: J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.); *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice*. Berlin: Springer, 1992, p. 239-254.

PONTE, J. P., MATOS, J. M.; ABRANTES, P. *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE, 1998.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70, 1998.

PONTE, J., OLIVEIRA, H., CUNHA, H.; SEGURADO, I. *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE, 1998.

ROCHA, C. A. Uma experiência com actividades de investigação na aula de matemática: Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7.º ano de escolaridade (*Dissertação de Mestrado*, Universidade do Porto). (disponível em <http://ia.fc.ul.pt>), 2003.

SEGURADO, I. A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2.º ciclo (*Dissertação de Mestrado*, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. (disponível em <http://ia.fc.ul.pt>), 1998.

SEGURADO, I. O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-73). Lisboa: APM, 2002.

SEGURADO, I., & Ponte, J. P. Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7(2), 5-40, 1998.