



Analisando a prática de dois professores com representações matemáticas no 3º ano

Analysing two teachers' practice regarding Mathematical Representations in Grade 3

Isabel Maria Palmeiro Velez¹

Maria de Lurdes Serrazina²

João Pedro Mendes da Ponte³

Resumo

Neste artigo analisamos a prática de dois professores do 3.º ano, Carla e Ricardo, para compreender como se caracterizam as suas ações no que respeita à forma como exploram uma tarefa na sala de aula, às maneiras como questionam os alunos e as representações que os docentes privilegiam no decorrer do trabalho. Os dados foram recolhidos por observação participante suportada por gravação áudio e vídeo, sendo analisados através da análise de conteúdo. Os resultados indicam que a ação de informar surge mais frequentemente e está associada a perguntas de focalização retórica e/ou de confirmação fechada, enquanto a ação de desafiar, menos comum, está associada ao questionamento através de perguntas de inquirição. Com o intuito de promover a utilização das representações por parte dos alunos, os professores adaptam as suas ações e o tipo de questionamento que utilizam de forma a promover (i) a utilização e transformação da representação escolhida e (ii) a reflexão dos alunos relativamente aos aspetos mais relevantes da tarefa.

Palavras-chave: Representações; Prática; Ações dos professores; Tarefas.

Abstract

In this paper we analyse two 3rd grade teacher's practices, Carla and Ricardo, in order to understand the characteristics of their actions, specifically how they explore a task in the classroom, how they question their students and which are the representations that they privilege. Data were collected through participant observation, supported by audio and video recording and were analysed through content analysis. The results suggest that the action of informing appears more often and is frequently combined with rhetorical focusing

Submetido em: 10/10/2017 – **Aceito em:** 15/05/2019 – **Publicado em:** 30/05/2019

¹ Mestre em Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa Portugal. Doutoranda em Educação pela Universidade de Lisboa. Lisboa, Portugal. *Email:* velez@campus.ul.pt

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Professora coordenadora aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Membro da Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Endereço para correspondência: Rua Luís de Queirós, 26 9º E, 2800-698 Almada, Portugal. *E-mail:* lurdess@eselx.ipl.pt.

³ Doutor em Educação Matemática pela Universidade da Georgia (UGA), EUA. Professor catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa/Portugal. Endereço para correspondência: Instituto de Educação, Alameda da Universidade, 1649-013 Lisboa, Portugal. *E-mail:* jpponte@ie.ulisboa.pt.

questions and/or closed confirmation questions. Likewise, challenging actions, that are less common, appear relate with to inquiry questions. In order to promote the use of representations by their pupils, both teachers adapt their actions and the questioning that they use so they can promote: (i) the use and transformation of a chosen representation; and (ii) pupils' critical thinking about the main aspects of the task

Keywords: Representations; Practice; Teachers' Actions; Tasks.

Introdução

A prática dos professores é um fator determinante na forma como os alunos usam as representações, o que se reflete na sua aprendizagem (Stylianou, 2010). Alguns autores, como Tripathi (2008) sugerem que os professores recorram a diversos tipos de representações de forma a promover a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos. Da mesma forma, Acevedo Nistal et al. (2009) referem a importância do aluno conhecer diferentes representações, mas alertam para o facto de que a utilização de demasiadas representações sem que haja compreensão, pode dificultar a escolha da representação mais apropriada. Para além disso, Goldin (2008) refere que o facto de as representações estarem relacionadas entre si pode também aumentar as dificuldades dos alunos em compreendê-las e utilizá-las. Assim, é importante compreender de que modo os professores trabalham as representações na sala de aula e qual a influência que as suas ações têm na promoção da utilização das representações pelos seus alunos. Neste artigo, analisamos duas aulas realizadas por dois professores do 3.º ano de escolaridade, Carla e Ricardo, tendo por objetivo compreender como se caracterizam as suas ações no que respeita à forma como exploram uma tarefa na sala de aula, como questionam os alunos e quais as representações que privilegiam.

Representações

As representações têm um papel importante na matemática, tendo sido, desde há algum tempo atrás, objeto de estudo por parte de vários autores. Por exemplo, o NCTM (2000) associa a noção de representação ao processo de representar bem como ao resultado desse processo. Por sua vez, Tripathi (2008) define uma representação como uma construção física ou mental que descreve as características de um certo objeto ou conceito, defendendo que através das representações é possível interpretarmos, comunicarmos e discutirmos as nossas ideias com os outros. Referindo-se, em particular, às representações estatísticas, Goldin (2000) indica que estas representações possibilitam que os alunos reflitam sobre aspetos implícitos no enunciado da tarefa e criem novos problemas. Desta forma, através dos gráficos, os professores podem promover novas aprendizagens e proporcionar aos alunos a oportunidade de desenvolver o seu conhecimento e de participar em discussões enriquecedoras. Posteriormente, o mesmo autor (Goldin, 2008) indica que a relação entre representação e significado é muito complexa, na medida em que uma representação pode representar vários objetos distintos e objetos diferentes podem ter a mesma representação. Outros autores procuraram diferenciar os diferentes tipos de representações, definindo-as com maior detalhe. Assim, Bruner (1999) categoriza as representações em ativas, icónicas e simbólicas, enquanto Thomas, Mulligan e Goldin (2002) classificam as representações externas das crianças em pictóricas, icónicas ou notacionais. Ponte e Serrazina (2000)

DOI: 10.20396/zet.v27i0.8650678

referem ainda a importância das representações verbais, para além das representações referidas por Bruner. Tendo por base estes autores, elaborámos o quadro (tabela 1) que categoriza as diferentes representações.

Tabela 1 – Diferentes tipos de representações

Ativas	Recurso a objetos concretos e a movimentos
Pictóricas	Desenhos detalhados e muito próximos da realidade
Icónicas	Esquemas
Simbólicas verbais	Linguagem verbal
Simbólicas matemáticas	Linguagem matemática

Fonte: Adaptado de Bruner (1999), Thomas, Mulligan e Goldin (2002) e Ponte e Serrazina (2000).

Perante a variedade de representações existentes, Duval (2006) assinala que estas podem ser transformadas através de tratamentos ou de conversões. Define tratamentos como modificações que ocorrem dentro do mesmo tipo de representação (escrita, figuras, gráficos, diagramas ou outra) e conversões como transformações de um tipo de representação para outra representação de tipo diferente. Além disso, tendo em conta que a cada tipo de representação corresponde o seu próprio vocabulário, Bishop e Goffree (1986) referem que a interpretação e a transformação das representações podem ser difíceis de compreender para os alunos. Na prática, no início de uma tarefa, os alunos podem não compreender o que é pretendido por sentirem dificuldade em interpretar ou transformar as representações presentes no enunciado da tarefa.

Prática dos professores com representações matemáticas

A prática dos professores relativamente à promoção da utilização das representações matemáticas pelos alunos, tem sido abordado por vários autores. Stylianou (2010) considera que as representações usadas pelos professores são uma ferramenta fundamental de suporte para aprendizagem dos alunos e refere a sua presença: (i) na introdução de novos conceitos; (ii) como ilustrações nos processos da resolução de problemas; e (iii) na criação de conexões entre os conceitos. A autora refere também a importância da introdução de novas representações pelos professores e sugere que estes devem recorrer a várias representações relacionadas com o mesmo conceito. Ainda em relação às ações do professor, McClain (2000) refere o papel que este tem na promoção da utilização de representações por parte dos seus alunos e descreve a prática de um professor que pretende que os seus alunos recorram com maior frequência a representações simbólicas e que usa as respostas dos alunos como ponto de partida para a introdução das representações simbólicas da adição e da subtração. Assim, para Swan (2007) as ações dos professores, nomeadamente, o papel que assumem, o modo como introduzem a tarefa, as questões que colocam e a forma como gerem a discussão coletiva de resultados, influenciam a atividade dos alunos.

A partir destes autores e tendo por base as ações do professor identificadas por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) (convidar, desafiar, apoiar ou guiar e informar ou sugerir) definimos um quadro de análise (tabela 2). Assim, enumeramos as ações dos professores, relacionando-as com as possíveis atividades dos alunos, relativas a representações

matemáticas na sala de aula.

Tabela 2 – Ações dos professores relacionadas com a atividade dos alunos relativas a representações.

Atividade dos alunos (relacionada com representações)	Ações do professor
Produzir/Escolher	Privilegiar a escolha livre de representações Desafiar para a escolha de representações diferentes das conhecidas Dar sugestões sobre representações adequadas Sugerir explicitamente ou dar exemplos
Usar	Desafiar para a utilização de uma representação Pedir para explicar ou interpretar uma representação Dar sugestões para salientar a utilização ou interpretação de uma representação Informar os alunos sobre a interpretação e utilização de uma representação (In)validar a representação escolhida pelos alunos
Transformar	Desafiar para o estabelecimento de tratamentos, conversões e conexões Conduzir ao estabelecimento de conexões Conduzir à identificação de tratamentos e conversões possíveis Informar sobre tratamentos e conversões
Refletir	Desafiar para a sistematização e avaliação das representações utilizadas Conduzir à sistematização de informação relevante e à avaliação do trabalho realizado Informar sobre aspetos relevantes e sobre a adequação das representações utilizadas

Fonte: Adaptado de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013).

Nesta tabela pressupõe-se uma influência mútua entre a atividade dos alunos e as ações do professor. Assim, diferentes ações dos professores podem promover determinada atividade nos alunos e, da mesma forma, a atividade dos alunos influencia as ações dos professores. Ainda em relação às ações do professor, estas podem ser categorizadas como ações de desafiar ou pedir para interpretar (permitem que os alunos ultrapassem as expectativas do professor, indo mais além); ações de conduzir ou dar sugestões (através das quais os professores orientam os alunos para a atividade pretendida) e ações de informar ou invalidar (em que os alunos recebem indicações do que devem fazer).

Ao analisar o papel do professor na aprendizagem das representações pelos alunos, Bishop e Goffree (1986) centram-se em aspetos relacionados com a comunicação na sala de aula, dando especial atenção ao modo como o professor pode ajudar o aluno a interpretar as

representações que lhe são apresentadas. Moyer e Milewicz (2002) referem que, apesar de ser uma atividade elementar que aparentemente não carece de muito conhecimento, na realidade, um questionamento eficiente requer uma capacidade de questionamento oral bem desenvolvida. Boaler e Brodie (2004) referem que mais de 95% do questionamento usado por professores tradicionais visa recolher informações e guiar os alunos na resolução das tarefas. Para Purdum et al. (2015), o conhecimento dos alunos é influenciado pelos diferentes tipos e níveis de questionamento por parte dos professores. Os autores consideram ainda que um dos aspetos fundamentais na planificação das tarefas é determinar as questões que poderão colocar na sala de aula.

Mason (2000) indica três objetivos principais no questionamento a alunos: (i) focalizar, em que através do “efeito funil” o professor questiona os alunos de forma a centrar a sua atenção num determinado aspeto; (ii) testar, em que procura conhecer a compreensão dos alunos, a forma como articulam ideias e estabelecem conexões; e (iii) inquirir, em que questiona os alunos de forma a compreender como estes estão a pensar, o que pretendem e o que valorizam no seu pensamento. De modo semelhante, Ponte e Serrazina (2000) indicam três grandes tipos de perguntas dos professores: (i) focalização, em que o professor orienta o aluno para que este consiga avançar na realização da tarefa; (ii) confirmação, em que procura certificar-se que os alunos sabem a resposta a uma determinada questão; e (iii) inquirição, em que pretende compreender como o aluno resolveu a tarefa. Por sua vez, Blosser (1975) propõe quatro categorias de questões: (i) gerenciais, para orientar os alunos; (ii) retóricas, para enfatizar uma ideia ou uma afirmação; (iii) fechadas, com um número limitado de respostas, utilizadas para dar mais enfoque a um determinado ponto e para dar ao professor *feedback* sobre o conhecimento do aluno; e (iv) abertas, com uma grande variedade de respostas possíveis, usadas para promover a discussão entre os alunos, a formulação de hipóteses e a realização de inferências. Apesar de existir uma relação estreita entre as ações e o questionamento dos professores, construíram-se dois quadros de categorização separados, de forma a obter uma maior clareza na análise. Assim, consideramos vários tipos de questionamento dos professores aos quais correspondem diferentes tipos de perguntas (tabela 3).

Tabela 3 – Tipos de questionamento do professor.

Tipos de questionamento	Tipos de perguntas	Exemplos
Focalização	Perguntas retóricas	Já vimos que temos o par AB, certo?
	Perguntas processuais	Podem abrir na página...? E se olhássemos para o enunciado do problema?
	Perguntas orientadoras	Então e se somasses?
Confirmação	Perguntas fechadas	Com quantos ficamos se juntarmos 10?

Inquirição	Perguntas abertas	Concordas com a resposta do colega? Porquê?
------------	-------------------	---

Fonte: Adaptado de Mason (2000), Ponte e Serrazina (2000) e Blosser (1975).

Desta forma, a partir do quadro de análise identificado nas tabelas 1, 2 e 3, analisamos a prática de dois professores do 3.º ano, Carla e Ricardo, para compreender como se caracterizam as suas ações no que respeita à forma como exploram uma tarefa na sala de aula, às maneiras como questionam os alunos e as representações que os docentes privilegiam.

Metodologia de investigação

Os resultados apresentados são parte integrante de um estudo realizado no âmbito de uma tese de doutoramento, que segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e que procura compreender de que forma os professores promovem a compreensão das representações matemáticas pelos seus alunos.

No grupo de trabalho, que se reuniu durante 10 meses, com sessões quinzenais, quatro professores do 3.º ano (Carla, Ricardo, Sónia e Sandra, nomes fictícios), trabalharam em conjunto com a primeira autora deste artigo. Estas sessões eram momentos em que os participantes sugeriam e analisavam tarefas que todos iriam propor na sala de aula e refletiam sobre as tarefas realizadas. A tarefa analisada inclui a interpretação da representação do Gráfico de barras, prevista nos programas portugueses. Neste artigo, apresentamos alguns dos episódios de duas sessões do grupo de trabalho (uma de preparação e outra de reflexão pós-aula) e de duas aulas realizadas por Carla e Ricardo. Os jovens professores estavam naquele agrupamento de escolas há relativamente pouco tempo (entre 2 a 6 anos) e foram selecionados porque eram os únicos professores no agrupamento que lecionavam turmas do 3.º ano de escolaridade.

Os dados foram recolhidos, pela primeira autora, através de observação participante com recurso a gravação áudio e vídeo e de registos em diário de bordo. À medida que as observações em sala de aula e as sessões em grupo de trabalho decorreram, as ações dos professores foram comparadas com seu o discurso (Merriam, 1988). A partir dos dados recolhidos foi feita análise de conteúdo em três fases distintas (Bardin, 1977): pré-análise, exploração do material e processamento de resultados. Na primeira fase, definimos as categorias de análise (que constam nas tabelas 1, 2 e 3) através de um modelo aberto (Laville & Dionne, 1999); na segunda fase, definimos unidades de análise em cada categoria (Bardin, 1977) e na terceira fase fizemos a análise qualitativa e conseguinte construção iterativa de uma explicação (Laville & Dionne, 1999). Analisamos os dados em três momentos diferentes: introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva (Ponte, 2005). As representações dos alunos foram categorizadas de acordo com a tabela 1 e tendo em conta a definição de tratamentos e conversões de Duval (2006). As ações dos professores foram categorizadas de acordo com a tabela 2 (apesar da tarefa analisada apenas induzir os alunos a usar, transformar e refletir sobre a representação que consta no enunciado) e o seu questionamento foi categorizado de acordo com o indicado na tabela 3.

Resultados

Preparação da aula

No início do grupo de trabalho, os professores manifestaram interesse em explorar com os seus alunos algumas tarefas que incluíssem representações gráficas, de forma a reforçar a compreensão e utilização deste tipo de representações. Assim, na sessão de preparação da aula, a primeira autora propõe ao grupo de trabalho a análise de uma tarefa que inclui a representação de um gráfico de barras:

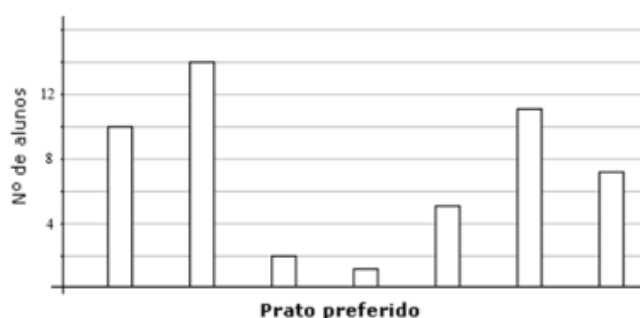
Sónia: . . . Quanto é que vale aqui a escala?...Tu não tens aqui escala!

Sandra: Pois não... Isso é para descobrir... Mas isto vai ser muito complicado... . . .

Ricardo: E se fizéssemos uma escala que não tivesse... Tudo? Tivesse aqui o zero... Dois, quatro, seis oito... E tivéssemos aqui o dez? . . . Ou o quatro, o oito, o doze e o catorze?

Carla: Alguma orientação eles têm que ter aqui!!

- 1) Na escola, o Diretor pretende saber quais os pratos preferidos dos alunos. Para isso fez um inquérito e teve as seguintes conclusões:



- O Hambúrguer com batatas fritas foi o prato mais votado;
- O número de alunos que escolheu Hambúrguer com batatas fritas, foi o dobro dos que escolheram Frango assado;
- Os Filetes de peixe receberam menos 4 votos do que o Hambúrguer com batatas fritas;
- O Esparguete à Bolonhesa foi o segundo prato mais votado;
- O Bacalhau com natas teve mais 4 votos do que o Peixe assado;
- 5 alunos votaram no Bacalhau com natas;
- Houve quem votasse nas Ervilhas com ovos;

O Diretor recebeu este pequeno relatório e não ficou satisfeito, pois achou as conclusões muito confusas. Afinal quantos votaram em cada prato?

- 2) Analisa o gráfico que foi feito. O que poderias melhorar neste gráfico? O que está bem feito?

Figura 1 – Tarefa utilizada na sala de aula.

Na perspetiva dos professores, os alunos poderiam ter dificuldades em interpretar a representação gráfica que consta no enunciado da tarefa e por isso sugerem alterações (*e.g.* legendar parcialmente o eixo das ordenadas) (Figura 1). O grupo de trabalho discute ainda os

aspectos relacionados com a interpretação das representações verbais no enunciado da tarefa. Paralelamente, procura antever como os alunos resolverão a tarefa:

Ricardo: Mas algumas [alíneas] são muito fáceis! A primeira! É o que for mais votado! Está respondido! Nem sequer se coloca dúvida! O outro é o dobro, só têm que ver qual é que é metade!

...

Sandra: Eles depois de perceberem que [a escala no eixo das ordenadas] é de dois em dois... Fazem rápido! . . . Cinco alunos votaram no bacalhau com natas... Eu se fosse eles, apontava à primeira barrinha e punha logo... Bacalhau com natas!... Porque tem cinco linhas!

De forma geral, os professores privilegiam a interpretação do gráfico e a compreensão das convenções desta representação e consideram como positiva a contextualização da tarefa, que se encontra próxima das vivências dos alunos. Durante a preparação da aula, os professores discutem as questões relacionadas com a interpretação da representação gráfica e com as dificuldades que ela pode suscitar nos alunos, manifestando necessidade de informar os alunos relativamente às convenções do gráfico de barras..

Turma de Carla

Introdução da tarefa

Carla informa os alunos sobre a interpretação e utilização de um gráfico de barras e sobre alguns dos aspetos mais relevantes na sua construção. Depois da pequena sistematização, lê o enunciado do problema e faz algumas perguntas.

Carla: . . . Temos então aqui um gráfico de quê?

Aluno: De barras...

Carla: De barras... Que nos diz o quê?

Jorge: O número de alunos e o prato preferido...

Carla: E o prato preferido... . . . Então o que é que nós temos que fazer aqui? Vamos ajudar o diretor! Certo? . . . Temos aqui o gráfico, que está todo correto... Não é?

...

Carla: Então... Diz aqui o quê? Ao fim ao cabo temos umas pistas, não é? As alíneas vamos encará-las como umas pistas... E vamos tentar descobrir a que... Qual é a barra que pertence ao prato... Certo? . . . Alínea a) O hambúrguer com batatas fritas foi o prato mais votado... Certo? Então... Nós temos que ir olhar para o quê? Para o gráfico... E tentar perceber qual será o hambúrguer com batatas fritas...

Carla informa os alunos sobre os aspetos que considera mais relevantes no enunciado da tarefa (nome da representação, identificação dos dois eixos). Em seguida, informa a turma sobre as representações verbais existentes, transformando-as numa linguagem mais próxima dos alunos (por exemplo, chama “pistas” às alíneas) (tratamento). Sugere ainda uma estratégia para resolver a tarefa (“Alínea a) . . . Nós temos que ir olhar para o quê? Para o gráfico... E tentar perceber qual será o hambúrguer com batatas fritas...”). Para isso, questiona os alunos através de perguntas de confirmação fechada (“Temos então aqui um gráfico de quê?”) e de perguntas de focalização retórica (“Vamos ajudar o diretor! Certo?”).

Trabalho autónomo dos alunos e primeiro momento de discussão coletiva

Durante o trabalho autónomo dos alunos, Carla observa e coloca-lhes algumas questões. Assim, questiona Yara que revela algumas dificuldades na identificação da barra da segunda alínea:

Carla: Então o que é que nos diz aqui? Que o número de alunos que escolheu hambúrgueres com batata frita... Quantos é que foram?

Yara: Catorze...

Carla: Foram o dobro dos que escolheram frango assado. Então... Onde é que estará aqui os que escolheram frango assado? Temos que ver o gráfico... Já sabemos que hambúrguer com batata frita foram quantos?

Yara: Foram catorze...

Carla: Este número é o dobro dos que escolheram frango... Então como é que nós vamos saber? Se este é o dobro... (...)

Yara: De dois...

Carla: Dois?

Yara: Aaa Não!

Carla: Qual é o dobro de dois?

Yara: É quatro!

Carla: Então catorze não é o dobro de dois... Catorze é o dobro de quanto?

Yara: Sete!

Carla: ... Então se catorze é o dobro de sete... Onde é que estará aqui a barrinha que tem o número sete? Onde é que ela está? Vamos lá procurá-la...

Carla dá sugestões a Yara para salientar a utilização e interpretação do gráfico de barras e conduz a aluna no estabelecimento de conversões (transformar os dados do gráfico em representações numéricas). Para isso, recorre a perguntas de confirmação fechada (“Qual é o dobro de dois?”) e por vezes a perguntas de confirmação aberta, às quais responde de imediato (“Então como é que nós vamos saber? Se este é o dobro...”).

Enquanto apoia a turma apercebe-se das dificuldades dos alunos em identificar as diferentes categorias. Assim, decide antecipar o início da discussão coletiva da primeira questão:

Carla: ... Quantos alunos é que escolheram hambúrguer com batata frita?

Yara: Catorze...

Carla: Catorze... Como é que sabes isso?

Yara: Porque... Aqui é doze... (aponta para o número 12 no eixo das ordenadas)

Carla: O gráfico está a ir de quanto em quanto?

Yara: De dois em dois...

Carla: De dois em dois... Então aí... Esse está a bater no catorze...

DOI: 10.20396/zet.v27i0.8650678

Carla pede à turma que interprete o gráfico de barras, recorrendo a perguntas de confirmação fechada (“Quantos alunos é que escolheram hambúrguer com batata frita?”) e prossegue a discussão coletiva das restantes alíneas. A identificação das penúltimas categorias (alínea e) e alínea f)) gera alguma confusão porque é necessário identificar primeiro a categoria da alínea f) para depois voltar à alínea e).

Carla: . . . O bacalhau com natas teve mais quatro votos do que o peixe assado... Oh António... Temos aí [Já identificámos o]... Peixe assado?

António: Não...

Carla: Não... Temos aí [Já identificámos o]... Bacalhau com natas?

António: Não...

Carla: Não... . . . O que é que eles [a tarefa] me dizem? Que o bacalhau com natas tem mais quatro votos do que o peixe assado, certo? Tenta descobrir!

António (apontando para a penúltima coluna): Bacalhau com natas...

Carla: Porquê?

António: Porque tem mais votos que este (aponta para a terceira coluna).

Carla: Quantos?

António: Dois...

Carla: Mas eu estou-te a dizer que o bacalhau com natas tem mais quatro votos que o peixe assado... Olha... Este prato que aqui tens a seguir ao hambúrguer... Quantos votos é que tem?

António: Dois...

Carla: Tem dois votos... Certo? Então dois mais quatro... Quanto é que vai dar?

António: Seis...

Carla: Tens aí algum com seis?

António: Sim (fica em silêncio, durante algum tempo, olhando para a coluna que vale cinco)

Carla: Se eu for assim traçar... (faz um traço desde o 6 da categoria das ordenadas até à coluna que vale 5)... Vai-me dar?... (silêncio do aluno) Isto vai-me dar seis?

António: Não... Cinco...

Tendo em conta que uma parte significativa da turma não consegue identificar a barra correspondente à alínea e), Carla dá sugestões a António para salientar a utilização e interpretação do gráfico de barras. Enquanto o aluno trabalhava autonomamente, Carla apercebeu-se que a resposta do aluno estava incorreta e, por isso, reveem agora o seu trabalho. Para isso, questiona-o através de perguntas de confirmação fechada (“Então dois mais quatro... Quanto é que vai dar?”) e perguntas de focalização retórica (“Que o bacalhau com natas tem mais quatro votos do que o peixe assado, certo?”). António apresenta a sua resposta e justifica-a indutivamente (se a coluna x é maior que a coluna y, e se o bacalhau tem mais votos que o peixe assado, então $x = \text{bacalhau}$ e $y = \text{peixe assado}$). Carla contra-argumenta, dando sugestões ao aluno para salientar a interpretação do gráfico de barras e questionando-o através de perguntas de confirmação fechada. António apercebe-se que a

resposta correta corresponde à coluna que vale 5, mas não consegue justificá-la e Carla informa a turma sobre as convenções da representação do gráfico de barras.

Depois de identificarem as categorias no eixo das abcissas, os alunos voltam a trabalhar autonomamente.

Discussão coletiva

No final do trabalho autônomo, a professora inicia a discussão coletiva, que, atendendo ao trabalho anteriormente realizado, acaba por ser relativamente curta. Assim, discute coletivamente com os alunos a segunda questão da tarefa:

Carla: . . . Eu olho aqui para o nosso gráfico... Certo? Para este gráfico... E digam-me uma coisa... Está bem construído?

Alunos: Nãooooo...

Vanessa: Não está completo...

Carla: Não está completo, Vanessa... Então o que é que falta!? . . .

Vanessa: Falta aqui dizer os pratos...

Carla: Onde?

Vanessa: Aqui! (aponta para o eixo das abcissas)

Carla: Aí falta dizer os pratos... Aí poderíamos... . . . Para ele estar completo devia ter por baixo o quê?

Alunos: Os nomes...

Carla: Os nomes, não é? De resto?

Xavier: Professora! O título!

Carla: Falta o título, certo? Falta ou não falta? . . .

Carla conduz a turma para a sistematização e avaliação da representação utilizada, questionando os alunos através de perguntas de inquirição (“Onde?”) e de focalização retórica (“Os nomes, não é?”). Assim, os alunos reconhecem que a identificação das categorias no eixo das abcissas e o título do gráfico de barras são dois elementos que integram a representação do gráfico de barras.

Turma de Ricardo

Introdução da tarefa

No início deste momento, Ricardo refere-se à representação gráfica que consta no enunciado:

Ricardo: Então alguém me sabe dizer o que é isto que aqui está?

Aluno: Um gráfico de barras!

Ricardo: Exatamente! Um gráfico de barras! Boa! Então e o que é que vocês acham que este gráfico nos indica?

Aluno: Comida que [se] come no refeitório...

Através de perguntas de confirmação fechada (“Então alguém me sabe dizer o que é

isto que aqui está?”) e de inquirição (“Então e o que é que vocês acham que este gráfico nos indica?”), Ricardo desafia a turma para que identifique e interprete a representação do gráfico de barras. Esta intervenção parece motivar a turma e o professor continua a explorar o enunciado da tarefa:

Ricardo: . . . Este gráfico de barras tem, como normalmente todos têm... Tem dois eixos... Neste eixo aqui (aponta para o eixo das ordenadas) temos o número de alunos, certo? E naquele (aponta para o eixo das abcissas), o prato preferido. . . . Então o diretor recebeu este pequeno relatório e não ficou satisfeito porque achou as conclusões muito confusas. Vocês não acham isto um bocado confuso?

Alunos: Sim...

Ricardo: Era mais fácil se em cada barra nós tivéssemos o número e qual é que era o prato, não era? . . . Nós nem sequer sabemos quantos alunos votaram, pois não? “Quantos votaram em cada prato?”... Também não sabemos...

Afonso: Nós temos que descobrir...

Ricardo informa os alunos sobre algumas das convenções do gráfico (identifica o eixo das ordenadas e das abcissas) e dá sugestões para salientar a sua utilização (“Era mais fácil se em cada barra nós tivéssemos o número e qual é que era o prato”). Para isso questiona os alunos através de perguntas de focalização retórica (“Nós nem sequer sabemos quantos alunos votaram, pois não?”). Na sua intervenção, parece procurar que a turma compreenda a necessidade de identificar cada categoria, para conseguir resolver tarefa.

Trabalho autónomo dos alunos e primeira discussão coletiva

Apesar dos esforços de Ricardo, depois de algum tempo a trabalhar autonomamente, a turma não consegue avançar na resolução da tarefa. A maioria sente dificuldade em converter os dados do gráfico em representações numéricas ou em interpretar a escala do eixo das ordenadas. Ao aperceber-se destas dificuldades, Ricardo resolve a tarefa coletivamente:

Bernardo: [Na primeira alínea] quer dizer que o prato mais votado foi o hambúrguer com batatas fritas... Então... Aquele [a barra] que está mais em cima é esse!

Ricardo: Exatamente! O Bernardo está a dizer que na alínea a) diz que o hambúrguer com batatas fritas foi o prato mais votado. Então é aquele que tem a barra mais alta... A barra maior! Então, é aquele em que votaram mais crianças... Certo?

Bernardo oferece-se para identificar a barra correspondente à alínea a) e explica com facilidade o seu raciocínio: se o hambúrguer é o prato mais votado, então a barra correspondente será a maior. Ricardo sente necessidade de informar os alunos sobre a explicação de Bernardo, questionando-os através de perguntas de focalização retórica (“Então, é aquele em que votaram mais crianças... Certo?”). Ricardo prossegue:

Ricardo: . . . Nós conseguimos saber alguma coisa aqui através da b)?

Ulisses: Sim na b)! O dobro do frango assado!

Ricardo: O dobro do frango assado é o quê? Explica lá!

Ulisses: O número dos alunos que escolheram hambúrguer com batata frita foi o dobro... dos que escolheram frango assado... . . .

Ricardo: . . . Então o que é que eu posso saber com isto?

DOI: 10.20396/zet.v27i0.8650678

Ulisses: Podemos saber... A quantidade do frango assado...

Ricardo: Podemos saber a quantidade dos que escolheram frango assado? Como é que eu vou fazer?

Catarina: Temos que ir ao outro [prato]...

António: Já sei professor! Temos que ver o número nessa tabela [gráfico]!!

Ricardo: Temos que ver o número na tabela, como?!

António: Isto aqui... Temos que ver que número está [em cada coluna]... Temos que [comparar as colunas e] ver se [qual] é o dobro do frango assado...

Na alínea “O número de alunos que escolheu Hambúrguer com batatas fritas foi o dobro dos que escolheram Frango assado”, o professor desafia a turma para a utilização da representação do gráfico de barras, questionando-os através de perguntas de inquirição (“Nós conseguimos saber alguma coisa aqui através da b)?”). Aquando o trabalho autónomo, Ulisses respondeu corretamente, mas não consegue explicar o seu raciocínio. No entanto, as perguntas de inquirição do professor (“Então o que é que eu posso saber com isto?”, “Como é que eu vou fazer?”), levam outros alunos a explicitar e a justificar a solução correta e António propõe que primeiramente se analisem os valores no eixo das ordenadas. Para isso, sugere que se compare o tamanho das barras, de forma a encontrar a que tenha metade do tamanho da barra do hambúrguer com batatas fritas. No seguimento da intervenção de António, outro aluno, Carlos, sugere que se comparem o tamanho das barras do gráfico e Ricardo questiona-o:

Ricardo: Então, então... Qual é que é o dobro? Explica-me? . . .

Carlos: É o que está ao lado do hambúrguer com batatas fritas...

Ricardo: Então anda cá explicar-me como é que tu vês...

Carlos: Eu tou a dizer assim professor (dirige-se para o quadro)... Este é o hambúrguer com batata frita (aponta para a segunda barra do gráfico) e [o frango assado] é este o oito (aponta para a primeira barra do gráfico)... Vamos ver o dobro e o oito é a metade do dobro... Assim...

Ricardo: A metade do dobro... . . . Então e qual é [o valor da barra]?

Carlos: Então professor... Sei lá!! Não estou a ver o número [na escala]...

Ricardo desafia Carlos a utilizar a representação do gráfico de barras, questionando-o através de perguntas de inquirição (“Explica-me?”) e de perguntas de confirmação fechada (“Então e qual é [o valor da barra]?”). Carlos não corresponde ao desafio do professor, revelando que não consegue interpretar o eixo das ordenadas (“Então professor... Sei lá!! Não estou a ver o número [na escala]...”), ao justificar a sua resposta no tamanho de cada barra. Entretanto, a turma começa a discutir entre si qual a resposta correta e Ricardo intervém:

Ricardo: . . . Toda a gente sabe... (aponta para a interseção entre os eixos) Que número é que é aqui?

Alunos: Zeeero! Zero!

Ricardo: É o zero, não é?

DOI: 10.20396/zet.v27i0.8650678

Leonardo: Isso vai de dois em dois!

Vera: Dois ou de quatro?

Ricardo: Vai de quantos em quantos?

Alunos: Quatro em quatro!

Fernando: Professor eu sei! É o dois! É o dois!

Ricardo: É o dois aonde?

Marco: É dois, quatro, seis, oito dez...Doze!

Ricardo: Se aqui temos o zero e aqui temos o quatro... Qual é que é no meio?

Alunos: Dois!

Ricardo dá sugestões sobre a utilização e interpretação do gráfico de barras, focando os alunos na interseção entre os eixos e questionando-os com uma pergunta de confirmação fechada (“Que número é que é aqui?”). Com esta pergunta, Ricardo parece promover a compreensão dos alunos, que identificam rapidamente a escala utilizada no eixo das ordenadas. A partir daí, o professor conduz a sistematização de informação relevante, questionando os alunos através de perguntas de confirmação fechada (“Vai de quantos em quantos?”, “Qual é que é no meio?”).

Discussão coletiva (segundo momento)

Depois do trabalho autónomo dos alunos e do primeiro momento de discussão coletiva, tem lugar um segundo momento de discussão coletiva. No início, Ricardo desafia Bernardo a interpretar e utilizar o gráfico de barras, questionando-o através de perguntas de inquirição (“Como?”, “Porquê?”). O aluno explica com facilidade como encontrou a barra correspondente à alínea c) (“É a primeira barra . . . O hambúrguer com batatas fritas são catorze e ali está a dizer para tirar quatro... Que fica dez!”), mas o professor sente necessidade de sistematizar a explicação de Bernardo. Assim, informa os alunos sobre os aspetos relevantes da explicação do colega e informa a turma sobre conversões (aponta para cada barra no gráfico e indica o seu valor numérico). Durante a sua intervenção, questiona os alunos através de perguntas de confirmação fechada (“Tem quanto?”, “Qual é que tem dez?”) e de focalização retórica (“Então e os filetes de peixe receberam menos quatro... Não foi?”). De seguida, Ricardo questiona Mariana:

Ricardo: Lê lá Mariana... (aluna lê o enunciado) Esparguete à bolonhesa foi o segundo prato mais votado... Qual é Mariana?

Mariana: É o penúltimo...

Ricardo: É o penúltimo...Este aqui (aponta para a penúltima barra do gráfico)?

Mariana: Sim...

Ricardo: Como é que eu sei que é este aqui?

Mariana: Porque é o segundo mais alto!

Ricardo: É o segundo mais alto... É o segundo mais votado... Não é? É o que teve... A seguir ao hambúrguer com batatas fritas... É o que teve mais votos... Não é? Então é o...

Ricardo pede a Mariana que interprete o gráfico de barras de forma a identificar a barra correspondente à alínea d) da tarefa, questionando-a através de perguntas de inquirição (“Como é que eu sei que é este aqui?”). Mais uma vez, Ricardo sente necessidade de sistematizar a explicação de Mariana, informando a turma sobre os aspetos mais relevantes da interpretação desta representação. Para isso, questiona os alunos através de perguntas de focalização retórica (“É o segundo mais votado... Não é?”). Depois da alínea c) Ricardo questiona a turma relativamente às alíneas seguintes. Quando se refere à identificação da categoria referida na alínea e) Ricardo sugere aos alunos que não a tentem encontrar de imediato (“É mais fácil... Passarmos à alínea a seguir...”), informando-os sobre os aspetos mais relevantes da tarefa e recorrendo ao questionamento através de perguntas de focalização retórica (“Eu já sei? Eu já tenho aqui o peixe assado?”). Em seguida, pede a Andreia que identifique a barra que correspondente a cinco votos (“Cinco alunos votaram no bacalhau com natas... Qual é Andreia?”). Quando esta identifica a barra correspondente, desafia-a, questionando-a através de uma pergunta de inquirição (“Esta?!? Então porquê... Diz-me lá...”). No final desta discussão, o professor é interpelado por Vera:

Vera: Agora podemos voltar ao e)!

Ricardo: Agora podemos voltar outra vez ao e)! Lê lá Bernardo (aluno lê novamente). Então agora... Como é que eu vou saber...? . . .

Bernardo: Bacalhau com natas tem cinco... E se tirarmos quatro fica com um...

Ricardo: E se eu tirar quatro vou ter o quê?

Bernardo: Vai ser aquele antes do dois...

Ricardo: Este aqui antes do dois... Que é o um! Certo? E é o quê? Bife com batatas fritas?

Bernardo: É o peixe assado!

Ricardo: Peixe assado! Exatamente! Diz lá que o bacalhau com natas teve mais quatro votos que o peixe assado! Se este teve mais quatro... Eu vou ver este menos quatro, como disse o Bernardo... Este menos quatro... Se este tem cinco..., menos quatro dá um! Temos aqui o peixe assado! Certo?! Porque se eu vier aqui ver... está no um! Então tenho aqui o peixe assado!

Alunos: O outro é ervilhas com ovos!

Ricardo: O outro diz que houve quem votasse em ervilhas com ovo... Não diz quantas pessoas... Não diz se foi o mais votado ou o menos...

Luísa: Foi dois!

Ricardo: Mas eu já só tenho ali uma barra para preencher... Então é essa, não é? Ervilhas com ovo!

Ricardo desafia os alunos a identificar as categorias correspondentes às restantes alíneas e questiona-os através de perguntas de inquirição (“Como é que eu vou saber...?”). No entanto, parece considerar a explicação de Bernardo pouco clara. Assim, informa a turma sobre os aspetos mais relevantes da explicação do aluno, recorrendo a perguntas de confirmação fechada (“E é o quê? Bife com batatas fritas?”). Depois de discutir com os

alunos a resolução da primeira questão da tarefa, Ricardo passa à resolução da segunda parte da tarefa.

Ricardo: . . . O que é vocês acham que está bem feito neste gráfico? . . . O que é que não está bem? Vamos começar primeiro pelo que não está bem...

Bernardo: Porque antes não tinha os outros números [no eixo das ordenadas]...

Ricardo: Não tinha os outros números... Então a nossa escala não estava completa, pois não? . . . Era mais difícil olharmos para as barras e saber quanto é que tinha... Porque não tínhamos lá a escala toda... . . . Mais coisas que não estavam bem feitas?

Natália: O nome em baixo... O nome do... Das refeições...

Ricardo: Ah! O nome das refeições! Sim... Nós fizemos ali em cima das barras... Também poderíamos ter feito em baixo, mas como eram nomes muito compridos, eu tive que pôr o nome assim em cima... Porque não conseguia escrever aqui um nome e aqui outro e aqui outro (aponta para cada categoria no eixo das abcissas)... Está?

Carlos: E falta o título! Falta o título professor! . . . Professor o título pode ser “O prato favorito”

Luísa: “O prato favorito dos alunos”!

Ricardo: Mais coisas que faltam?

Leonardo: Professor! Não tinham que ter o mesmo espaço? As barras?

Ricardo: O mesmo espaço entre elas? Aqui no [quadro]... Eu é que não as fiz bem... Porque se tu olhares para o que tens aí... Elas têm o mesmo espaço... Não têm?

Inicialmente, Ricardo informa a turma sobre a transformação para linguagem natural das representações verbais que constam no enunciado da tarefa (“O que é vocês acham que está bem feito neste gráfico?”), para que os alunos compreendam o que pretende. O professor desafia-os para a sistematização de informação relevante, questionando-os através de perguntas de inquirição (“Mais coisas que não estavam bem feitas?”, “Mais coisas que faltam?”). Através das suas ações e do tipo de questionamento que utiliza, os alunos identificam os aspetos a melhorar no gráfico de barras (inexistência de título e de legenda das categorias no eixo das abcissas, escala incompleta no eixo das ordenadas). Paralelamente, Ricardo informa a turma sobre os aspetos mais relevantes desta representação gráfica, traduzindo para uma linguagem mais formal as suas explicações, através do recurso a perguntas de focalização retóricas (“Porque não conseguia escrever aqui um nome e aqui outro e aqui outro. Está?”).

Reflexão pós-aula

O grupo de trabalho revê alguns dos momentos da tarefa e mostra-se surpreendido com a existência de duas abordagens distintas na dinamização da tarefa. Após reflexão, os professores consideram que a forma como exploram a tarefa na sala de aula foi influenciada pelas especificidades da “turma onde estava a ser apresentada a tarefa ou pelas características do professor...”. Nesse sentido, Carla indica que sentiu necessidade de rever e sistematizar informações relevantes durante a introdução da tarefa: “Eu prefiro sempre introduzir um bocadinho a matéria, rever aquilo que já foi dado e a partir daí vamos trabalhar e vamos aprofundar!”. Relativamente à forma como conduziu os alunos durante a tarefa, refere: “É

preferível dar as diretrizes todas e encaminhá-los diretamente para aquilo que queremos! Senão vai-nos sair tudo furado! . . . Sempre que vejo que há matéria que é mais “pantanososa” faço este tipo de abordagem... Sempre!...”. Os professores refletem ainda sobre a representação gráfica que constava no enunciado da tarefa, concluem que o facto das categorias no eixo das abcissas terem nomes muito extensos provocou dificuldades na realização da tarefa e concordam que teria sido importante sistematizar esta informação com os alunos:

Eu não devia ter permitido se calhar [que os alunos legendassem o gráfico autonomamente]... E refletindo agora... Eles teriam que fazer todos da mesma forma! . . . Somos tão rigorosos numas coisas... As barras têm que ser daquele tamanho, têm que estar naquelas linhas, os espaços têm que ser iguais...Então e depois a legenda? . . . Eu não expliquei isso aos meus alunos! . . . Fui admitindo a cada um [que legendasse como queria]! (Carla)

Os professores consideram ainda que a existência de várias alíneas no enunciado, tornou a tarefa muito extensa e de morosa resolução. Através do discurso dos professores, a ação de informar assume maior relevância, tendo em conta a importância que atribuem à compreensão das convenções da representação gráfica.

Conclusão

A exploração desta tarefa evidencia a importância das transformações de representações no trabalho em Matemática sublinhadas por Bishop e Goffree (1986) e por Duval (2006). Durante a preparação da aula, tal como refere Ponte (2005), os professores procuram adequar a tarefa aos seus alunos, atendendo à representação do gráfico de barras e as representações verbais do enunciado.

As ações dos professores na exploração da tarefa estão muito associadas ao tipo de questionamento que realizam. Durante a realização desta tarefa, observamos o recurso frequente dos professores à ação de informar sobre os aspetos mais relevantes, associada ao questionamento através de perguntas de focalização retórica e/ou de confirmação fechada. Ao recorrerem a este tipo de ação, parece estar subjacente o objetivo de facilitarem a compreensão dos alunos, bem como de explicitarem o estabelecimento de conexões entre representações (Bishop e Goffree, 1986). Por sua vez, embora menos frequentes, as ações de desafiar surgem geralmente associadas ao questionamento através de perguntas de inquirição, nos momentos em que os professores consideram que as dificuldades iniciais dos alunos foram ultrapassadas. A introdução da tarefa é o momento onde os professores privilegiam a ação de informar os alunos sobre aspetos relevantes, dada a necessidade que sentem em sistematizar algumas das convenções da representação gráfica. As dificuldades dos alunos associadas à interpretação e transformação da representação do gráfico de barras (Bishop e Goffree, 1986) tornam-se evidentes no momento de trabalho autónomo. Assim, as ações dos professores diferem e, enquanto Carla opta por dar sugestões aos alunos e por recorrer frequentemente a perguntas de confirmação fechada e de focalização retórica (orientando assumidamente a turma na resolução da tarefa), Ricardo, numa primeira fase, decide resolver a tarefa coletivamente, alternando as suas ações entre dar sugestões, informar e pedir para

interpretar (através de perguntas de focalização retóricas e/ou de confirmação fechada). Numa segunda fase, em que os alunos parecem ultrapassar as dificuldades sentidas, o professor recorre a ações de desafiar, associadas a perguntas de inquirição. No momento de discussão coletiva ambos os professores recorrem às ações de informar e conduzir sobre os aspetos mais relevantes. Globalmente, durante a preparação, exploração e reflexão pós aula desta tarefa, os professores privilegiam a compreensão e interpretação dos diferentes aspetos das convenções relativas ao gráfico de barras, o que se reflete no recurso frequente a ações que conduzem os alunos ao resultado pretendido (informar/conduzir).

As características específicas da tarefa condicionam a atividade dos alunos, relativamente à produção e escolha de novas representações, condicionando consequentemente as ações dos professores. Sendo a tarefa da através de um gráfico de barras, os professores procuram através do uso de representações verbais, levar os alunos a compreender toda a informação contida nesse gráfico. Apesar desta limitação, à semelhança do que é referido por Swan (2007), as ações dos professores influenciaram a atividade dos alunos, promovendo (i) a utilização e transformação da representação escolhida e (ii) a reflexão relativamente aos aspetos mais relevantes.

Referências

- Acevedo Nistal, A., Dooren, W. V., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualizing, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 627–636.
- Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance of depth and breadth in the analyses of teaching: A framework for analyzing teacher questions. *Proceedings of the 26th Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Toronto, Ontario, Canada.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Blosser, P.E. (1975). *How to ask the right questions*. Washington DC: National Science Teachers Association.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- Goldin, G. (2000). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

DOI: 10.20396/zet.v27i0.8650678

- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.
- Laville, C., & Dionne, J. (1999). *A construção do saber: Manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111.
- McClain, K. (2000). An analysis of the teachers' role in supporting the emergence of symbolizations in one first-grade classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 189-207.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. CA; Jossey Bass.
- Moyer, P. S., & Milewicz E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 293-315.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J.P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55-82.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática, 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Purdum-Cassidy, B., Nesmith, S., Meyer, R. D., & Cooper, S. (2015). What are they asking? An analysis of the questions planned by prospective teachers when integrating literature in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 79-99.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.
- Swan, M. (2007). The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 217-237.
- Thomas, N. D., Mulliganb, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 117-133.
- Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.