

Internet e *softwares* de Geometria Dinâmica como atores na produção Matemática on-line¹

Silvana Cláudia Santos²
Marcelo de Carvalho Borba³

Resumo: Neste artigo apresentamos exemplos de como atividades de geometria euclidiana espacial podem ser propostas, desenvolvidas e discutidas a distância em um ambiente virtual de aprendizagem, utilizando um *software* de geometria dinâmica. Dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa, coletamos dados em um curso de extensão universitária a distância, oferecido a professores de matemática. Neste trabalho destacamos a forma como diferentes interfaces, como o *chat*, moldam a elaboração das atividades de geometria desenvolvidas nesse ambiente. Para finalizar, apresentamos perspectivas acerca da produção matemática com base no desenvolvimento de um novo ambiente virtual de aprendizagem e de um *software* de geometria para a Web, ambos relacionados a um projeto do qual nosso grupo de pesquisa participa. Discutimos também, com base em um estudo “empírico”, como o modelo de um curso, bem como as mídias utilizadas, condiciona a produção matemática e como novas interfaces podem transformá-la.

Palavras-chave: Educação a Distância; Internet; *softwares* de Geometria Dinâmica; produção matemática; Geometria Espacial.

Internet and Dynamic Geometry software as actors in the production of Mathematics on-line

Abstract: In this article, we present examples of how spatial Euclidean geometry activities can be proposed, developed, and discussed at a distance in a virtual learning environment using a dynamic geometry software. Using a qualitative

¹ Embora não sejam responsáveis pelas posições aqui expressas, gostaríamos de agradecer a Ana Paula Malheiros e Sandra Malta Barbosa, membros do GPIMEM, que contribuíram com críticas a versões preliminares deste artigo.

² Mestre em Educação Matemática pela UNESP, campus de Rio Claro, e membro do GPIMEM. E-mail: ssantos@rc.unesp.br

³ Docente do Programa da Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, campus de Rio Claro, e coordenador do GPIMEM. E-mail: mborba@rc.unesp.br

research approach, we collected data in a university extension distance course offered to mathematics teachers. In this study, we emphasize the way different interfaces, such as chat, shape the elaboration of the geometry activities that were developed in this environment. We end by presenting perspectives on mathematical production drawing on our experience with the development of a new virtual learning environment and a geometry software for the Web, both associated with a project in which our research group is participating. We also discuss, based on an “empirical” study, how the model for a course, as well as the media used, condition mathematical production, and how new interfaces can transform it.

Key words: Distance education, dynamic geometry software, mathematical production, spatial geometry.

Introdução

O avanço das tecnologias digitais tem acarretado mudanças em vários setores da sociedade, e no meio educacional a situação não é diferente. Com a Internet, novas possibilidades de comunicação surgem para a Educação, em especial a Educação Matemática, por modificar as noções de espaço e tempo (KENSKI, 2003) e, principalmente, pelas particularidades que a linguagem matemática apresenta. *A Internet e as interfaces associadas a ela criaram uma nova forma de pensarmos a Tecnologia Informática (TI) em Educação Matemática* (BORBA, 2004, p. 296).

Diante disso, pesquisas têm sido realizadas para investigar como a Internet modifica e condiciona as atividades educacionais (BORBA, 2005; KENSKI, 2003; GRACIAS, 2003, entre outras). De acordo com Gracias (2003, p. 36), *as interações proporcionadas pelas redes telemáticas, correio eletrônico, listas e grupos de discussão e sites, dentre outros, apresentam a vantagem de combinar a flexibilidade da interação humana com a independência no tempo e no espaço, sem perda de velocidade.*

Oliveira (2003, p. 34) discute sobre EaD e diz que essa modalidade de educação se reveste de imensa potencialidade, não como solução para todos os problemas, mas cumprindo papel relevante como

modalidade de educação do futuro, tanto nos países desenvolvidos como naqueles em via de desenvolvimento.

Já Gracias (2003, p.33) acredita que a EaD não pode ser entendida apenas como consequência da evolução das tecnologias; ela deve ser considerada também como uma possibilidade de superação de alguns desafios educacionais contemporâneos. Nesse aspecto, Kenski (2003, p. 68) acredita que

Os projetos de educação permanente, as diversas instituições e os vários cursos que podem ser oferecidos para todos os níveis de ensino e para todas as idades, a internalização do ensino – através das redes – criam novas dimensões para o acesso à educação, novas possibilidades de comunicação e agregação, novas oportunidades para o avanço na ação e na formação do cidadão que habita os múltiplos espaços das escolas – e das suas múltiplas linguagens.

A partir do exposto, acreditamos que pesquisas visando a investigar como utilizar um *software* de geometria em aulas presenciais de matemática, em diferentes aspectos, ainda são necessárias. Também já se torna igualmente necessário investigar essa mesma problemática em aulas de matemática a distância, baseadas na Internet.

O objetivo deste artigo é apresentar uma forma de discussão de geometria euclidiana em um ambiente *on-line* a distância, utilizando o *software* Wingeom⁴. Destacamos, também, o papel da Internet e desse *software* na elaboração das atividades de geometria que foram desenvolvidas em um ambiente virtual de aprendizagem. Nossa intenção não é apresentar “a” forma como propor um curso a distância para ensinar e aprender matemática, mas sim apresentar e discutir algumas possibilidades de produção matemática a distância com base em pesquisas que temos desenvolvido. Além disso, apresentamos perspectivas futuras para a Educação Matemática a distância, a partir da participação do GPIMEM⁵ em um projeto colaborativo para o desenvolvimento de um novo ambiente virtual de aprendizagem e

⁴ Disponível em: <<http://math.exeter.edu/rparris>>.

⁵ Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática. Home-page: <<http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html>>.

introduzimos um software de geometria com a intenção de integrá-lo às ferramentas desse ambiente.

Para levarmos essa discussão a cabo, vamos enfatizar as formas pelas quais a plataforma utilizada no curso e o modelo pedagógico empregado desempenham papéis importantes no modo como a produção de geometria em ambientes *on-line* se dá. Ao final discutiremos possibilidades de novas ferramentas geométricas, integradas a novas plataformas, modificarem a forma de se fazer geometria *on-line*.

Educação Matemática a distância *on-line*

Há alguns anos o GPIMEM tem-se dedicado a estudar o papel de diferentes Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no contexto da Educação Matemática. Dentre as pesquisas realizadas por esse grupo, Gracias (2003), Borba (2004, 2005), Santos (2006), Borba e Zulatto (2006) e outros têm como objetivo investigar, em particular, o papel da Internet no processo de produção de conhecimento.

Gracias (2003) pesquisou a reorganização do pensamento em um curso a distância, baseando-se nas idéias de Tikhomirov (1981) e, também, em Lévy (1993), no que se refere aos coletivos pensantes. E Borba (2005) estudou como diferentes mídias, em diferentes contextos, interferem na maneira como a matemática é produzida. Para ele, a matemática é transformada quando o contexto passa a ser *on-line* e a distância, já que em alguns desses ambientes, como, por exemplo, no *chat*, a escrita é o único meio de os participantes se comunicarem, de modo que ela passa a moldar a discussão matemática. Nesse aspecto, mudando as tecnologias, as possibilidades de produção matemática também mudam.

Bello (2004) e Lopes (2004) tiveram o mesmo contexto de investigação: um curso a distância, via Internet, para alunos do Ensino Médio de diferentes escolas da cidade de São Paulo. Contudo, os objetivos e os focos das pesquisas de ambos eram distintos. Por um lado, Bello (2004) preocupou-se com a colaboração entre os participantes desse curso, no que se refere às possibilidades de produção de conhecimento, e Lopes (2004), por outro lado, tinha como objetivos propor e analisar um modelo de avaliação para o curso em questão. A interação dava-se a partir de discussões sobre atividades de

geometria, mais especificamente transformações geométricas (isometrias).

Também discutindo essa temática, Bairral (2004) relata algumas contribuições das teleinterações em um ambiente *on-line* a distância para o desenvolvimento docente. Esse trabalho é resultado de um projeto desenvolvido pelo autor para a formação continuada de professores de matemática dos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. *Trata-se de um estudo longitudinal, cujo objetivo geral é analisar a importância da mediação por Internet para formação continuada em Geometria* (p.40).

Diante disso, foi oferecido um curso a distância, no qual as interações ocorreram de maneira síncrona e assíncrona. O autor analisa o discurso dos participantes em um dos *chats* realizados no curso. No que se refere a esse tipo de interação, via *chat*, Bairral (2004) descreve algumas vantagens, como a comunicação em tempo real, e ainda algumas dificuldades, das quais destacamos a impossibilidade de inserção de imagens e de desenhos explicativos.

Para ele não é apenas a discussão no chat que contribui com o processo formativo, senão um conjunto de tarefas de provocação e o processo teleinterativo que é gerado com contribuição e idiossincrasia discursiva de cada espaço comunicativo do contexto virtual (BAIRRAL, 2004, p.56).

Já Socolowski (2004) analisou as interações entre participantes de um curso a distância, via Internet, no qual eram abordados temas específicos de geometria — sistema de medidas, áreas, perímetros, entre outros. Em sua investigação, a autora preocupou-se em analisar as interações entre participante e tutor, no intuito de melhor compreender os argumentos contidos nos discursos dos sujeitos envolvidos, e para isso ela analisou os documentos (listas de discussão, *e-mails* e os discursos no *chat*) gerados no curso, a fim de verificar os significados produzidos nos diálogos entre o tutor e um dos participantes.

Dois olhares foram privilegiados: o da prática pedagógica, tanto do tutor quanto do participante, e o conteúdo matemático. Socolowski (2004) conclui que *a análise da estratégia argumentativa das interações entre os participantes e o Tutor pode ser um ponto de partida para a*

Avaliação de um Curso de Desenvolvimento Profissional a Distância (p.54).

Entendemos que os autores analisados concordam conosco no sentido de que idiossincrasias de humanos, a plataforma utilizada e o modelo pedagógico são componentes importantes para a caracterização de um curso *on-line*. A Educação a Distância parece deixar mais evidente que humanos influenciam na produção do conhecimento, mas também o fazem as tecnologias envolvidas, assim como a interação entre eles, conforme postulam Borba e Villarreal (2005), ao defenderem que o conhecimento é produzido por coletivos de seres-humanos-com-mídias.

Nesse sentido, começamos a realizar estudos sobre público-alvo, ambientes virtuais de aprendizagem a serem utilizados e modelos de cursos desde 1999, para, então, iniciarmos a oferta, em 2000, de cursos de extensão a distância para professores de vários estados brasileiros e também de outros países, pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) e pela Universidade Estadual de São Paulo (UNESP), *campus* de Rio Claro, ministrados pelo segundo autor deste artigo. Esses cursos sempre envolveram conteúdos teóricos sobre tendências atuais em Educação Matemática, mas, com o passar dos anos, foi-se configurando a necessidade de abordar, em tais cursos, questões específicas de Matemática (BORBA, 2004).

Diante disso, em 2002 chegou-se a discutir algumas atividades de geometria euclidiana e de funções, tendo sido sugerida aos participantes a utilização de qualquer *software* apropriado; em 2003, além desses dois temas matemáticos, uma das aulas foi destinada à discussão sobre fractais. Passada a fase de estudos exploratórios, que buscavam compreender a produção matemática em ambientes virtuais de aprendizagem, pesquisas mais detidas foram realizadas.

Santos (2006) utilizou um espaço em uma das versões desses cursos, o de 2005, para discutir atividades de geometria espacial, buscando identificar como a produção matemática ocorre no contexto da Internet. Por produção matemática a autora entende o processo de exploração de conceitos matemáticos (geométricos) e a verificação de propriedades, a validação e a criação de conjecturas, visando a generalizá-las. Um processo contínuo de organização e reorganização do

pensamento matemático. Delcin (2005, p.74 grifo nosso), discute essa questão e acredita que

ninguém sabe tudo e todos sabem alguma coisa, cada pessoa tem um conjunto de saberes, produz conhecimentos humanos e é a expressão de múltiplos componentes relativamente autônomos e inter-relacionados. A individualidade de cada um reflete um coletivo, que se auto-organiza no interior da mente social, participando simultaneamente da sua incessante *produção*.

Sendo assim, temo-nos preocupado com questões que se referem tanto aos aspectos epistemológicos em Educação Matemática a distância, quanto aos metodológicos, pois também investigamos uma proposta pedagógica para ensinar e aprender matemática com base nos recursos de que dispomos em um determinado ambiente virtual. Nessa proposta, no que se refere à produção matemática, buscamos privilegiar a investigação matemática, propondo atividades com questões abertas e que podem suscitar discussões e interação. Esse modo de discutir matemática nos parecia coerente com o modelo geral do curso a distância, que em todas as suas versões privilegiou a interação e a colaboração entre participantes, enfatizando a necessidade de que os participantes, todos professores, exercessem diversas vezes o papel de líder emergente em uma dada aula, ou parte dela. A literatura de Educação Matemática, assim como os membros do GPIMEM envolvidos em cada versão do curso, e os problemas de matemática propostos modificaram-se ao longo dos anos, mas o modelo central parece ter-se consolidado.

Produção matemática e a Internet

Borba (2005) observou que a natureza da discussão matemática que ocorre a distância, via *chat*, tem reorganizado a maneira de produzir o conhecimento matemático. Nesse caso, esse autor acredita que o conhecimento tem sido produzido por um coletivo não só de humanos, mas de humanos com mídias. O coletivo seres-humanos-com-Internet gera um tipo de escrita matemática, quando realizada em *chats*, que é diferente daquela desenvolvida na sala de aula presencial, já que,

durante a interação *on-line*, gestos e olhares, próprios da comunicação, não são explicitados.

Borba e Malheiros (2006) discutem as mudanças que as TIC, e em particular a Internet, acarretam na maneira como desenvolvemos diversas atividades diárias e como pensamos e produzimos conhecimento. Para eles *as TIC são vistas como sendo capazes de modificar a própria natureza de nossas práticas e, ainda, “a popularização” da Internet modificou nossas práticas* (BORBA; MALHEIROS, 2006, p. 6).

Sendo assim, com o advento da Internet, grande parte dos “problemas” discutidos em matemática — que podem ser encontrados na maioria dos livros didáticos e na prática das salas de aulas usuais — não poderão mais ser considerados “problemas”, se o acesso à Internet e a suas interfaces for possibilitado de maneira intensiva em sala de aula. Mas, por outro lado, não acreditamos que por isso todos os problemas tenham acabado. Esse importante papel que a Internet passa a ocupar indica a necessidade de uma pedagogia que privilegie atividades que possibilitem a investigação. Para Ponte et al. (2003), investigar não significa resolver problemas difíceis, mas sim lidar com questões abertas, para as quais não se tem ainda uma resposta ou uma única resposta, e, sempre que possível, buscar argumentos cada vez mais fundamentados.

E em cursos totalmente a distância, nos quais a Internet é o principal e, praticamente, o único meio de comunicação entre alunos e professores, o que é investigar — ou, ainda, o que é um problema? Como discutem Borba e Malheiros (2006 p. 6):

se alguém quer saber algo sobre algum tópico em Matemática, basta acessar um programa de busca na Internet e rapidamente terá diversas respostas sobre problemas já padronizados. Neste sentido parece que apenas enfoques pedagógicos que valorizem a busca, a elaboração a reflexão a partir do já conhecido é que poderão sobreviver em termos educacionais. Temos que pensar que o que será problema de fato para os alunos não independe da Internet.

Tendo em vista isso, nos cursos de “Tendências em Educação Matemática”, em especial na versão analisada por Santos (2006), as atividades matemáticas propostas apresentam uma característica investigativa e aberta, principalmente por ter sido sugerida a utilização de um *software* para o desenvolvimento das atividades; por ser um curso a distância; e por acontecer via Internet. Além desses motivos, também Lopes (2004) constatou que em um ambiente virtual, no qual alunos desenvolveram e discutiram atividades sobre transformações geométricas, utilizando o *software* Cabri-Géomètre II, aquelas que não se mostraram situações-problemas e desafiadoras não suscitaram discussões.

Nesse sentido, mesmo com alguns avanços no âmbito da Educação Matemática a distância, ainda há necessidade de discutir qual o tipo de pedagogia mais adequada para ambientes virtuais de aprendizagem, no que tange à produção matemática. Pensar sobre como propor atividades, de acordo com as mídias disponíveis, é um ponto fundamental.

O caso da Geometria euclidiana espacial

A sexta edição, em 2005, do curso de extensão universitária a distância, “Tendências em Educação Matemática”, serviu de cenário para a pesquisa de Santos (2006). Seus objetivos eram analisar como se dá e, sobretudo, quais as possibilidades de produção matemática a distância, ou seja, buscava investigar como os participantes discutiriam, no *chat*, as conjecturas formuladas durante as construções geométricas realizadas com o Wingeom, a partir do desenvolvimento de atividades de geometria espacial. Esse *software* permite construções geométricas em duas ou três dimensões e, por meio de animação, possibilita verificar diversas propriedades geométricas.

Além dos encontros síncronos, previamente agendados, também havia interações assíncronas por meio de ferramentas como portfólios, fórum e correio eletrônico, disponíveis no ambiente TelEduc⁶.

Com relação à discussão matemática, propriamente dita, dos onze encontros do curso, três foram destinados às discussões

⁶ Disponível em: <<http://teleduc.nied.unicamp.br/teleduc>>

matemáticas. As atividades eram enviadas com uma semana de antecedência aos participantes, para que, utilizando o Wingeom, realizassem suas investigações, que seriam discutidas no *chat*. Dúvidas quanto à utilização do Wingeom ou às atividades eram discutidas em fóruns do TelEduc ou por *e-mail*. Atividades de familiarização com o Wingeom foram enviadas antes mesmo de iniciar o curso, visando a auxiliar os participantes na realização das atividades que seriam discutidas nas aulas. Durante a elaboração das atividades, a maior preocupação era em valorizar a investigação e possibilitar aos participantes a criação de conjecturas e a realização de descobertas.

Nessa perspectiva, inicialmente, a dúvida era quanto à estrutura da atividade: como propor uma atividade desafiadora e, sendo assim, como propor questionamentos, conduzindo-os a uma investigação? Além disso, por utilizar o Wingeom e, principalmente, por ser um curso a distância, por meio da Internet, tornou-se relevante considerar todo o contexto: os recursos disponíveis, os sujeitos envolvidos, bem como as suas limitações, para que dessa forma a atividade fosse adquirindo um *design* diferente daquele proposto em livros texto ou em fichas de trabalho.

A seguir, apresentamos a adaptação de uma das atividades retirada do livro “Introdução à Geometria Espacial” (CARVALHO, 1999, p. 34), que ilustra a maneira como idealizamos uma forma de propor atividades, principalmente quando a Internet passa a ser um ator na produção de conhecimento:

Por um ponto qualquer da aresta AB de um tetraedro qualquer ABCD é traçado um plano paralelo às arestas AC e BD. Mostre que a secção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo.

Notamos que conjecturas poderiam emergir de uma situação como essa. Porém, no modo como essa atividade se apresenta, o objetivo é de “mostrar” algo que já está dito: *o plano no tetraedro é um paralelogramo*. Consideramos que uma investigação matemática deva permitir a elaboração de novas conjecturas e descobertas e, desse modo, privilegiar questões que convidam o estudante à investigação, fazendo perguntas do tipo: *o que você pode afirmar sobre...?*

Tendo em vista essa preocupação, é comum no GPIMEM que, durante o processo de elaboração de atividades, alguns membros se reúnam para discutir, “testar” e aprimorar atividades para serem aplicadas em cursos de extensão e em ambientes de pesquisa. Esse processo de discussão coletiva tem como intenção propiciar atividades investigativas e, nesse sentido, o grupo se engaja na tentativa de diminuir problemas relacionados à compreensão dos enunciados, à viabilidade da aplicação das atividades para um determinado objetivo, etc. Desse modo, essa dinâmica possibilitou que a atividade apresentada anteriormente pudesse, em um curso a distância, utilizando o Wingeom, ser proposta no seguinte formato⁷:

1. Insira um tetraedro regular de area 1.
2. Usando o menu *Anim/Varição de #* digite, na janela que se abre, 0 e em seguida clique fixar L. Do mesmo modo, digite 1 e clique fixar R.
3. Marque na aresta AB um ponto E de coordenada relativa #.
4. Construa um plano paralelo às arestas AC e BD através do ponto E usando *Linear/Cortar plano*.
5. Anime a sua construção e observe o que acontece.
6. O que você pode afirmar quanto à secção determinada por este plano? Justifique sua resposta.

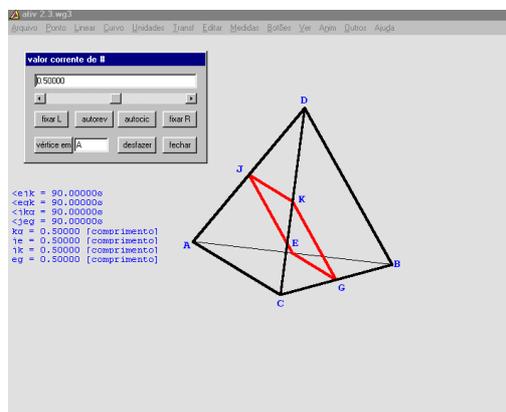


Figura 1 - Construção de uma secção determinada a partir de um ponto qualquer E na aresta AB e paralela às arestas AC e BD de um tetraedro regular.

⁷ No enunciado da atividade há comandos específicos do Wingeom.

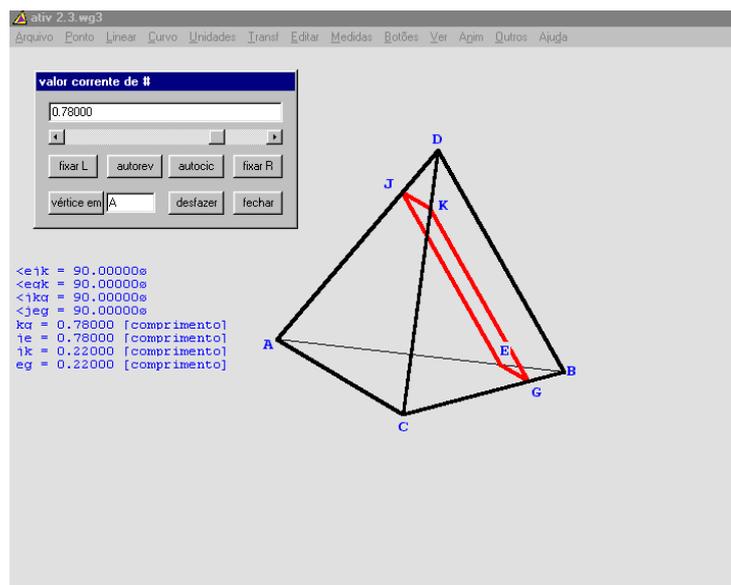


Figura 2 – Investigando a secção determinada no tetraedro regular a partir do ponto E paralela às arestas AC e BD.

Nos trechos, aqui apresentados, da discussão que ocorreu no *chat* sobre as atividades, trazemos o nome de cada participante antes de sua “fala”. Os autores deste artigo foram os professores do curso e aparecem como “Silvana” e “mborba” no texto transcrito. Foram mantidos os erros de digitação e de outra ordem, característicos da comunicação em uma sala de bate-papo.

Ao propor atividades de geometria espacial, percebemos que, ao solicitar aos participantes que elaborassem uma justificativa acerca do que haviam observado, emergiam diferentes justificativas para uma mesma atividade, levando em conta, principalmente, as possibilidades do *software* que eles estavam utilizando. Para alguns, em certos casos, bastava medir com o Wingeom e, para outros, a preocupação estava voltada ao uso de teoremas e de propriedades geométricas que garantissem suas afirmações. Sendo assim, o tema demonstração foi algo que emergiu nas discussões, pelo fato de serem pedidas

justificativas para as conclusões obtidas durante a investigação em cada atividade.

<Maria> Para demostrar que JKGE es un rectángulo uso el siguiente teorema: Si una recta es paralela a un plano (AC es paralela a JKGE), todo plano que pase por ella (ACD) y corte al primero determina con éste una recta paralela a la dada (JK). Como JKGE es paralelo a AC, $GE // AC$ y $JK // AC$, entonces $GE // JK$ (lados opuestos). El mismo razonamiento para BD. Entonces $KG // JE$. Pero hay un problema no consigo demostrar que el ángulo JKG es recto!!! Ayuda!!!!

Tanto na “fala” anterior de Maria, quanto no trecho a seguir, os participantes criaram a conjectura de que a secção paralela às arestas AC e BD de um tetraedro regular ABCD, determinada a partir de um ponto E qualquer na aresta AC, era um paralelogramo com ângulos retos, ou seja, um retângulo e, em um momento específico, um quadrado, o que não parecia nada trivial de se justificar.

<Marie> Entao vamos para o terceiro. A minha conclusão é a mesma da Maria: A secção é um retângulo. A secção apresentada na figura tem dois lados paralelos à aresta AC e duas paralelas a BD, com medidas iguais (os lados opostos). Como os ângulos são retos, trata-se de um retângulo, que é o paralelogramo que tem os ângulos retos. Quando os pontos J, E, G e K forem os pontos médios das arestas do tetraedro, a secção é quadrada, que é um caso particular do retângulo.

<Silvana> e qto aos ângulos??????

<Maria> Por qué dices que los ángulos son rectos. No logro demostrar esto

<Silvana> esse é o problema...

<Maria> No logro demostrarlo Silvana, y vc?

<Marie> Digo que são retos porque eu medi com o Wingeom

<Maria> A yo también!!! Pero y la demostración?

<Silvana> hummmmmmmmm, então será q posso afirmar q é um rectángulo?????

<Maria> Si no demustro que son rectos, ... no!!!

<Maria> Pero puedo visualizar esta idea (del rectángulo) pero y cómo demuestro que son rectos los ángulos de esta sección?

Em se tratando de demonstrações em um *chat*, parece que a sua discussão é qualitativamente diferente daquela que usualmente praticamos na sala de aula presencial. A demonstração matemática, neste caso, era hipertextual, ou seja, ela foi moldada ao contexto, mas, por outro lado, tinha o mesmo objetivo daquela que ocorre no espaço usual: apresentar a verdade e convencer. A natureza do discurso no *chat* dificultava, muitas vezes, o acompanhamento da apresentação da demonstração ou da explicação matemática.

O fato de os alunos-professores terem que apresentar suas justificativas matemáticas aos poucos — já que observamos a utilização de diferentes mídias, como o Wingeom, lápis e papel, materiais manipulativos, e algumas das ferramentas do ambiente TelEduc, como o portfólio e o *chat* —, para discutirem suas conclusões e confrontarem-nas com as dos colegas, gerou uma produção matemática em forma de “colcha de retalhos”, sendo o *chat* usado para os retalhos serem costurados. Eram evidenciadas, então, demonstrações e/ou justificativas matemáticas fragmentadas, o que também pode ter sido causado pelo fato de o *chat* permitir um número limitado de caracteres.

O papel do *software* Wingeom na demonstração também pareceu relevante, já que era um ator importante na criação de conjecturas ou contra-exemplos: a partir de um processo experimental (BORBA; VILLARREAL, 2005), o *software* não compromete o ato de demonstrar, e sim o modifica.

Durante a investigação de uma atividade aberta, como aquelas propostas no curso analisado por Santos (2006), outras situações investigativas podem emergir. Foi o que aconteceu quando os professores, autores deste artigo, realizavam uma das atividades, proposta aos participantes durante a discussão no *chat*, sem que tivesse sido enviada antecipadamente como as outras. Assim, intuitivamente, uma primeira conjectura foi criada por uma das participantes. A situação consistia em determinar quanto media o ângulo formado pela intersecção de duas diagonais espaciais de um cubo. Rapidamente, Maria manifestou-se, afirmando que o ângulo era reto, ou seja, de 90°. Porém, ao utilizar o Wingeom para verificar sua afirmação, percebeu que esta não era verdadeira.

<Maria> Lo estoy midiendo y me parece que no es recto, me da 109°

<Maria> Dije lo primero que vi, luego hice girar el dibujo y ya no lo vi recto. Marqué el punto medio de las diagonales (coincidían) y luego medí el ángulo

<Carlos> É verdade não é 90, agora fiquei todo embaralhado

<mborba> ou seja, ao lidar com o wingeom para resolver esse problema vi outra coisa, e tomei um susto, por que para mim era 90. talvez por causa da diagonal do cubo [*ele quis dizer “quadrado” ao invés de “cubo”, como mostra sua fala mais abaixo!*]

<Maria> Tal vez eso pasó por pensar en la intersección de las diagonales de un cuadrado y trasladando esa idea al cubo

<Márcia> Vc quer dizer que o computador eu aumento a possibilidade de investigações?

<mborba> isso Maria, creio que levari do quadrado a ideia par ao cubo.

Na figura 3 apresentamos como a construção desta atividade no Wingeom foi investigada.

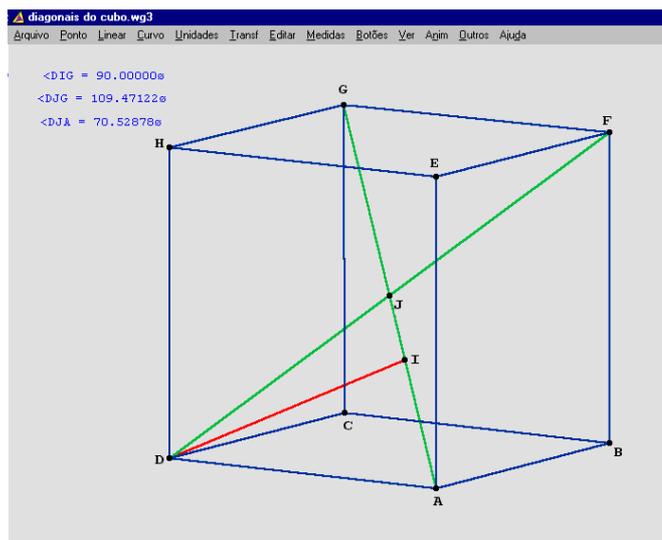


Figura 3 – Investigando o ângulo formado entre as diagonais de um cubo.

Ao marcar a intersecção J entre as diagonais FD e AG, os participantes mediram o ângulo formado e perceberam que não era de 90° . Também foi possível verificar isso, de maneira mais intuitiva, quando eles “giraram” o cubo ou quando variaram suas medidas (largura, altura e comprimento). Caso a hipótese de que no encontro das diagonais de um cubo se tem 90° fosse verdadeira, ao traçar um segmento perpendicular à diagonal AG passando pelo vértice D, este deveria coincidir com a diagonal DF. No entanto, é possível observar na construção (Figura 3) que isso não acontece. Daí a necessidade de investigar quanto mede o ângulo entre as diagonais. Como já dissemos, esta atividade não estava prevista para a discussão no curso nem havia sido enviada com antecedência, como as demais. Entretanto, durante o desenvolvimento das atividades por parte dos professores, surgiu esta questão matemática que, com o auxílio do Wingeom, proporcionou outra investigação.

Essa atividade emergencial, ou seja, não prevista, sugeriu a necessidade de “atividades extras” que pudessem ser pensadas e desenvolvidas durante o encontro síncrono no *chat*. Essa dinâmica

poderia se transformar em uma possibilidade para um trabalho com resolução de problemas ou investigações matemáticas em um ambiente virtual de aprendizagem. Conforme afirmamos, embora a espinha dorsal do modelo tenha se mantido, é fundamental que estejamos sempre atentos a detalhes como esse. Santos (2006) teve todo o cuidado para transformar uma atividade de livro, que visava a demonstração, em uma voltada para a articulação da experimentação matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005) com o Wingeom e pensando numa demonstração. Além disso, pareceu-nos também interessante que busquemos, para novos cursos, propor problemas abertos com antecedência, como fizemos neste caso, mas que também tenhamos subproblemas para serem apresentados no momento da sessão síncrona. Entregar o problema com uma semana de prazo permite que conceitos sejam revistos e que cada um caminhe no seu ritmo; problemas emergentes, vinculados aos já apresentados, fazem com que todos se sintam desafiados durante o encontro no *chat*, mesmo que já tenham resolvido todos os anteriormente propostos ou se não tiverem tido tempo ou, ainda, se não tiverem conseguido resolvê-los.

Certamente, se os participantes desse curso fossem outros, teríamos variações nas interações e na própria produção matemática. Se o modelo do curso fosse baseado apenas no *download* de atividades, com pouca interação entre os participantes, os resultados provavelmente seriam diferentes. Mas e se a plataforma fosse outra? E se as possibilidades fossem outras? E se o *software* fosse outro?

Perspectivas futuras para a EaD *on-line*

Já discutimos como um modelo de curso a distância *on-line* e diferentes mídias modificam e condicionam nossa prática e a produção de conhecimento. Diante disso, questionamos como um novo ambiente virtual de aprendizagem, com *softwares* que podem ser integrados diretamente a ele, mudaria aquilo que já temos vivenciado.

Em Borba et al. (2007) foi discutido como a videoconferência, que possibilita que todos os participantes, um de cada vez, controlem o *mouse* de um determinado computador e, desse modo, manipulem *softwares* simultaneamente, modifica a produção matemática dos alunos. Ao invés de demonstrações fragmentadas, tínhamos demonstrações coletivas, já que todos tinham acesso a uma construção

que estava sendo feita de forma síncrona, e a plataforma permitia que uma construção iniciada pelo professor fosse continuada por um dos participantes e por quantos mais fosse necessário, ao que os autores chamaram de “passar a caneta”.

Após muitos anos de estudos sobre diferentes aspectos da Educação Matemática a distância, utilizando ambientes virtuais de aprendizagem distintos com diversos recursos, iniciamos em 2004 nossa participação em um projeto, desenvolvendo um *software* de geometria e uma nova plataforma que, acreditamos, poderá possibilitar novas formas de “fazer” matemática. Trata-se do projeto TIDIA (Tecnologias da Informação no Desenvolvimento da Internet Avançada)⁸. Apoiado pela FAPESP, visa a colaboração entre grupos de pesquisa de diversas instituições do estado de São Paulo e tem como objetivo desenvolver um ambiente virtual para suporte e apoio ao ensino e aprendizagem, com interações presenciais e a distância, síncronas e assíncronas.

Os objetivos desse projeto incluem a especificação, o projeto e a implementação de um amplo conjunto de ferramentas para o ensino a distância, baseado em soluções flexíveis de baixo custo – que teriam como resultado um profundo impacto social por serem baseadas em ferramentas de código livre, que podem ser combinadas e estendidas conforme necessário. O projeto possui três principais facetas: Aprendizado eletrônico, Incubadora virtual de conteúdos digitais e KyaTera.

Pelo fato de nossa principal vocação ser a educacional, o GPIMEM vem participando, mais ativamente, na parte referente ao Aprendizado eletrônico (Ae). O Ae *tem como objetivo estimular a pesquisa e o desenvolvimento na área de tecnologia da informação voltada para especificação, projeto e implementação de ferramentas aplicáveis na área de Educação a Distância (EaD) on-line [...]* (BORBA et al., 2005, p. 2).

Em Borba et al. (2005) foi descrita a participação do GPIMEM na primeira fase desse projeto e, em 2006, apresentamos uma nova proposta para a participação na sua segunda fase. No TIDIA-Ae, além de colaborarmos com o andamento do projeto, como um grupo que possui vocação educacional, iniciamos também uma cultura de

⁸ Para detalhes, acesse: <<http://tidia-ae.incubadora.fapesp.br/portal>>

desenvolvimento de *software*, já que alguns membros do grupo são especialistas na área de computação. As metas que nos propomos a atingir nessa fase do projeto são realizar ações de aprendizagem, dentre as quais o curso “Tendências em Educação Matemática”, que desde 2006 já vem sendo realizado utilizando o ambiente TIDIA-Ae (MALHEIROS, 2006), e, ainda, trabalhar no desenvolvimento de um *software* de geometria, o Draw&Geometry (D&G). Além disso, propomos a realizar um estudo dirigido para a implementação de uma ferramenta que possibilite a inserção de caracteres matemáticos nas ferramentas textuais disponíveis no ambiente, já que, como afirmam Borba et al. (2005), a possibilidade de inserir símbolos matemáticos em um *chat*, por exemplo, seria muito importante para Educação Matemática a distância, bem como para outras áreas do conhecimento.

Atualmente o TIDIA-Ae é um ambiente que está em desenvolvimento, suas ferramentas são atualizadas com frequência e outras são incorporadas, à medida que isso se mostra necessário. Uma primeira versão da plataforma TIDIA-Ae⁹ foi disponibilizada no final de 2005 e, desde então, realizamos “testes”, por meio de cursos a distância e também de atividades que não compõem cursos, como comunidades virtuais¹⁰, e, assim, temos apresentado demandas para a sua atualização.

Já constatamos em outros momentos (SANTOS, 2006; BORBA, 2004) que, com relação às discussões matemáticas e, principalmente, no processo de desenvolvimento de atividades matemáticas, limitações são mais evidentes, devido à simbologia presente na linguagem matemática (letras gregas, símbolos e operadores, por exemplo) e à impossibilidade de compartilhamento simultâneo de gráficos e construções geométricas durante um discurso no *chat*, por exemplo. Assim, questões como estas têm nos levado a repensar as especificidades da Educação Matemática a distância, e o projeto TIDIA-Ae, em particular, tem permitido nos tornar atores no desenvolvimento de um ambiente e de ferramentas que deverão estar integradas a ele, na tentativa de ampliar as possibilidades de “fazer” matemática na modalidade de Educação a Distância *on-line*.

⁹ A versão mais atual está disponível em: <<http://tidia-ae.usp.br>>

¹⁰ O Centro Virtual de Modelagem é um exemplo de comunidade virtual na qual professores e pesquisadores se “reúnem” para debater a implementação de tal enfoque em diferentes níveis de ensino. Para detalhes, consulte Borba e Malheiros, 2006.

No que se refere ao desenvolvimento do D&G, temo-nos inspirado em diversos *softwares* de geometria dinâmica já existentes, como Cabri-Geomètrè, Geometricks, Wingeom, etc. Em geral, *softwares* como esses possibilitam que sejam realizadas construções geométricas que resistam ao “teste do arrastar”, ou seja, matematicamente estáveis, pois propriedades se mantêm quando uma construção geométrica é movimentada (LABORDE, 2000). Além das características da geometria dinâmica, o D&G oferece outras possibilidades de exploração. Trata-se do reconhecimento geométrico, que permite que traços feitos à mão livre sejam reconhecidos e transformados em figuras geométricas “matematicamente perfeitas”, ou seja, que são obtidas a partir de propriedades geométricas que garantem seu reconhecimento (Figura 4). Quando apresentar maior estabilidade, a nossa intenção é que o D&G seja integrado ao ambiente TIDIA-Ae, mais especificamente à ferramenta Whiteboard, fazendo parte do seu conjunto de ferramentas, mas já há um protótipo que estamos testando e estudando¹¹.

A Whiteboard é uma ferramenta de captura e acesso às informações no âmbito do *e-learning*. Ela pode ser considerada, metaforicamente, como uma lousa branca síncrona (KUDO et al., 2005). Para Gonzalez (2005, p.65), *trata-se de uma área de desenho que permite que os usuários possam importar imagens gráficas ou fazer anotações e, ainda, permite que um grupo de usuários geograficamente distantes realize uma sessão de trabalho cooperativa, em que um mesmo documento é editado e mostrado na tela.*

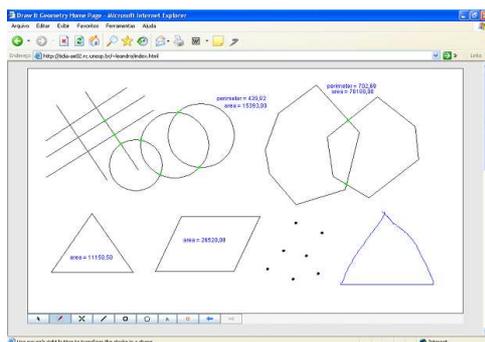


Figura 4: Interface do *software* Draw & Geometry.

¹¹ Disponível em: <<http://tidia-ae02.rc.unesp.br/dg>>

A versão do D&G que existe hoje ainda está em fase de desenvolvimento. Pelo fato de o projeto ser colaborativo e por estarem envolvidos diversos grupos de pesquisa do estado de São Paulo, para que o D&G esteja disponível no ambiente, contamos com a colaboração dos demais participantes do projeto.

Acreditamos que nosso principal desafio, como educadores, é buscar formas investigativas de como utilizar o D&G em um ambiente virtual e, para isso, estamos engajados na elaboração de atividades para serem realizadas com esse *software*. Algo que nos motiva é a idéia de valorização do desenho à mão livre do traço, do gesto como parte de um processo de investigação matemática. Também temos notado uma forte tendência, característica do advento da mídia digital, para inter-relacionar, interligar corpo e tecnologias. Talvez isso seja indício daquilo que Johnson (2001) diz sobre as mídias não serem apenas extensões de nossos sentidos, de nossa memória, mas elas estão em nós, condicionam a formação de nossa personalidade, nosso modo ver e sentir o mundo, dando uma nova dimensão ao que Borba e Villarreal (2005) chamam de reorganização do pensamento. É intrigante a idéia de podermos usar uma caneta associada a um movimento corporal para desenhar diretamente na tela do computador (um *tablet*¹²) e, em seguida, esse desenho se transformar em um objeto geométrico da forma como se faz em outros softwares de geometria dinâmica.

Nossa experiência em atividades educacionais a distância, via Internet, tem-nos mostrado diferentes formas de produzir matemática, dependendo do ambiente virtual e das diversas tecnologias utilizadas. Nesse sentido, Miskulin et al. (2006) afirmam que o estudo da potencialidade de ambientes virtuais de aprendizagem na formação de professores se fundamenta nos pressupostos de que a relação com a tecnologia possa potencializar a capacidade de reflexão do professor sobre seus processos de pensamento. Nesse aspecto, é possível, conforme ilustrado neste artigo, possibilitar que professores experimentem e demonstrem em geometria, utilizando o Wingeom, estabelecendo essa relação com a tecnologia utilizada e criando novas formas de produzir matemática.

¹² *Tablet* é um computador pessoal com o formato de um *laptop* ou de uma prancheta, que pode ser acessado com o toque de uma caneta especial. Desta maneira, o usuário poderá utilizar o computador sem um mouse ou teclado.

Estamos, agora, utilizando esses resultados para desenhar um novo *software*, D&G, incorporado a um novo ambiente virtual de aprendizagem. Um novo ciclo de pesquisas inicia-se, para identificar o papel dessas novas interfaces na produção matemática, conforme descreve Santos (2006). Além disso, queremos investigar o papel cognitivo de um *software* que permite que, além de construções matematicamente estáveis, sejam realizados traços à mão livre, os quais poderão se transformar em construções geométricas com apenas um clicar de um botão, que designamos metaforicamente de “varinha mágica”. Será que esse reconhecimento geométrico modifica a produção matemática? Será que a demonstração matemática também muda, conforme mostramos na análise dos dados aqui apresentados? Neste artigo apresentamos resultados de pesquisa e propusemos uma nova agenda de perguntas de pesquisa.

Referências Bibliográficas

BAIRRAL, M. A. Compartilhando e construindo conhecimento matemático: análise do discurso nos *chats*. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 37-62, 2004.

BELLO, W. R. *Possibilidades de construção do conhecimento em um ambiente telemático*: análise de uma experiência de Matemática em EaD. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

BORBA, M. C. As dimensões da Educação Matemática a Distância. In.: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004.

BORBA, M. C. The transformation of Mathematics in on-line courses. In.: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 29, 2005, Melbourne, *Proceedings...*Melbourne: PME, 2005. v. 2, p. 177-184.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; FIGUEIREDO, O.; MALTEMPI, M. V. Virtual center for modeling. In.: WORKSHOP TIDIA, 3, 2006, São Paulo, *Anais...* São Paulo: TIDIA, 2006, p. 146-148.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO, R. B. A. *Educação a Distância on-line*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; MALTEMPI, M. V.; MALHEIROS, A. P. S. Internet avançada e Educação Matemática: novos desafios para o ensino e aprendizagem *on-line*. *RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação*. Porto Alegre, v. 3, n. 1, maio, 2005. Disponível em <<http://www.cinted.ufrgs.br/renote/maio2005/index.html>>. Acesso em 03 de abril de 2006.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. v. 39, New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C.; ZULATTO, R. B. A. Different media, different types of collective work in on-line continuing teacher education: would you pass the pen, please? In.: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30, 2006, Prague, *Proceedings...* Prague: PME, 2006. v2, p. 201-208.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA ISOLGRAF, 1999. (Coleção do Professor de Matemática).

DELGIN, R. C. A. A Metamorfose da sala de aula para o ciberespaço. In.: ASSMANN, H. (Org.). *Redes digitais e metamorfose do aprender*. Petrópolis: Vozes, 2005. p. 56-83.

GONZALEZ, M. Fundamentos da tutoria em Educação a Distância. São Paulo: Avercamp, 2005.

GRACIAS, T. A. S. *A natureza da reorganização do pensamento em um curso a distância sobre "Tendências em Educação Matemática"*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

JOHNSON, S. *Cultura da interface: como o computador transforma nossa maneira de criar e comunicar*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

KENSKI, V. M. *Tecnologias e ensino presencial e a distância*. Campinas: Papirus, 2003.

KUDO, T. et al. Using UML Components for the specification of the whiteboard tool. Disponível em <<http://www.tidia.fapesp.br/portal/eventos/folder.2006-06-21.4513988865/15257.pdf>>.

LABORDE, C. Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies Mathematics*, Dordrecht, v. 44, n. 1/2, p. 151-161, 2000.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LOPES, A. *Avaliação em Educação Matemática a Distância: uma experiência de geometria no ensino médio*. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

MALHEIROS, A. P. S. Contextualizando o *design* emergente numa pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação a Distância. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2006, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte: UFMG, 2006.

MISKULIN, R. G. S. et al.. Identificação e análise das dimensões que permeiam a utilização das TIC nas aulas de Matemática no contexto da formação de professores. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 19, n. 26, p. 103-123, 2006.

OLIVEIRA, E. G. *Educação a Distância na transição paradigmática*. Campinas: Papirus, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SANTOS, S. C. *A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SOCOLOWSKI, R. C. A. J. *Análise das interações tutor/participante: um ponto de partida para avaliação de cursos de desenvolvimento profissional a distância*. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

TIKROMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In.: WERTSCH, J. V. (Ed.). *The concept of activity in Soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981. p. 256-278.

ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 29 – jan./jun. - 2008