DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

Desatando nós: desenvolvendo a visualização a partir de experimentos com cordas torcidas

Untying knots: developing visualization from twisted string experiments

José Carlos Pinto Leivas[1]

Carmen Vieira Mathias[2]

Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa de cunho qualitativo, cujo delineamento se enquadra no princípio estratégico por experimentos e quase experimentos, realizada no ano de 2019, com o objetivo de investigar como participantes de um grupo de estudos e pesquisa em Geometria interpreta intuitiva, imaginativa e criativamente nós obtidos por cordões ao serem soltos aleatoriamente sobre uma superfície plana. Por meio de uma análise retórica dos registros dos participantes do grupo, ante às atividades propostas, foi possível concluir que habilidades visuais podem ser exploradas tanto na formação inicial quanto em ação continuada com os participantes do grupo, partindo da imaginação e da intuição no levantamento de hipóteses. A partir de barbantes disponibilizados os participantes puderam comprovar ou rejeitar suas hipóteses. Concluímos que, mesmo conteúdos mais avançados, como homotopias junto à teoria de nós, podem ser exploradas em diversos níveis de ensino, o que pode ser um elemento facilitador não somente na formação geométrica dos indivíduos, como em outras áreas do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Teoria de Nós; Cordões; Geometria.

Abstract

This paper presents the results of a qualitative research, whose design fits the strategic principle experiments and quasi-experiments', carried out in 2019, with the aim of investigating how participants in a geometry research group would construe in a intuitive, imaginative and creative way 'knots' in ropes randomly dropped onto a flat surface. Through a rhetorical analysis of the group participants' records, taking into consideration the proposed activities, it was possible to conclude that visual skills can be explored in both initial and continuous action with the group participants, starting from the imagination and intuition when raising a hypothesis. Using the cords available the participants could prove or reject their hypotheses. We conclude that even more advanced content, such as homotopy alongside with knot theory, can be explored at different levels of education, which can be a facilitating element not only in geometry studies but also in different fields of mathematical knowledge.

Keywords: Knots theory; Ropes; Geometry.

Introdução e Justificativa

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria – GEPGEO, liderado pelo primeiro autor, vem buscando junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e

Submetido em: 27/10/2020 – **Aceito em**: 12/11/2022 – **Publicado em**: 30/12/2022

[1] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Professor da Universidade Franciscana, Brasil. E-mail: leivasjc@ufn.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

[2] Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Professora da Universidade Federal de Santa Maria, Brasil. E-mail: carmen@ufsm.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5667-159X

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

Matemática da Universidade Franciscana, alternativas teórico-metodológicas para o ensino e aprendizagem de Geometria nos diversos níveis de escolaridade. Entendemos que não basta desenvolver disciplinas de Geometria, quer na Licenciatura em Matemática, quer no Bacharelado ou, até mesmo, em ação continuada, que não estabeleçam conexões com o fazer escolar.

Ao ensinar Matemática em qualquer nível, é possível trabalhar com os alunos de forma diferente da tradicional. Uma das maneiras de fazê-lo é tentando realizar conexões com as intuições básicas que os alunos possuem. Esses vínculos podem ocorrer de duas formas. Na primeira, os alunos devem ser encorajados a conjecturar e produzir conhecimento matemático por conta própria, sem o auxílio de estratégias padrões ou via o professor. Uma segunda maneira de delinear o ensino de forma a promover conexões com o conhecimento preexistente, por meio do uso de materiais manipulativos e ou experimentações.

Segundo Fischbein (1987) a experiência tem um papel fundamental na formação das intuições porque, em certas circunstâncias, molda expectativas estáveis. Observa-se que, ao utilizarem de algum experimento em sala de aula, é permitido aos alunos contextualizar ou concretizar os conceitos abstratos e formar conexões com entes matemáticos de forma mais intuitiva.

Quanto ao ensino de Geometria, o mesmo autor afirma que a intuição, em conjunto com a visualização, é um dos principais componentes dos nossos esforços cognitivos.

> Parece que as qualidades formalmente baseadas de certeza, coerência, consistência, necessidade, etc., não possuem o mesmo tipo de capacidade estimulante, convincente e produtiva como a credibilidade intrínseca, a estruturalidade intrínseca e a riqueza dos fenômenos reais. É isso que o próprio Hilbert, um dos grandes fundadores da axiomática, afirmou claramente: "Quem nem sempre usa, juntamente com a dupla desigualdade a> b> c, a imagem de três pontos seguindo um ao outro em uma linha reta como a imagem geométrica da ideia de entre'"? (Fischbein, 1987, p.17).

Nesse sentido, observa-se que, em Matemática, o ditado popular: "uma imagem vale mais que mil palavras" é especialmente verdadeiro onde uma imagem ou algum outro tipo de experimento pode ser útil na descrição de uma ideia.

Com a conotação feita sobre visualização e experimentação, justificamos o presente artigo, em que partimos de Conway *et al*. (1991), que inicia explorando bicicletas, pedais e correias de uma forma muito intuitiva e criativa. A partir do mesmo, o GEPGEO o discutiu, analisou e realizou atividades, que tem como objetivo investigar como participantes de um grupo de estudo e pesquisa em Geometria interpreta intuitiva, imaginativa e criativamente nós obtidos por cordões ao serem soltos aleatoriamente sobre uma superfície plana.

Fundamentação teórica

Inicialmente, abordaremos neste item algumas considerações sobre criatividade e imaginação em Geometria para, em seguida, tratarmos sobre a ideia de nós. Granger (1998) já abordava criação imaginativa como experiência expressando que ela "não consiste num estado de visão passiva, mas de experiência ativa" (p.11). Isso levado ao ensino de Geometria

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

nos parece ser fundamental nas mudanças desejadas para essa área, especialmente por sua rejeição nos ambientes escolares e formação de professores como indicado por Leivas (2009). Por sua vez, o autor continua seu discurso da seguinte forma:

> [...] Mesmo nas matemáticas, o quantitativo de imaginário, foi introduzido por Descartes em sua Geometria, para designar as raízes da equação cúbica dita irredutível, as quais não podem ser calculadas pela fórmula de Cardano, pois exigiriam a extração de raízes quadradas de números complexos. Tais entidades não correspondem, portanto, a objetos da aritmética ordinária. Porém, a operação então possível faz sentido num novo sistema de objetos, os números complexos [...]. (Granger, 1998, p.11).

Invocando, ainda, Descartes, retomamos a imaginação criativa ao ampliar as dimensões dos entes geométricos euclidianos ponto, reta e espaço, perceptíveis ao mundo real, para dimensões maiores do que 3, existentes apenas no mundo das ideias, por meio de n-uplas ordenadas.

Anteriormente a isso, Hilbert e Cohn-Vossen (1999) associavam a Geometria com a imaginação da seguinte forma:

> [...] é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais. (p. iii)

A respeito do mundo das ideias, Leivas (2009) caracteriza imaginação “como uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou um esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outro tal conceito” (p.111). O autor vai além ao definir visualização “como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (Idem, p.111). Ao que tudo indica o autor vai ao encontro do preconizado por Hilbert e Cohn-Vossen, bem como Galton ao abordarem a imaginação criativa visual.

Quanto a influência da criatividade no ensino aprendizagem de Matemática, Sánchez Segura (2012) se questiona a respeito de utilizar a criatividade nessa disciplina. Em sua pesquisa, a autora afirma que “uma educação é criativa quando o professor que a realiza encoraja e energiza a classe para que todos investiguem e redescubram seus próprios conhecimentos, induz ações participativas dos estudantes, são eles que constroem seus conhecimentos a partir do conhecimento” (p.70).

Conforme Moreno e Azcárate (2003) os métodos tradicionais de ensino que envolvem definição, demonstração e atividades usando, em geral, problemas fechados com respostas predeterminadas, preparam os alunos de forma deficitária em Matemática. Os professores, ao

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

ensinar essa disciplina sem utilizar criatividade, não permitem que os estudantes apreciem sua beleza.

A respeito da mecanização excessiva no uso de fórmulas, Carvajal (1981) afirma ser necessário, dentre outros aspectos, exercitar a imaginação, estimular a atividade mental, não dando prioridade a técnicas de mecanização na aprendizagem e que essa tem sido a ocupação, durante muito tempo, no ensino do desenho, o que concordamos ser, ainda, presente no ensino da Matemática, em geral e, com maior intensidade no de Geometria, em que, quase que exclusivamente, é conhecida a Euclidiana tanto na Educação Básica quanto na formação de professores de Matemática.

Ao abordar sobre visualização, Cunningham (1991) se refere a essa habilidade, em sentido bem amplo, já na Grécia antiga, quando os geômetras esboçavam seus diagramas na areia. Para o autor, a Matemática começou a ir além das áreas intuitivas. No entanto, os recursos visuais eram tidos como fraquezas. Por exemplo, as deficiências na axiomática de Euclides apresentavam dificuldades de serem erradicadas uma vez que as figuras planas padronizadas tornavam os axiomas euclidianos auto evidentes. Para ele, "[...] restaurar o lado visual e intuitivo da matemática abre novas possibilidades para o trabalho matemático, especialmente agora que a computação tem poder suficiente para apoiá-la com representações precisas na resolução de problema e de suas soluções" (p.70). Indo um pouco mais além, Cunningham (idem) afirma que "[...] A adição de visualização à educação matemática promove a intuição e a compreensão e permite uma ampla gama de cobertura de assuntos de matemática. Mas ela fornece mais do que isso. "

Mas o que são nós? Obviamente, este questionamento, fora de qualquer contexto, pode levar a inúmeras respostas. É nosso interesse, especialmente, neste artigo abordar tal conceito em situação matemática e, mais diretamente nesta pesquisa, no ensino de Geometria, de forma visual, imaginativa e criativa, sem um aprofundamento matemático que, em nosso entender, não se aplica ao contexto que estamos trabalhando.

É um tema relacionado ao ramo da Topologia, talvez um dos mais complexos da Matemática, o qual não é geralmente abordado ou estudado em cursos de licenciatura dessa área e sim, em cursos de bacharelado, com vista a pesquisas nas áreas de Matemática Pura e Aplicada. Desempenha papel importante no estudo do Grupo Fundamental e nos Espaços de Recobrimento e, com isso, possibilidades de verificar quando dois ou mais espaços são homeomorfos, ou seja, encontrar uma função contínua, bijetora, com inversa contínua, que transforme um no outro. Nos cursos de licenciatura, isso pode ser explorado geometricamente, de forma simples, em disciplinas elementares de Cálculo Diferencial e Integral uma vez que é conteúdo dessa área o estudo de funções e continuidade, dentre outros. Podemos ilustrar isso no que segue.

Um intervalo fechado [a,b] de números reais não pode ser homeomorfo a um intervalo aberto (a,b), por exemplo, por não haver uma bijeção entre os dois. Uma forma é verificar que o primeiro é um conjunto compacto enquanto o segundo não, sendo esse um tema da disciplina de Análise Real, geralmente, constante do currículo da Licenciatura em

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

Matemática. Um segundo exemplo pode ser explorado em cursos de Álgebra, a inexistência de homeomorfismos entre a linha reta (R como conjunto numérico) e o plano (R^2 como conjunto de pares ordenados). Retirando um ponto do plano (um par em R^2 esse espaço permanece conexo enquanto retirando um ponto da reta (um elemento de R), fica desconexo, sendo assim os dois conjuntos não são homeomorfos.

Seja [0,1] o intervalo de números reais, X um conjunto qualquer e f: [0,1]→X uma função contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Segundo Munkres (1975), a função f é chamada um caminho de x_0 a x_1 em X. Um modo um pouco mais suave de abordar o assunto é por meio de diagramas planos, ou seja, iniciar por aquilo que se denomina caminhos. Se f e f' são dois caminhos em X, então existe uma relação mais forte ente eles do que a simples homotopia.

Se f e f' tiverem os mesmos pontos iniciais e finais, sendo I=[0,1] e se existir uma função contínua F: I X I → X de modo que F(s,0)=f(s) e F(s,1)=f'(s) , $F(0,t)=x_o$ e $F(1,t)=x_1$, $\forall s \in I$ e $\forall t \in I$, a função F é denominada de homotopia de caminhos (Figura 1).

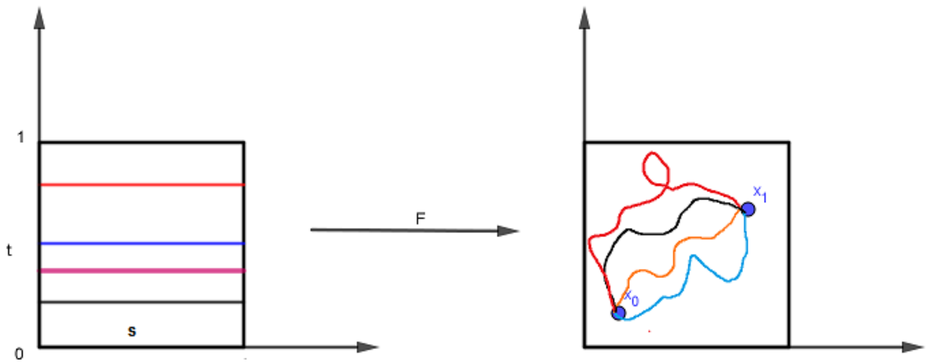

Figura 1 – Homotopia de caminhos.
Fonte: adaptada de Munkres (1975, p.319) pelos autores.

Sejam o espaço X tomado como R^2- (0,0), geometricamente, o plano perfurado e as funções f(s)= (cos(s), 2sen(s)), $s\in [0, \pi]$, a qual tem por representação gráfica uma semi-elipse no semiplano superior; g(s)= (cos(s), sen(s)), $s\in [0, \pi]$, cuja representação no semiplano superior é uma semicircunferência; e h (s) = (cos(s), -sen(s)), $s\in [0, \pi]$ que é a semicircunferência no semipleno inferior.

Na Figura 2, ilustramos as quatro representações dos caminhos. Nela observamos que f e g são caminhos homotópicos no R^2 - (0,0) bem como com o eixo vertical. Entretanto, o eixo vertical não representa um caminho homotópico com a semicircunferência no semiplano inferior dada por h(s) uma vez não haver imagem em R^2 - (0,0) para todos os pontos de tal eixo.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

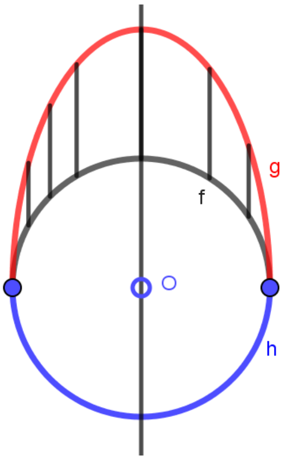

Figura 2 – Homotopia e não-homotopia no plano perfurado.

Fonte: adaptada de Munkres (1975, p.321) pelos autores.

De acordo com Conway *et al*. (1991) podemos pegar um cabo de extensão, e conectar uma extremidade à outra, o que irá produzir um laço (nó no sentido matemático). Isso leva a imaginar se será ou não possível desatá-lo sem desconectar ou romper o cabo. Outro ensaio intuitivo sobre laços (nós) pode ser feito utilizando uma corrente fina (colar de ornamentação para colocar ao redor do pescoço). Podemos soltá-la livremente em uma gaveta amontoada e, posteriormente, apanhá-la sem maiores cuidados e a colocar sobre uma mesa plana. Verificaremos que ela fica toda enrolada ou enredada quando tentamos a deixar em 'formato' representativo de uma curva plana fechada. O terceiro experimento consiste em tomar um cordão de aproximadamente 1m de comprimento e fazer o mesmo que o realizado com a corrente ou com o cabo.

Nesses experimentos práticos verificaremos que os laços (nós) obtidos podem ou não ser desfeitos e, no caso de o serem sem cortá-los ou cruzá-los consigo mesmo, são considerados 'falsos nós'. A isso chegamos a laços (nós) equivalentes, isto é, se for possível rearranjar um no outro sem cortar e sem permitir que um passe por ele mesmo ao que associamos, matematicamente, a homotopia dos caminhos (Figura 1).

No caso intuitivo experimental de soltar o cordão sobre a mesa, sobrepondo-se e, posteriormente, tentando reorganizá-lo, verificaremos o menor número possível de cruzamentos que ocorrerá com o cordão (Figura 3).

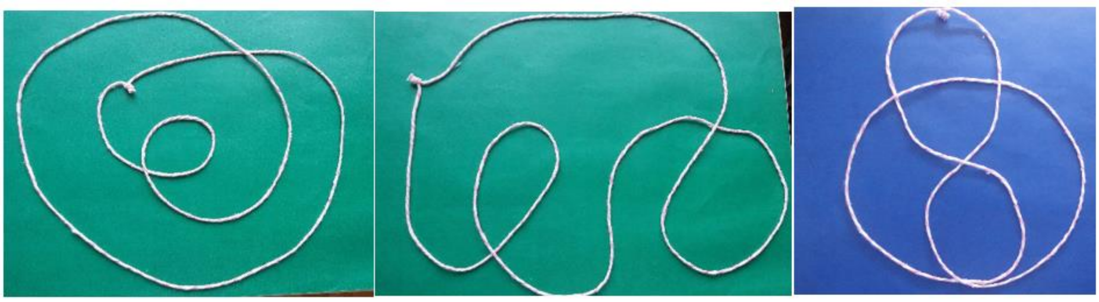

Figura 3 – Cordão se auto interceptando em dois pontos.
Fonte: acervo do GEPGEO.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

A partir dos aspectos experimentais, intuitivos e visuais ilustrando laços (nós e caminhos), no que segue, formalizamos o conceito. Munkres (1975, p.326) fornece a seguinte definição: "Seja X um espaço e x_0 um ponto de X. Um caminho em x_0 que começa e termina em x_0 é denominado um laço com base em x_0".

Procedimentos Metodológicos

No presente artigo temos como objetivo geral investigar como participantes de um grupo de estudo e pesquisa em Geometria interpreta intuitiva, imaginativa e criativamente 'nós' obtidos por cordões ao serem soltos aleatoriamente sobre uma superfície plana. Trata-se de uma pesquisa qualitativa cujo delineamento se enquadra no princípio estratégico 'por experimentos e quase experimentos' de acordo com Bauer e Gaskell (2015). No que diz respeito aos instrumentos de coleta de dados, consideramos a observação dos pesquisadores e a busca de documentos e, em relação ao tratamento analítico dos dados consistiu na análise retórica do discurso na perspectiva de Dittrich (2016). No que diz respeito aos interesses do conhecimento embasou-se na construção de consenso e a emancipação dos sujeitos da pesquisa. Esses quatro fatores indicado pelos autores são sintetizados na Tabela 1.

Tabela 1 – As quatro dimensões do processo de pesquisa

Princípios do delineamento	Geração de dados	Análise dos dados	Interesses do conhecimento
Experimento	Registros audiovisuais (fotos)	Análise de conteúdo	Emancipação e empoderamento

Fonte: adaptado de Bauer e Gaskell (2015, p.19)

Por ser um registro experimental, entendemos que coletar imagens dos experimentos realizados e, posteriormente, as analisar à luz da teoria, proporcionam possibilidades de interpretação do investigador in locus, o que se apresenta como possibilidades para um grupo de estudos. Para Penn (2015, p.319), "[...] a semiologia provê o analista com um conjunto de instrumentais conceptuais para uma abordagem sistemática dos sistemas de signos, a fim de descobrir como eles produzem sentido. Muito de sua precisão provém de uma série de distinções teóricas que são captadas através de um vocabulário específico".

Assim, explorar os registros fotográficos fornecidos por participantes do experimento e os respectivos em linguagem natural podem propiciar ao investigador interpretá-los com base nos fundamentos teóricos conceituais do tema em apreço.

No que diz respeito à análise do conteúdo, Bauer (2015, p. 189) afirma ser "apenas um método para analisar o texto dentro das ciências sociais empíricas" e, como afirma Barker (1964), o empirismo necessita da experiência, consistindo em ser experimental em lugar de racional e isso conduz ao método indutivo. Esse tipo de conhecimento necessita justificativas pela experiência, sendo este o foco principal do grupo de estudos e pesquisas em questão.

Participaram da atividade 10 indivíduos, professores de matemática, discentes de um programa de pós-graduação, que acompanham quinzenalmente as reuniões do grupo de

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

pesquisa. No início da atividade que durou cerca de quatro horas aula, os investigadores (autores do presente artigo) distribuíram, aleatoriamente, uma folha para registro de dados. Tais folhas continham duas atividades, as quais serão descritas e analisadas no próximo item e estavam identificadas com uma das letras: A, B, C, D, E, F, G, H, I e Y, não sequenciadas, a fim de que fossem preservadas as identidades dos participantes.

Como usar argumentações, narrativas, registros e comentários, cada atividade apresentava uma parte inicial com alternativas para serem escolhidas e uma segunda parte com a respectiva justificativa, além de registros fotográficos encaminhados ao pesquisador. Assim, teremos o corpus do texto da pesquisa, o que, para Bauer (2015, p. 192), “[...] é a representação e a expressão de uma comunidade que escreve. Sob esta luz, o resultado de uma análise de conteúdo é a variável dependente, a coisa a ser explicada”. No que segue faremos a análise dos dados da pesquisa.

Análise de dados

Inicialmente, utilizando projetor multimídia os investigadores disponibilizaram a imagem (figura 4) e indica para os estudantes visualizarem o nó nulo: circunferência fechada com zero nós e o nó de trevo: circunferência fechada com três nós e solicitaram que os mesmos indicassem na folha de registros fornecida a resposta ao quesito a seguir.

A B

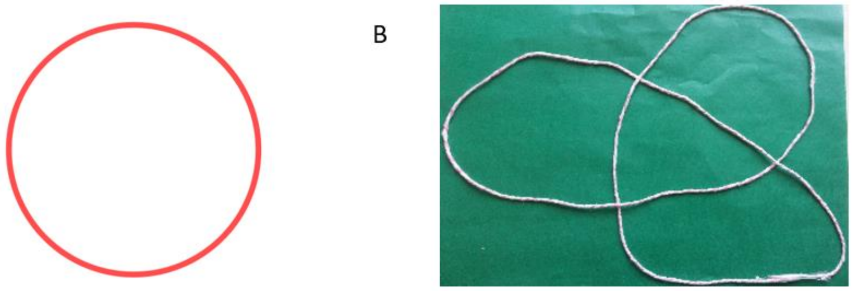

Figura 4 – Imagem projetada.
Fonte: acervo do grupo.

Foi então solicitado aos alunos que indicassem na folha de registo a resposta à seguinte questão.

Você consegue imaginar a transformação de um nó no outro sem romper a corda: ( ) sim ( ) não ( ) talvez ( ) nem imagino ( ) quero tentar

Essa atividade teve como objetivo verificar se os participantes da pesquisa elegeriam critérios para determinar se os nós apresentados eram ou não equivalentes.

Os dados coletados mostraram que nenhum dos participantes respondeu sim, talvez ou nem imagino ao primeiro questionamento (Gráfico 1). Um único participante respondeu somente não; seis responderam apenas quero tentar e os demais, num total de três, indicaram as duas opções: não e quero tentar.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

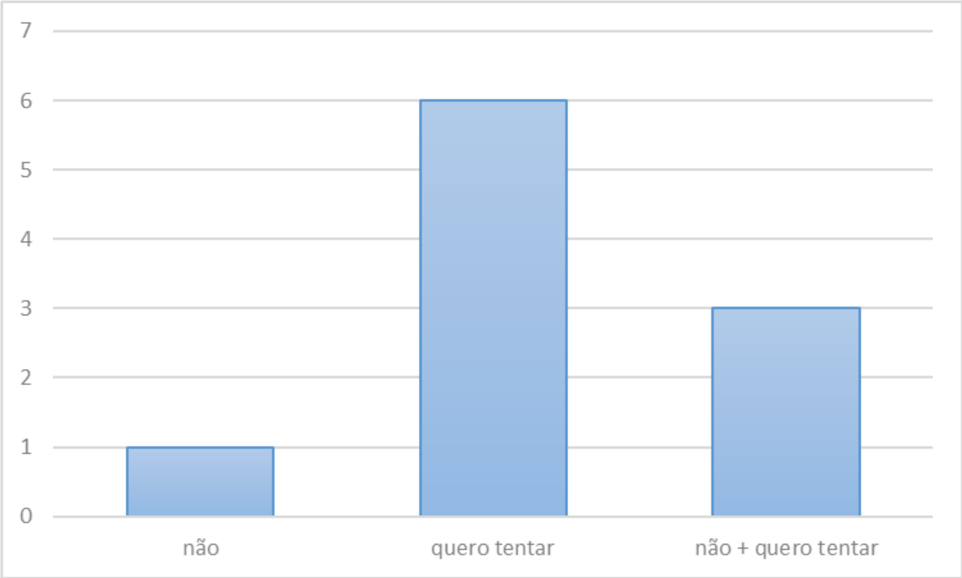

Gráfico 1 – Distribuição das respostas à primeira atividade.
Fonte: dados da pesquisa.

Na sequência, na mesma atividade, era solicitado o seguinte: se você também respondeu ‘quero tentar’ tome a corda fornecida pelo professor e confronte sua hipótese inicial. Observamos que a corda fornecida pelo professor, aparentemente, era uma corda trivial (Figura 4A). Porém, já existia um nó previamente feito. Dessa forma, os participantes deveriam tentar transformar o nó trevo (Figura 4B) no nó trivial, sem desamarrar a corda.

O indivíduo G que foi o único a responder somente não, assim se expressou:

G: *Quando o professor entregou a corda, ela possuía um nó, ou seja, ela não era circular (nó nulo), como foi possível criar o nó de trevo, temos que não será possível transformação de um para o outro sem o rompimento.*

Entre os que responderam não e quero tentar, encontramos os seguintes registros:

A: *Não foi possível realizar a transformação*.

D: *Imaginei que não seria possível, pois temos “nós” em “lados distintos” e ao tentar desatá-los, voltamos à situação “inicial”. Ou seja, ao desmanchar o “nó” por cima, ele fica “por baixo” e vice-versa*.

E: *[...] não existe essa possibilidade, já que as linhas do nó uma passa por cima e outra por baixo. Por tentativa e erro, chegou o ponto de ter um nó e outro por dentro. A seguinte figura confirmou minha hipótese (Figura 5).*

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

Figura 5 – Resposta do estudante E.
Fonte: dados da pesquisa.

Nesses registros, podemos observar que, mesmo sem conhecer a teoria dos nós, os participantes perceberam algo muito importante e bem fundamentado na literatura, os denominados movimentos de Reidemeister que são transformações (locais) de nós que transformam um em outro equivalente. Essas transformações são de 3 tipos, conforme ilustra a Figura 6.

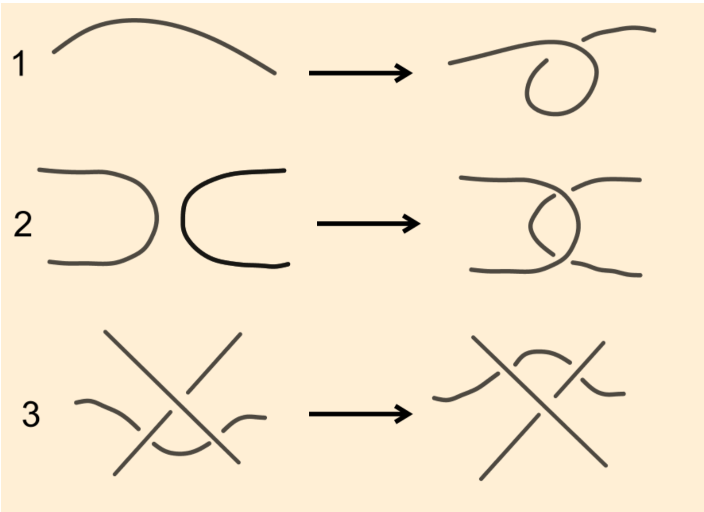

Figura 6 – movimentos de Reidemeister.
Fonte: os autores.

Os demais responderam apenas “quero tentar” sem arriscarem se imaginariam ou não.

B: *Ao movimentar a parte de cima a qual passa por cima, passamos pelas seguintes figuras* (Figura 7):

Figure 7 – Resposta do estudante B.
Fonte: dados da pesquisa.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

C: *Não foi possível desfazer o nó sem romper a corda*.

F: *Não consegui desfazer os nós, nem passando por cima, nem tentando distorcer. Volta sempre a posição inicial ou os nós se sobrepõem e ficam duas circunferências, ou fica um nó só e uma circunferência.*

H: *Somente consegui 'transformar' em dois círculos, sobrepostos, porém, não consegui fazer um com zero nós* (Figura 8).

Figure 8 – Resposta do estudante H.
Fonte: dados da pesquisa.

Observamos que todos os participantes tiveram o mesmo tipo de percepção. A essa podemos dar o nome de intuição, no sentido tratado por Hirza *et al*. (2014) que coloca a intuição como um esforço imediato, sem uso de referência e o resultado é considerado como uma verdade, de modo que a pessoa que usa sua intuição sente que não há necessidade de provar ou justificar seu pensamento. Nesse sentido é importante o conhecimento matemático e a justificativa para tais afirmações. Tal preocupação é refletida nos registros dos participantes I e Y.

I: *Creio que não é possível. Tínhamos que 'passar' a linha de cima para o outro lado, o que não é possível nesse nó*.

Y: *Acredito que é impossível desfazer o nó dessa maneira, pois em todas as tentativas voltei para o mesmo*.

Conforme Fischbein (1987, p.90), "a experiência, desempenha um papel fundamental na formação de nossas intuições e isso, explica, pelo menos parcialmente, seu impacto em qualquer empreendimento produtivo, teórico ou prático. Por outro lado, a experiência é sempre restrita a um sistema limitado de circunstâncias e isso contribui para limitar o domínio da confiabilidade e eficácia das intuições".

Esses participantes utilizaram as palavras "creio" e "acredito" em seus registros, o que mostra que apenas a intuição não foi suficiente para determinar a possibilidade de transformar um nó em outro. Porém, ao experimentar e visualizar, foram capazes de argumentar. Assim, a partir das informações e das discussões realizadas no grupo, foi possível perceber que, partindo das situações experimentadas, os participantes puderam intuir que era impossível desfazer o nó apenas rearranjando a corda. Ou seja, as discussões

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

corroboram com Janos (2009) ao afirmar que se tivermos um nó de trevo em uma corda, não será possível desfazê-lo, isto é, transformá-lo em um nó trivial. Porém, isso não necessariamente constitui uma prova de que estes dois nós não são topologicamente equivalentes, pois talvez não se tenha tido habilidade suficiente para transformar um nó em outro.

Observamos, nesse experimento, que o objetivo não foi provar a impossibilidade de transformar um nó em outro, mas objetivo verificar se os indivíduos elegeriam critérios para determinar se as duas curvas dadas eram ou não equivalentes. Após as discussões, chegamos a conclusão de que os nós não são equivalentes, pois apenas "cortando" a corda é possível transformar um nó no outro, como ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Transformação de nós.
Fonte: os autores.

Para provar que dois nós são topologicamente distintos é necessário, conforme Stewart (2012), encontrar certos invariantes, ou seja, propriedades que não se alteram com a equivalência. A primeira e mais simples dessas propriedades é a tricolorabilidade que permite distinguir o nó trivial do nó de trevo. Observamos que um nó é tricolorável se os arcos de seu diagrama puderem ser coloridos com exatamente 3 cores diferentes, de modo que cada interseção seja o encontro de 3 cores diferentes ou da mesma cor, conforme ilustrado na Figura 10. Obviamente, nós triviais são não tricoloráveis.

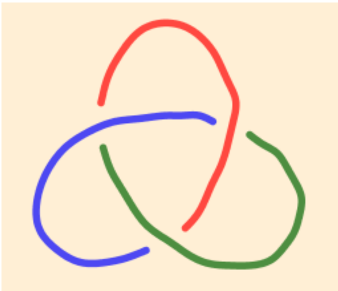

Figura 10 – tricolorabilide de nós.
Fonte: os autores.

Na segunda atividade, os investigadores fizeram novamente a projeção do nó de trevo com três nós e o nó de trevo invertido ou refletido: mesmo número de nós do de trevo (ou como denominado em topologia, *left-hand trefoil and right-hand trefoil*, chamado trevo destro e trevo canhoto).

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

De forma similar a atividade anterior, nessa experimentação o objetivo foi investigar se os participantes da pesquisa conseguiriam conjecturar/intuir se os nós apresentados seriam equivalentes. Salientamos que em nenhum momento foi apresentada aos participantes a denominação de nó invertido.

Solicitamos que os estudantes registrassem, na folha fornecida, resposta à seguinte pergunta com as alternativas, das quais podendo ser marcada mais do que uma.

Os nós representados (figura 11) são iguais?

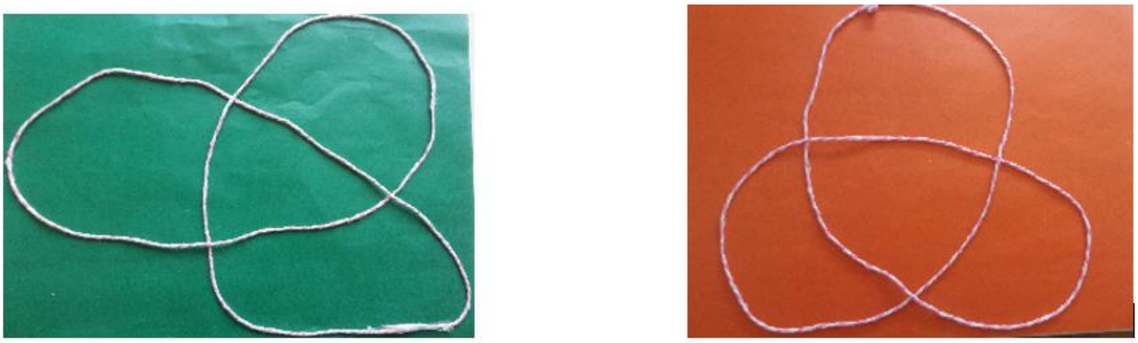

Figura 11 – Nós de trevo.
Fonte: dados da pesquisa.

( ) sim ( ) não ( ) talvez ( ) nem imagino ( ) quero tentar

O Gráfico 2 mostra a distribuição das respostas.

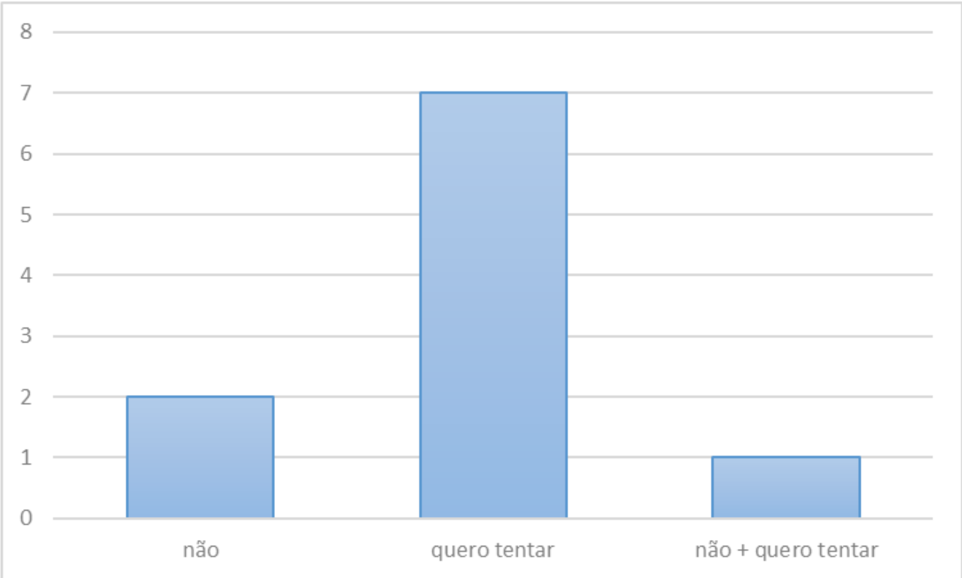

Chart 2 – distribuição das respostas à segunda atividade.
Fonte: dados da pesquisa.

Reiteramos o fato de que nenhum deles respondeu sim, a exemplo do que ocorrera na

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

atividade 1. Dois responderam apenas não, em contrapartida a um único na primeira e, um respondeu não e quero tentar, diferentemente do que ocorrera na primeira quando três deles haviam respondido dessa forma. Os demais responderam somente o quero tentar. A partir dessa resposta, era oferecida a solicitação a seguir.

Se você também respondeu 'quero tentar' tome a corda fornecida pelo professor e confronte sua hipótese inicial. O que resultou? É possível passar de um ao outro sem romper a corda?

O participante A, que respondeu 'não' e 'quero tentar', ofereceu as duas alternativas assim expressou-se da seguinte forma:

A: *Não foi possível realizar a transformação sem romper a corda.*

Não é possível perceber se essa participante não visualizou ou não intuiu o que aconteceria ou se ficou insegura em oferecer a resposta, uma vez que poderia explorar o recurso material para refletir sobre sua resposta. Os dois que responderam somente 'não' fizeram os seguintes registros:

D: *Como os 'nós' estão refletidos, ao tentar transformar um no outro, ocorreu o mesmo 'problema' que o anterior.*

G: *Os nós são contrários, numa mesma disposição, o nó que está por cima em um, fica por baixo no outro.*

Ao contrário da participante anterior, ao que tudo indica, os dois exploraram a visualização como construto mental (Leivas, 2009) e a intuição (Fischbein, 1987) para fornecer resposta aos investigadores.

Os demais, que optaram apenas pela alternativa quero tentar, se expressaram como segue.

B: *Ao movimentar a parte de um nó refletivo, temos as seguintes figuras e tanto por rotação ou translação, não chegamos à figura 2, logo não é possível transformar o nó refletido em nó de trevo (figura 12).*

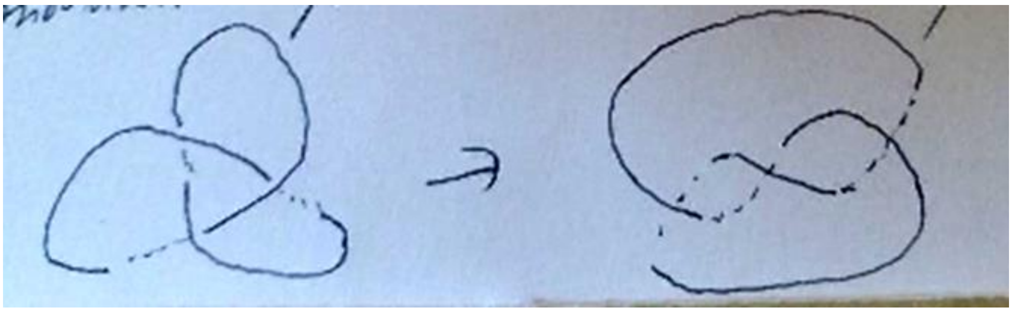

Figura 12– Resposta do estudante B.
Fonte: dados da pesquisa.

C: Novamente, não foi possível transformar o nó dois no nó zero. O nó 1 e o nó 2 são refletidos.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

E: Resultou na mesma estrutura do nó anterior, porém todos os nós são invertidos, usando de rotação, translação entre outros, os nós localizados no mesmo lugar do nó 1 e do nó 2, são sempre invertidos um do outro, não importando o jeito, a localização do outro.

F: A rosa parece ser a inversa da verde, mas não consigo passar de uma a outra, nem virando-a toda de trás para frente.

H: Não, ao que parece os nós são invertidos "horizontalmente".

I: Creio que não é possível.

Y: Eles são inversos, e também é impossível passar de um nó para o outro.

Percebemos, pois que a maioria dos estudantes optaram por explorar o recurso didático disponível para tirar suas conclusões e isso não significa que não intuíram a partir de habilidades visuais o que estaria ocorrendo. Nesse sentido, é importante que o investigador, em algumas situações também explorem o recurso da entrevista que pode vir a elucidar o pensamento do investigado.

Na realidade, existem dois nós de trevo, chamados de trevo destro e trevo canhoto, que são imagens de espelho um do outro, como ilustra a Figura 13.

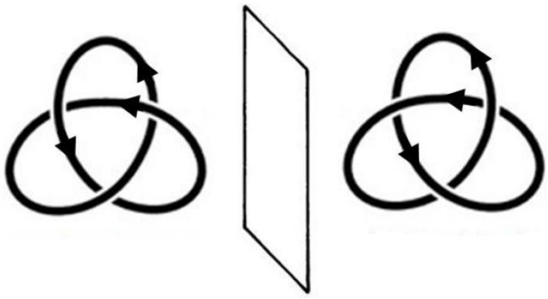

Figura 13– Nó destro e nó canhoto.
Fonte: os autores.

Foi demonstrado por Max Dehn, usando teoria de grupo em 1914, que os nós de trevo não são equivalentes uns aos outros.

Considerações finais

O presente artigo abordou uma pesquisa de cunho qualitativo, realizada junto a um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria com professores em ação continuada com o objetivo de investigar como seus participantes interpretam intuitiva, imaginativa e criativamente 'nós' obtidos por cordões ao serem soltos aleatoriamente sobre uma superfície plana.

Foram propostas atividades adaptadas de um texto de Conway *et al*. (1991) que exploravam 'nós' originados a partir da soltura de uma correia de bicicleta aleatoriamente após sua retirada da mesma. Havia no texto a exploração da geometria e imaginação ao que os autores do presente artigo incluíram a intuição.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

Inicialmente o grupo focou na própria correia e, posteriormente, utilizou barbantes como recursos didáticos na tentativa de buscar respostas aos questionamentos levantados. Além disso, fomos ao encontro de conceitos matemáticos envolvidos no processo o que nos conduziu à aspectos da teoria dos nós; aos caminhos oriundos da topologia; aos espaços homotópicos e à teoria de recobrimento. Entretanto, não entramos em aprofundamentos teóricos-matemáticos uma vez que se trata de uma investigação com professores que atuam nos diversos níveis de escolaridade. A intencionalidade foi adaptar atividades desses conteúdos mais avançados, nem sempre estudados na formação inicial, de uma forma que possam ser direcionados a níveis mais elementares de estudantes, por isso de forma exploratória intuitiva e visual.

Os resultados da investigação mostraram, inicialmente, que os indivíduos apresentam dificuldades de acreditarem na intuição como um processo que pode evidenciar conhecimento. Essa forma, entretanto, necessita de comprovação para o que a visualização pode vir a contribuir na medida em que as pessoas conseguir imaginar situações que podem ocorrer concretamente.

Dessa forma, inicialmente, era questionado se os mesmos tinham o construto mental (visualização) do que era indicado em certa situação; o que poderiam intuir (conjecturar) sobre o que haviam visualizado e, finalizando o processo, explorar o recurso didático fornecido pelos investigadores para comprovar ou rejeitar a hipótese levantada.

Os resultados mostraram que é possível explorar a criatividade e imaginação para desenvolver habilidades visuais, uma vez que o tema abordado, não é frequente de ser explorado na formação inicial do professor de matemática. Dessa forma, consideramos que o objetivo da pesquisa foi alcançado.

Referências

Barker, S. F. (1964). *Philosophy of mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall

Bauer, M. W., & Gaskell, G. (2015). *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático*. Rio de Janeiro: Editora Vozes Limitada.

Bauer, M. W. (2015). Análise de conteúdo clássica. In: *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático*, *3*, 189-217.

Conway, J., Doyle, P., Gilman, J., & Thurston, B. (1991). Geometry and the Imagination. *Lecture notes published on the WorldWideWeb*.

Carvajal, J. (1981): La creatividad en el dibujo geométrico. *Cuadernos de Pedagogia*, 77, 24-29.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. In *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Mathematical Association of America.

Dittrich, I. J. (2016). Análise retorica do discurso: reflexões teórico-metodológicas. *Revista Intersecções*, *9*(21), 46-65.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8661730

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* 5, 3-223. Springer Science & Business Media.

Granger, G. G. (1998). Imaginação Poética, Imaginação Científica. *Discurso*, 2, 7-14.

Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1999). *Geometry and the Imagination*. New York: Chelsea Publishing Company.

Hirza, B., Kusumah, Y. S., Darhim, D., & Zulkardi, Z. (2014). Improving intuition skills with realistic mathematics education. *Journal on Mathematics Education*, *5*(1), 27-34.

Janos, M. (2009). *Matemática e natureza*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Paraná: UFPR.

Munkres, J. R. (1975). *Topology: A First Course*. New Jersey: Prentice-Hall.

Moreno, M. M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(2), 265-280.

Penn, G. (2015). Análise semiótica de imagens paradas. *Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som*: um manual prático, *6*, 319-342. In: Brauer e Gaskel:

Segura, M. D. S. (2012). The influence of creativity in the learning of mathematics in childhood education. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *10*(2), 68-85.

Stewart, I. (2012). *Seventeen equations that changed the world*. London: Profile Books.