



Simulação Computacional: Aspectos do Ensino da Probabilidade Frequentista

Computational Simulation: Aspects of Frequentist Probability Teaching

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho¹

Auriluci de Carvalho Figueiredo²

Resumo

Neste artigo discutem-se aspectos didáticos da abordagem frequentista da probabilidade por meio de simulação computacional. Para tanto, utilizamos um *applet* que simula o jogo *franc-carreau*. Os dados para discussão foram colhidos em oficina para professores. O referencial teórico abrangeu a teoria das situações didáticas, de Brousseau e o modelo de letramento probabilístico, de Gal, adotando-se pressupostos baseados na engenharia didática de segunda geração como metodologia de pesquisa, uma vez que o objetivo era relacionado à formação continuada de professores. Nos relatos dos professores sobre atividades que trabalhavam com o enfoque frequentista, observamos que a manipulação das frequências relativas acumuladas em uma planilha Excel mostrou-se relativamente propícia para superar dificuldades no uso de tecnologias, abrindo possibilidades de ampliação de aspectos do letramento probabilístico, com reflexões e discussões sobre sua aplicação na educação básica e superior.

Palavras-chave: Probabilidade frequentista; Simulação; Formação de professores.

Abstract

This article discusses didactic aspects of the frequentist approach to probability through computer simulation, with the aid of an applet that simulated the franc-carreau game. Data for discussion were collected from a workshop for teachers. Brousseau's theory of didactic situations and Gal's probabilistic literacy model constituted the theoretical framework, along with premises based on second-generation didactic engineering as a research method, given that our objective addressed teachers' continuing education. Participants' reports on activities dealing with the frequentist approach revealed that using an Excel spreadsheet to handle cumulative relative frequencies proved relatively useful to overcome difficulties in the use of technologies, expanding the possibilities for addressing aspects of probabilistic literacy, with reflections and discussions on its application to basic and higher education.

Keywords: Frequentist probability; Simulation; Teacher training.

Introdução

O século 21 está imerso em um complexo mundo tecnológico orientado por dados. Alfabetizar para a cidadania e preparar para o trabalho exigem tornar os alunos aptos a tomar

Submetido em: 28/09/2019 – **Aceito em:** 07/03/2020 – **Publicado em:** 27/05/2020

¹Doutora em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier, França. Professora da PUC-SP, Brasil. cileda@pucsp.br

²Doutora em Educação Matemática pela PUC-SP. Professora da UNIMES, Brasil. aurilucy@uol.com.br

decisões baseadas em dados, analisar, inferir e prever, o que requer conhecimentos probabilísticos. Por outro lado, tecnologia e jogos são áreas em que os alunos se mostram interessados nos dias de hoje. A probabilidade tem ampla gama de aplicações em muitas áreas de conhecimento (como física, economia, meteorologia, genética, seguros). Reunir tecnologia e jogos na abordagem da probabilidade, como parte da própria estrutura dos objetivos de aprendizagem de disciplinas diversas – matemática entre elas –, pode revelar-se vantajoso para professores e alunos.

Discutiremos aqui aspectos da simulação computacional do jogo *franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas & Pichard, 1996), proposto pelo matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc (1707-1788), Conde de Buffon, que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de ladrilhos quadrados. A atividade foi utilizada em uma oficina para professores que ensinam matemática na escola básica e no ensino superior, utilizando um *applet* de acesso gratuito (Erdrich, s.d.), incluído no *software* GeoGebra (s.d.). O *applet* permite tanto a manipulação da “moeda” dentro do “ladrilho” como o lançamento dessa “moeda” tantas vezes quantas se queira. Vence o jogo quem obtiver a posição *franc-carreau*, ou seja, a moeda imobilizada dentro de um único ladrilho.

Objetivo

Discutiremos o desenvolvimento do letramento probabilístico nos termos de Gal (2005) e o papel da simulação computacional para viabilizar tal inserção da probabilidade no ensino de matemática. Ao longo de sua obra, Gal aponta a necessidade de que o mundo real faça parte do pensamento, o que inclui as coisas pensadas, avaliadas e valorizadas na escola, e para que isso ocorra é necessário que o letramento seja desenvolvido tanto em adultos quanto em jovens em idade de escolarização. Gal (2005) fornece exemplos de como as percepções de probabilidade podem ser afetadas pelo contexto, o que inclui o conhecimento de mundo, as disposições pessoais, a interpretação de frases relacionadas à probabilidade ou a capacidade de entender, manipular e analisar criticamente o conteúdo quantitativo de informações dadas ou implícitas.

Concordamos com Gal (2005) quando aponta que os contextos incluem, entre outros, a compreensão de variação e a familiaridade com gráficos e com algumas estatísticas descritivas, bem como quando salienta que:

[...] o conhecimento da probabilidade é de relevância, principalmente para o funcionamento em situações pessoais, comunitárias e sociedade, onde situações exigem *interpretação* da probabilidade, declarações, *geração* de julgamentos de probabilidade ou *tomada de decisão*. (p. 49)

Silva (2018, p. 51) destaca que:

É necessário que os adultos conheçam a noção de aleatoriedade, compreendam que os eventos variam em seu grau de previsibilidade ou independência, mas também entendam que alguns eventos são imprevisíveis (e, portanto, que a concorrência de certos eventos não significa que eles estão necessariamente relacionados ou causam uns aos outros).

Mais adiante, trataremos mais detalhadamente dos componentes do letramento probabilístico nos termos de Gal (2005), ao discutirmos nossos referenciais teóricos e metodológicos.

Algumas pesquisas

No Brasil, a importância de incluir conteúdos relativos à probabilidade está expressa em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental (MEC, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MEC, 2018). Ambos explicitam que uma das finalidades do estudo da probabilidade é que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que é possível identificar seus possíveis resultados. A BNCC (MEC, 2018, p. 274) prescreve que os alunos participem de atividades em que “façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista” e frisa que essas atividades devem compor o “cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)” (MEC, 2018, p. 304).

Coutinho (2001) já apontava a importância da articulação entre o enfoque clássico e o frequentista, sendo que o primeiro focaliza a razão entre o número de sucessos e número total de casos quando o espaço amostral é equiprovável, enquanto o segundo, por Bernoulli (1713), enfatiza o valor em torno do qual a série de frequências relativas acumuladas do evento se estabiliza.

Nesse cenário, pesquisadores como Lopes (2007), Silva e Cazorla (2008), Fernandes, Correia e Contreras (2013), Carvalho (2015) e Batanero, Contreras, Díaz e Cañadas (2013) têm se dedicado a trabalhos que envolvem conceitos de probabilidade, indicando possibilidades de ensino e aprendizagem. No entanto, a probabilidade é tópico que os alunos têm dificuldade em aprender (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Koparan & Kaleli Yılmaz, 2015). Segundo Koparan e Kaleli Yılmaz (2015), o uso de atividades de aprendizado envolventes no ensino de probabilidade tem tido efeito positivo para o conhecimento matemático dos alunos em vários países, além de melhorar as habilidades de pensamento. Gürbüz (2008) advoga o uso de computador em atividades e jogos como apoio para o ensino de probabilidade, juntamente com as diferentes técnicas de ensino que esse ambiente de tecnologia pode proporcionar.

Referencial teórico e metodológico

A pesquisa em que se apoia este artigo se desenvolveu à luz da teoria das situações didáticas (Brousseau, 1986), tendo como metodologia os pressupostos da engenharia didática de segunda geração – engenharia didática para formação, nos termos de Perrin-Glorian (2009). Já discutindo tais referenciais no contexto da oficina desenvolvida sobre probabilidade geométrica, apresentaremos as especificidades que foram trabalhadas e sua fundamentação.

Na situação didática (Brousseau, 1986) construída para a pesquisa, a fase de devolução ocorreu ao se apresentar aos 20 professores participantes da oficina o problema de cálculo de uma probabilidade em contexto geométrico envolvendo o jogo *franc-carreau*.

Quanto às dialéticas de ação, formulação e validação, ao entrar em contato com o jogo os participantes recorreram a seus conhecimentos para construir estratégias próprias para resolver o problema de estimar ou calcular a probabilidade procurada: a de que a moeda se imobilizasse na posição *franc-carreau*, ou seja, imobilizar-se dentro de um único ladrilho. O comportamento natural consequente é a verbalização para o parceiro, como tentativa de explicar a estratégia formulada e de convencimento. Tal verbalização configura o segundo componente da dialética que se estabelece entre a fase de ação e a de formulação, passando a sofrer também os efeitos da fase de validação agindo nessa dialética – ou seja, os participantes buscam validar seus resultados por meio dos próprios conhecimentos. Por exemplo, comparam resultados entre si e verificam se seus resultados são menores que 1, entre outras ferramentas de validação disponíveis como conhecimentos estabilizados.

A última fase da situação é a de institucionalização, na qual se discutiu o conceito de probabilidade e seus enfoques clássico e frequentista e o papel da simulação computacional na estimação da probabilidade frequentista. Os aspectos didáticos para a abordagem desses conceitos em sala de aula do ensino médio também puderam ser discutidos e sistematizados com os professores nessa fase de institucionalização. (Os detalhes do efetivamente realizado são apresentados mais adiante.)

O objetivo da oficina foi também de fornecer aos professores recursos didático-pedagógicos para suas aulas, o que caracteriza a utilização dos pressupostos de uma engenharia didática de segunda geração, nos termos de Perrin-Glorian (2009), que expõe que em uma engenharia didática de segunda geração (que ela designa por engenharia didática de formação – EDF) o controle teórico é realizado nas seguintes dimensões:

- Análise do saber: No presente artigo, apresentamos o enfoque frequentista tal como desejamos abordá-lo, assim como a ferramenta de simulação utilizada.
- Definição da situação, do *milieu*: Neste item, Perrin-Glorian (2009) admite concessões à EDF, dadas suas especificidades – e aqui trabalharemos com pressupostos de uma EDF. Destacamos, porém, que o *milieu* é principalmente constituído pelos conhecimentos específicos dos professores participantes, por seus conhecimentos didáticos desse conteúdo, pelos conhecimentos dos professores parceiros (pois trabalharam em duplas) e pelos conhecimentos disponíveis nas ferramentas computacionais (simulador e planilha eletrônica com comandos pré-estipulados).
- Conhecimentos sobre os professores participantes: Pelas fichas de inscrição, conhecíamos apenas os níveis de escolaridade em que lecionavam matemática.
- Papel do professor (neste caso, as pesquisadoras-autoras deste artigo): Neste item, Perrin-Glorian (2009) destaca a necessidade de caracterização das situações de forma mais clara e mais leve. Em nossa oficina, optamos por agir como mediadoras, intervindo em cada dupla apenas para elucidar dúvidas específicas e fazendo institucionalizações locais sempre que necessário.
- Restrições institucionais: Nas discussões com os professores, focalizamos também situações em que não dispusessem de laboratórios de informática para suas aulas, casos estes em que poderiam usar outros simuladores disponíveis em *smartphones*. Discutimos mesmo a possibilidade de recorrerem ao uso de simulações mecânicas, nas

quais se utilizariam da soma dos resultados dos lançamentos realizados por cada um de seus alunos, para obter um total de repetições aceitável do ponto de vista do enfoque frequentista da probabilidade.

O letramento probabilístico

Tanto Caberlim (2015) como Silva (2018) discutem o letramento probabilístico em situações de simulação computacional, constatando as contribuições efetivas desse recurso para o desenvolvimento das competências e habilidades que constituem esse letramento. Em seus trabalhos, consideram o modelo proposto por Gal (2005).

Para Gal, o letramento probabilístico é fundamental e concordamos com sua visão quando afirma a importância da atenção que devemos ter para com as demandas do mundo real, embora estas não devam “ser o único fator influenciando o planejamento curricular ou as práticas docentes”, mas sim “ser parte das considerações que guiam o que deve ser planejado, ensinado, avaliado e valorizado na sala de aula” (Gal, 2005, p. 39).

O letramento probabilístico se compõe de conhecimentos e disposições que são mobilizados pelo sujeito de forma articulada, e para enunciar esses elementos Gal (2005) se apoia na mesma lógica que empregara na construção de seu modelo de letramento estatístico (Gal, 2002): cinco elementos de conhecimento e três disposicionais.

São elementos de conhecimento:

- grandes ideias (aleatoriedade, independência, preditibilidade/incerteza);
- cálculo de probabilidades (formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos);
- linguagem (os termos e métodos usados para comunicar sobre chances);
- contexto (compreensão do papel e implicações de resultados probabilísticos e mensagens em vários contextos e em discursos pessoais e públicos);
- questões críticas (questões para se refletir quando se lida com probabilidade). (Gal, 2005, p. 46)

São elementos disposicionais:

- postura crítica;
- crenças e atitudes;
- sentimentos pessoais em relação à incerteza e risco (por exemplo, aversão ao risco). (Gal, 2005, p. 46)

Observando esses oito pontos em relação à simulação do jogo *franc-carreau*, podemos identificar contribuições para o desenvolvimento do letramento probabilístico dos sujeitos. Coutinho (2001) e Caberlim (2015) observaram esse fato com alunos do primeiro e do segundo ano do ensino médio, respectivamente. Atualmente estamos em vias de desenvolver um trabalho com professores de matemática em formação inicial e em formação continuada, tanto em formato presencial quanto a distância.

Particularizando para o jogo *franc-carreau* em nossa análise *a priori*, temos os seguintes pontos:

- Grandes ideias: A cada lançamento da moeda o sistema retorna a seu estado inicial, o que torna os lançamentos independentes e pseudoaleatórios (um algoritmo gera uma

posição para o centro da moeda aleatoriamente). Inexiste possibilidade de calcular ou determinar a posição exata que resultará do lançamento.

- Cálculo de probabilidades: Pode-se estimar a probabilidade do evento *franc-carreau* pela observação da estabilização das frequências relativas acumuladas (probabilidade *a posteriori* ou frequentista) ou pela consideração das medidas fornecidas pelo sistema (probabilidade *a priori*). No sistema que estamos apresentando, o cálculo *a priori* resulta 0,36, enquanto a estimação frequentista pode ser estimada por 0,35 ou por valores superiores.
- Linguagem: Utilização de linguagem acessível, por exemplo designando a atividade como jogo de moedas, de lajotas, de rejuntas, de imobilização, de probabilidades, de estabilização de frequências.
- Contexto: A utilização de contexto de jogos é bastante usual tanto na escola como na vida cotidiana dos alunos e de professores, como apontam diversos estudos, entre eles o de Rodrigues (2018), que relata que os professores que participaram de sua pesquisa reconhecem a aleatoriedade mais facilmente em jogos que em outros contextos.
- Questões críticas: O jogo *franc-carreau* se originou no século 18, período de problemas sociais devidos a uma pronunciada adicção a apostas. A atividade envolvendo esse jogo pode propiciar um momento de debate sobre a criticidade, a cidadania, o papel das relações sociais e o papel social e econômico dos jogos na vida atual.
- Postura crítica: O debate acima mencionado pode promover postura crítica frente a situações de jogo.
- Crenças e atitudes: A simulação computacional de um jogo favorece em menor grau a manifestação de crenças e de atitudes ligadas a estas do que a manipulação de objetos físicos para a realização do jogo (neste caso, a manipulação da moeda).
- A aversão ao risco pode ser percebida em simulações que permitem manipular os parâmetros do jogo, como o raio do círculo que representa a moeda e o lado do quadrado que representa o ladrilho. Nesses casos, podem ser observadas ações que buscam minimizar o raio e maximizar o lado, de forma a garantir a ocorrência da posição *franc-carreau*.

A simulação que apresentamos permite portanto trabalhar com cada um dos elementos apontados por Gal (2005) para constituição do letramento probabilístico. Tal trabalho dependerá, decerto, das práticas do professor responsável pelo conteúdo na sala de aula.

O papel da simulação para a probabilidade escolar em ambientes de jogos

Vários pesquisadores propõem o uso de computador no ensino e aprendizagem de conceitos que mobilizam probabilidade, de modo a facilitar o entendimento de aspectos abstratos ou de mais difícil apreensão (Mills, 2002; Gürbüz, 2008). Batanero e Díaz (2007) advogam que os alunos façam simulações que os ajudem a resolver problemas simples de probabilidade. Borovcnik e Kapadia (2009) consideram que combinar simulação e tecnologia constitui a estratégia mais apropriada para focalizar conceitos e reduzir cálculos técnicos.

Citando estudo de Heitele de 1975, Fernandes, Batanero, Contreras e Díaz (2009, p. 162) destacam que:

Através da simulação temos em correspondência duas experiências aleatórias diferentes, com a condição que a cada acontecimento elementar da primeira experiência lhe corresponda um e só um acontecimento elementar da segunda, de forma que os acontecimentos postos em correspondência em ambas as experiências sejam equiprováveis.

Além dos pontos positivos do uso de simulação computacional, esses autores também apontam pontos negativos, tais como o fato de que a perspectiva frequentista abordada pela simulação não considera outras visões do conceito de probabilidade e proporciona apenas uma estimativa do valor teórico de probabilidade, que eventualmente pode se afastar do verdadeiro valor caso o número de experiências seja pequeno. De fato, esse é um problema que observamos com certa frequência em livros didáticos brasileiros que, quando adotam enfoque frequentista, o fazem a partir de um número insuficiente de repetições do experimento aleatório, como constata Coutinho (2013). Analisando três coleções didáticas, Carvalho, Silva e Paraíba (2016) detectaram que cerca de 87% das atividades que versam sobre probabilidade envolvem o significado clássico desta. Destacam também que, dentre as 156 atividades encontradas, apenas três se situam em contexto geométrico. Para estes pesquisadores:

[...] não se apresentam aos estudantes atividades explícitas de experimentação que permitam transitar desde o experimental ao teórico, ou seja, uma articulação coerente entre o significado frequentista e o clássico, como o caso do lançamento de dados, registro em tabelas e seguir para a construção gráfica. (Carvalho, Silva & Paraíba, 2016, p. 8)

Mas o que seria um número suficientemente grande? Basta lembrarmos a definição dada por Ventsel (1962) em *Théorie des probabilités*, de que a probabilidade não pode ser outra senão o número ao redor do qual os valores da série das frequências se estabilizam. Em termos atuais: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n(A)$.

Como o valor da probabilidade é único (ver definição axiomática), o enfoque frequentista nos fornece o mesmo valor para $P(A)$, qual seja: $P(A) = \frac{n.sucessos}{n.total\ de\ casos}$, sendo o espaço amostral equiprovável, que é a definição proposta por Pascal e Fermat, a qual, axiomatizada por Laplace (1814) em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, é utilizada até hoje nas escolas.

O jogo

O jogo *franc-carreau* consiste em estabelecer o tipo de ladrilho e realizar efetivamente os lançamentos de uma moeda previamente escolhida. (Fixa-se o valor da moeda, uma vez que o raio do círculo que a representa influenciará a probabilidade procurada.) A manipulação da moeda deve também permitir a construção de uma hipótese para o valor da probabilidade procurada, mesmo se tomarmos medidas genéricas: um ladrilho quadrado de lado a e uma moeda de raio r . A manipulação da moeda dentro desse ladrilho permite a visualização de possíveis estratégias para a resolução do problema proposto (Figura 1).

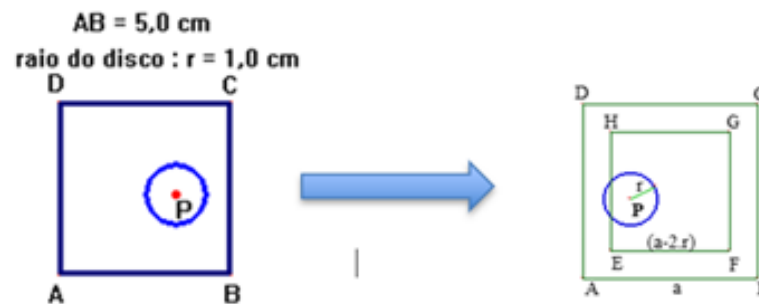


Figura 1. Esquema de solução do jogo *franc-carreau*.

Fonte: as autoras.

Ao visualizar a relação entre o raio r da moeda e o lado a do quadrado (ladrilho), o aluno percebe se o centro da moeda se localiza no interior do quadrado EFGH após imobilização, obtendo-se a posição *franc-carreau*, o que permite ao aluno construir a relação derivada do segundo princípio enunciado por Laplace (razão entre o número de sucessos e o número total de casos), adaptada à probabilidade geométrica: sendo FC a posição *franc-carreau*, então $P(FC) = \frac{\text{área de EFGH}}{\text{área de ABCD}}$. Caberlim (2015) constatou que tal procedimento não foi problemático para alunos que cursavam o segundo ano do ensino médio, confirmando o observado por Coutinho (2001) em alunos do primeiro ano desse nível de ensino. Tal estratégia é um tipo de validação dos resultados observados na simulação, apresentada após esta seção, tal como afirma Coutinho (2001) – ou seja, se consideramos a dialética de ação-formulação-validação discutida quando apresentamos a situação adidática, a comparação entre a observação da estabilização de série de frequências acumuladas (enfoque frequentista) e o valor obtido no cálculo *a priori* (enfoque clássico) configura-se como ferramenta de validação eficaz.

Para que possamos estimar a probabilidade de se obter a posição *franc-carreau*, precisamos observar o valor em torno do qual as frequências relativas acumuladas se estabilizam, nos termos propostos por Ventsel (1962). Para tanto, foram realizadas 25 repetições com 40 lançamentos cada uma, de forma a totalizar 1.000 lançamentos da moeda, que é um valor estatisticamente aceitável sob ótica didática, já que o número de repetições tende a infinito, segundo definição frequentista de probabilidade. Vale ressaltar que em termos pragmáticos, a estabilização é observada a partir de 1000 repetições.

Tabela 1. Resultados da simulação de 1.000 lançamentos da moeda no jogo *franc-carreau*.

| Lançamentos | Lançamentos acumulados | Sucessos | Sucessos acumulados | Frequência relativa acumulada (sucessos) |
|-------------|------------------------|----------|---------------------|--|
| 40 | 40 | 4 | 9 | 0,225 |
| 40 | 80 | 5 | 23 | 0,2875 |
| 40 | 120 | 4 | 33 | 0,275 |
| 40 | 160 | 4 | 47 | 0,29375 |
| 40 | 200 | 3 | 55 | 0,275 |
| 40 | 240 | 10 | 70 | 0,291666667 |
| 40 | 280 | 5 | 84 | 0,3 |
| 40 | 320 | 9 | 100 | 0,3125 |
| 40 | 360 | 4 | 109 | 0,302777778 |
| 40 | 400 | 7 | 123 | 0,3075 |
| 40 | 440 | 4 | 133 | 0,302272727 |
| 40 | 480 | 11 | 151 | 0,314583333 |
| 40 | 520 | 7 | 161 | 0,309615385 |
| 40 | 560 | 8 | 180 | 0,321428571 |
| 40 | 600 | 2 | 185 | 0,308333333 |
| 40 | 640 | 6 | 199 | 0,3109375 |
| 40 | 680 | 8 | 218 | 0,320588235 |
| 40 | 720 | 7 | 231 | 0,320833333 |
| 40 | 760 | 6 | 245 | 0,322368421 |
| 40 | 800 | 7 | 258 | 0,3225 |
| 40 | 840 | 8 | 279 | 0,332142857 |
| 40 | 880 | 5 | 294 | 0,334090909 |
| 40 | 920 | 7 | 309 | 0,335869565 |
| 40 | 960 | 7 | 328 | 0,341666667 |
| 40 | 1000 | 12 | 352 | 0,352 |

Fonte: as autoras.

Construir um gráfico de linha (Figura 2) facilita perceber a estabilização das frequências relativas.

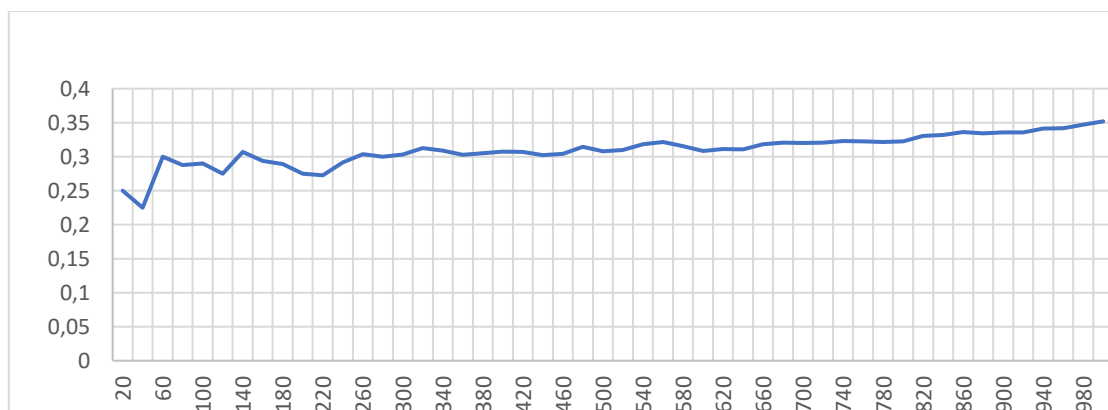


Figura 2. Frequências relativas acumuladas.

Fonte: as autoras.

Podemos observar que o gráfico tende a se estabilizar em torno de 0,34, mas para melhor resultado seria necessário haver mais lançamentos, o que em sala de aula nem sempre se viabilizaria. No caso de um sistema computacional suficientemente potente, poderíamos esperar que se efetuassem 3.000 ou mais repetições da experiência aleatória que se quer simular. Observemos que assumir simplesmente o valor observado para a frequência relativa ao final das 1.000 repetições do experimento não reflete necessariamente o valor da probabilidade procurada, pois o gráfico de linha (Figura 2) indica não haver ainda estabilização suficiente para uma estimativa eficaz.

Efetuar 2.000 lançamentos torna mais clara a estabilização das frequências relativas acumuladas em torno de 0,35 (Figura 3), sem necessidade da resolução analítica, tal como nos aponta Biehler (1991). Destacamos inclusive que a estabilidade é observada a partir das 1.000 repetições, como evidencia a Figura 3.

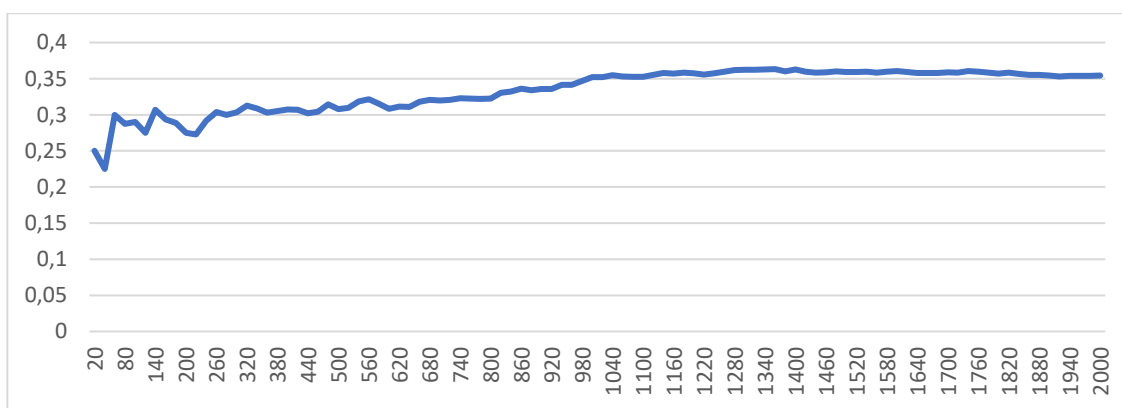


Figura 3. Estabilização das frequências com 2.000 lançamentos da moeda (simulação).

Fonte: as autoras.

O mais usual é que cada aluno realize determinado número de repetições e o professor organize a tabela somando os resultados de todos os alunos, de forma a atingir o maior número possível de repetições do experimento aleatório como um todo – no caso, o lançamento da moeda com verificação de sua posição no ladrilho após sua imobilização.

Observemos também que a simulação por meio desse *applet* não requer domínio do *software* GeoGebra. Tal domínio, porém, permitiria ao professor construir outras simulações para utilizar com seus alunos.

Discussão dos resultados

Os participantes da oficina começaram a fazer os lançamentos no *applet*, cuja interface em francês lhes foi traduzida. A princípio não encontraram dificuldade em manusear e identificaram todas as informações que a interface oferece (Figura 4).

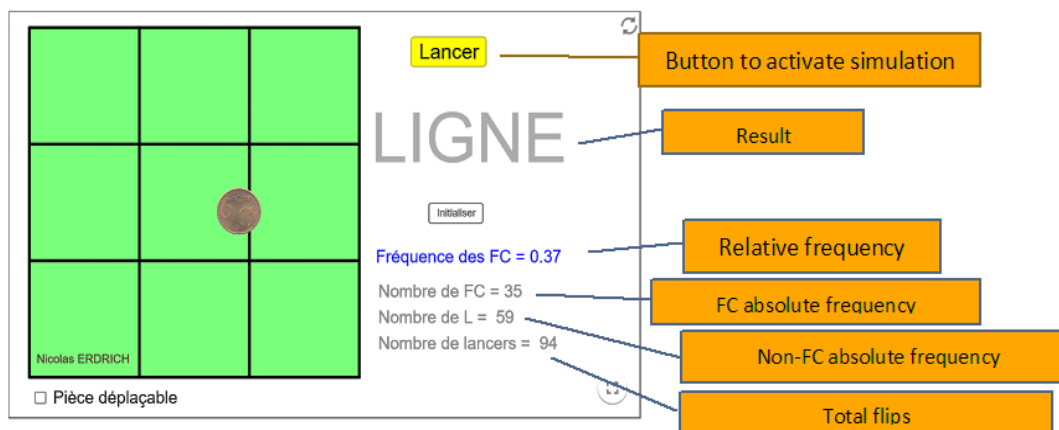


Figura 4. Informações da interface do jogo *franc-carreau* fornecidas aos participantes em material impresso.
Fonte: as autoras.

Os participantes iniciaram as simulações com 10 séries de 20 lançamentos e perceberam que estas não seriam suficientes para estabilizar a série de frequências relativas, como já esperávamos (Tabela 1) em nossa análise *a priori*, pois as frequências relativas variavam grandemente entre os lançamentos, além do fato que a estabilização da série de frequências relativas é mais perceptível para intervalos menores, até mesmo unitários, conforme Ventsel (1962). Em seguida fizeram lançamentos de 40 em 40 e identificaram a necessidade de aumentar tanto o número de observações quanto a quantidade das séries, concluindo que lançamentos de 100 em 100 seriam suficientes para uma estabilização. Novamente, a percepção da necessidade de um maior número de repetições da experiência aleatória concorda com nossa análise *a priori*, ao passo que o intervalo entre as observações é contrário ao que esperávamos.

A maioria dos participantes considerou o *applet* de fácil compreensão, e parece ter sido consenso o que uma das duplas expressou em seu relatório final:

Dupla A: O applet é de fácil aplicação. As justificativas dos resultados apontados ficam mais evidentes quando expostas no Excel que interpreta os cálculos das frequências relativas e acumuladas, e expõe os resultados comparativamente.

Estes participantes afirmaram que o jogo é insuficiente para evidenciar o cálculo da probabilidade pelo enfoque frequentista e que a associação entre cálculos, tabelas e gráficos é que lhes permitiu alcançar compreensão. Tal conclusão somente foi alcançada no final da oficina, pois em seu decurso percebemos que esses participantes duvidavam se a estabilização realmente iria ocorrer, o que nos leva a supor que, embora fossem professores, não tinham hábito de proceder a um número suficientemente grande de repetições da experiência aleatória para que pudessem observar estabilizações. Tal demora na percepção também se deveu ao intervalo de amplitude muito grande para as observações das repetições da experiência aleatória. Isso remete ao que Carvalho et al. (2016) apontam: inexistirem nos livros didáticos atividades dessa natureza. Podemos assim inferir que esses professores não utilizam em suas práticas tais experimentações; que talvez não as tenham vivenciado em sua formação inicial; que o número de repetições presentes nas poucas atividades com que tiveram contato não era suficiente; ou que não abordaram de forma adequada o enfoque frequentista.

Nessa etapa de simular no *applet* e registrar os resultados em uma planilha Excel, observamos que a maior dificuldade encontrada pelos professores foi a de utilizar a ferramenta Excel para registrar as frequências relativas e acumuladas como procedimento facilitador dos cálculos. Inserir as colunas com as fórmulas dessas frequências foi demorado. Mesmo com a ajuda que lhes fornecemos em PowerPoint mostrando os passos a serem seguidos, algumas duplas optaram por fazer cálculos manuais. Portanto, constatou-se que a maioria desses professores, embora relatem trabalhar com esse recurso, não mobilizam tal conhecimento de forma estável. Não têm o hábito (testemunho oral, não registrado) de utilizar Excel, muitas vezes por limitações institucionais, tal como inferimos na apresentação de nossa metodologia.

A ideia da oficina era discutir o ensino e aprendizagem de probabilidade quando as atividades são colocadas na forma de resolução de problemas que envolvem simulação computacional, no contexto da articulação de dois enfoques (clássico e frequentista). O *applet* se mostrou motivador para os participantes, mas observamos que em nenhum momento estes recorreram ao cálculo da probabilidade clássica para saber a qual número a estabilização das simulações deveria se aproximar. Quando perguntamos se alguma das duplas havia calculado a probabilidade de ocorrer *franc-carreau*, todos responderam negativamente e, quando convidados a realizar o cálculo, mostraram dificuldade em organizar uma estratégia que fornecesse tal probabilidade, contrariamente ao observado por Coutinho (2001) e por Caberlim (2015). Foi necessário nesse momento que interferíssemos para levantar conceitos da probabilidade geométrica, para cujo cálculo os dados são encontrados no próprio *applet* (Figura 5).

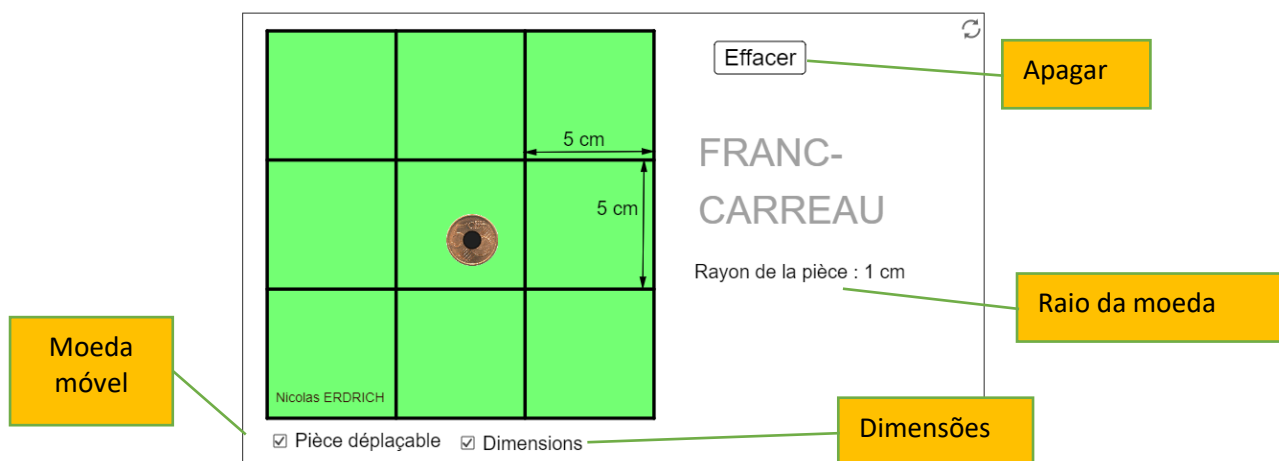


Figura 5. Informações do jogo *franc-carreau* traduzidas oralmente para os participantes.

Fonte: as autoras.

Levantamos algumas questões para que os participantes pudessem identificar quais elementos tomariam para calcular a probabilidade. Cada um deles foi colaborando com o grupo até que se aceitasse que para tal cálculo precisaríamos, a princípio, da área de apenas um dos nove quadrados (Figura 1) e, assim, analisando o “caminho” que esta moeda poderia percorrer de modo a “não encostar” nos lados do quadrado. Depois disso, a compreensão de que essa estratégia poderia ser ampliada para todos os nove quadrados sem interferir na probabilidade de ocorrência da posição *franc-carreau* em cada um deles tornou-se mais natural, e o cálculo

foi construído em conjunto conosco na lousa, chegando-se à seguinte conclusão: $P(FC) = \frac{9,3^2}{9,5^2} = \frac{9}{25}$, isto é, $P(FC) = 0,36$. Tal resultado de observação nos levou a supor que esses professores não associam o contexto geométrico com a probabilidade clássica, pelo fato, já mencionado, de que os livros didáticos pouco trabalham com probabilidade geométrica.

Durante a oficina houve muitas perguntas dos participantes, das quais destacamos as que versaram sobre probabilidade sob enfoque frequentista, possibilidades do uso de tecnologia no ensino de probabilidade, outros cálculos de probabilidade geométrica e indicações de trabalhos para os vários anos da educação básica para os conceitos probabilísticos envolvidos nessa oficina. Uma dúvida geral recaiu sobre o uso da planilha eletrônica e a partir de qual nível de escolaridade poderiam utilizá-la, já que eles mesmos haviam vivenciado alguma dificuldade em manipulá-la. O que nos pareceu bem claro é que o jogo e o uso da simulação parecem tê-los motivado, pois em todos os relatórios finais afirmaram que realizariam tal atividade com alunos a partir do nono ano.

A simulação parece ter despertado esses professores para as possibilidades de prática com seus alunos, mas reconhecem que o *applet* impõe certa dificuldade inicial para a visualização do *franc-carreau*, o que uma das duplas assim apontou no relatório final:

Dupla B: O espaço geométrico não é evidenciado (espaço útil considerado para a probabilidade), como simulação é um recurso válido, mas para melhor compreensão dos resultados é necessário a complementação gráfica do Excel. Não há visão da moeda na área de cada quadrado que demonstre a área máxima (útil) da probabilidade.

Os participantes discutiram a possibilidade de aplicar essa atividade com simulação do jogo *franc-carreau*, uso do *applet* e utilização de Excel para construir a planilha, e todos concordaram que a atividade poderia ser aplicada a alunos da educação básica, mas deixaram em seus relatos algumas observações sobre como aplicá-la, distinguindo alunos do ensino fundamental e do ensino médio. Segundo tais relatos:

- Alunos do ensino fundamental devem testar o lançamento da moeda em situações concretas antes de usar o *applet*. Sugerem a construção de um modelo físico com os quadrados e o uso de moeda para que primeiro compreendam o que significa o jogo *franc-carreau*, o conceito de probabilidade geométrica e a aleatoriedade; para que compreendam também a importância da reprodutibilidade do experimento, de modo a perceberem a visão frequentista para depois terem contato com a simulação com construção de planilhas Excel.
- No caso de simulação manual, sugerem que os alunos de uma classe façam várias simulações e depois, juntamente com o professor, consigam juntar os totais observados por cada aluno em uma única tabela para que percebam a estabilização. No entanto, acreditam que sem recursos computacionais a atividade demandaria maior trabalho e muito tempo para ser realizada, pois durante a oficina as estabilizações ocorreram em aproximadamente 2.000 lançamentos.

- Antes de ser-lhes apresentado o jogo *franc-carreau*, os alunos deveriam conhecer probabilidade geométrica, pois eles mesmos consideram que quase não se trabalha com esta perspectiva de aliar a probabilidade clássica com cálculos de áreas.

Nas sugestões que foram discutidas nesta oficina com professores, observamos a possibilidade de utilizar o jogo com situações concretas, visando trabalhar a probabilidade geométrica, assim como construir tabuleiro e utilizar moedas de 10 centavos, 50 centavos e um real, mantendo o mesmo quadrado de $15\text{ cm} \times 15\text{ cm}$, formado por nove quadrados de $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$. Eles acreditam que esta seria uma ótima atividade para alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Todos os relatos apontaram a atividade como propícia para discutir a probabilidade clássica aliada à probabilidade geométrica, tratadas pela visão frequentista, a qual permite perceber o caráter aleatório da probabilidade, com possibilidade de associar a construção de tabelas e gráficos estatísticos. No entanto os participantes expõem em seus relatos que o uso da tecnologia para desenvolvimento desses conceitos envolvidos na atividade lhes requereria prepará-la para poderem associá-la à realidade de seus alunos e para treinarem sua própria habilidade com as ferramentas antes de levarem-na à sala de aula.

De modo geral, esses professores consideram que as atividades que envolvem jogos são motivadoras tanto para alunos da educação básica quanto para os do ensino superior. Percebem que com o uso de tecnologia ocorre maior engajamento dos alunos na atividade. Tal consideração também nos remete a Borovcnik e Kapadia (2009), que não só consideram ser um desafio ensinar probabilidade a fim de capacitar os alunos a compreendê-la e aplicá-la, mas acreditam ser necessário haver foco na criação de abordagens à probabilidade que se mostrem mais acessíveis e motivadoras, além do fato de que o uso de tecnologia ajuda a reduzir cálculos técnicos e a focalizar o aprendiz nos conceitos.

Algumas considerações

A discussão sobre o desenvolvimento do letramento probabilístico e o papel da simulação computacional para viabilizar tal inserção da probabilidade no ensino de matemática suscitaram reflexões entre participantes de uma atividade realizada em oficina ministrada a professores da escola básica e do ensino superior com recurso computacional. A atividade mostrou-se propícia para reflexões sobre probabilidade clássica, frequentista e geométrica com uso do jogo *franc-carreau* e utilização de um *applet* e de planilha Excel para registrar e visualizar o estabelecimento da frequência de ocorrências obtidas com simulações. Realizar a atividade nesse ambiente ofereceu aos professores a oportunidade de organizarem e configurarem seus próprios conhecimentos e avaliarem os conceitos de probabilidade sob diferentes perspectivas, possibilitando o desenvolvimento de elementos do modelo de letramento probabilístico, nos termos propostos por Gal (2005).

Os professores conseguiram avançar em tal construção, apesar de dificuldades na manipulação da planilha Excel. Afirmaram conhecer e trabalhar com frequências relativas

acumuladas ao abordarem probabilidade frequentista com seus alunos. O uso do *applet* não foi problemático, em concordância com constatações de Biehler (1991) e de Batanero e Díaz (2007), mas a dificuldade em perceber a estabilização das frequências mostrou-se problemática, contrariando constatações de Ventsel (1962), o que foi uma consequência da dificuldade em lidar com Excel. O cálculo *a priori* da probabilidade não foi feito espontaneamente, embora as medidas dos quadrados tenham sido fornecidas pelas pesquisadoras, o que indica uma ausência de familiaridade com o uso articulado dos enfoques clássico e frequentista, em contraste com o observado por Coutinho (2001). As perspectivas que se abrem incluem o desenvolvimento de novas formações, mais longas, abordando os pontos aqui identificados como frágeis para o desenvolvimento do letramento probabilístico dos professores participantes.

Assim como Batanero, Contreras, Fernandes e Ojeda (2010), acreditamos que os professores precisam de apoio e formação para disporem de um equilíbrio entre intuição e rigor ao ensinarem probabilidade, embora, infelizmente, por restrições temporais, os professores nem sempre recebam em sua formação inicial um bom preparo para ensinarem probabilidade. No entanto, situações como a vivenciada na oficina podem servir para incrementar simultaneamente o conhecimento do professor sobre probabilidade e o conhecimento profissional, isto é, aumentar a possibilidade de que ele leve a suas salas de aula práticas como esta.

Cabe ressaltar, como aspecto positivo, que o ambiente computacional proporcionou aos participantes a oportunidade de observar situações para amostras maiores. Isso se deveu ao fato de que o elevado número de tentativas na simulação pôde transcorrer em curto tempo. Tais simulações envolvem a visualização necessária para estudar aspectos da aleatoriedade e da estabilização de frequências após um número suficientemente grande de repetições do experimento aleatório em problemas experimentais de probabilidade, o que nem sempre é possível alcançar em ambientes tradicionais de sala de aula. Além disso, as simulações contribuíram para a criação de ambiente para discussões em classe e em grupo.

Sugerimos que os professores conheçam a utilidade de materiais educacionais adequados aos diferentes métodos de ensino e os utilizem, visando promover maior eficácia no ensino e aprendizagem de probabilidade, e que isso possa ocorrer de maneira agradável e com divulgação de seus achados e conquistas. Frisamos a necessidade de mais pesquisas que permitam esclarecer os componentes essenciais da preparação dos professores para ensinarem probabilidade, bem como de estudos que possibilitem explicitar métodos adequados para o ensino de cada componente.

Referências

- Badizé M., Jacques A., Petitpas M., & Pichard J. F. (1996). *Le jeu du franc-carreau: une activité probabiliste au collège*. Rouen: IREM de Rouen.
- Batanero, C. B., Contreras, J. M., Díaz, C. & Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: un estudio con futuros profesores. *Revemat*, 8(1), 75-91.

Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p75>

- Batanero, C. & Diaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/PonenciaJAEM.pdf>
- Batanero, C., Contreras, J. M., Fernandes, J. A. & Ojeda, M. M. (2010). Paradoxical games as a didactic tool to train teachers in probability. In C. Reading (ed.), *Data and context in statistics education: towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Retirado em: 10 de fevereiro, 2019 de: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C105_BATANERO.pdf
- Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bernoulli J. (1713). *L'ars conjectandi*. Traduction de N. Meusnier, 1987). Rouen: IREM de Rouen et Université de Rouen Haute-Normandie.
- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In K. Kapadia, & M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 169-212). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Borovcnik, M. & Kapadia, R. (2009). Research and developments in probability education. *International Electronic Journal of Mathematics*, 4(3). Disponível em: www.iejme.com/032009/IEJME_p00_introd_E.pdf.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-116.
- Caberlim, C. C. L. (2015). *Letramento probabilístico no ensino médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos*. Dissertação de mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Retirado em 20 de março, 2019 de: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11028/1/Cristiane%20Candido%20Luz%20Caberlim.pdf>
- Carvalho, J. I. F. (2015). Conhecimentos de futuros professores de matemática sobre probabilidade condicional por meio do jogo das três fichas. In: J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. M. Gea, & M.M. López (eds.), *Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria*, 2 (pp. 189-196). Granada: Universidad de Granada.
- Carvalho, J. I. F., Silva, C. D. B. & Paraíba, T. S. (2016). Um estudo sobre probabilidade nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental: significados, representações e contextos. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação da Matemática*. São Paulo: ENEM. Retirado em 20 de setembro, 2019 de: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6224_2715_ID.pdf
- Coutinho, C. Q. S. (2001). *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Thèse de doctorat. Grenoble: Université Joseph Fourier.
- Coutinho, C. Q. S. (2013). Introdução ao conceito de probabilidade e os livros didáticos para ensino médio no Brasil. In A. Salcedo (ed.). *Educación estadística en América Latina: tendencias y perspectivas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/274961347_Educacion_Estadistica_America_Latina_Tendencias_Perspectivas

- Erdrich, N. (s.d.). *Simulation du jeu du franc-carreau*. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/zegKUvqP>
- Fernandes, J. A., Batanero, C. B., Contreras, J. M. G. & Díaz, C. B. (2009). *A simulação em probabilidades e estatística: potencialidades e limitações*. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/262818121_A_simulacao_em_Probabilidades_e_Estatistica_potencialidades_e_limitacoes.
- Fernandes, J. A., Correia, P. F. & Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9.º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 5-26.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.
- GeoGebra: aplicativos matemáticos. (s.d.) Disponível em: <https://www.geogebra.org/>
- Gürbüz, R. (2008). Olasılık konusunun öğretiminde kullanılabilecek bilgisayar destekli bir materyal [A computer-aided material for teaching 'probability' topic]. *Mehmet Akif Ersoy University Journal of Faculty of Education*, 8(15), 41-52.
- Koparan. T. & Kaleli Yılmaz. G. (2015). The effect of simulation-based learning on prospective teachers' inference skills in teaching probability. *Universal Journal of Educational Research*, 3(11), 775-786.
- Laplace P. S. (1814). *Essai philosophique sur les probabilités*. (5^e édition en 1825, réimprimée en 1985.) Paris: Christian Bourgeois éditeur.
- Lopes, J. M. (2007). Probabilidade condicional por meio da resolução de problemas. *Revista do Professor de Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática*, 62, 34-8.
- Mills, J. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: a review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 10(1). Disponível em: www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html
- Ministério da Educação (MEC). (1998). *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto.
- Ministério da Educação (MEC). (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.
- Perrin-Glorian, M. J. (2009). L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement: développement des ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (orgs.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, 1* (pp. 57-78), Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Rodrigues, M. R. (2018). *A urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de probabilidade*. Tese de doutorado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Retirado em 10 de agosto, 2019 de: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11197>

- Silva, C. & Cazorla, I. M. (2008). Registros de representação semiótica no ensino de probabilidade condicional e do teorema de Bayes. *Anais do 2.º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Recife: SIPEMAT. Retirado em 20 de setembro, 2019 de: <http://www.lematec.net.br/CDS/SIPEMAT08/artigos/CO-106.pdf>
- Silva, D. S. C. (2018). *Letramento estocástico: uma possível articulação entre os letramentos estatístico e probabilístico*. Dissertação de mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Retirado em 10 de agosto de 2019 de: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/21283>
- Ventsel, H. (1962). *Théorie des probabilités*. Moscou: Editora MIR.