DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Abordagem covariacional de função: aspectos do ensino, aprendizagem e possibilidades das tecnologias digitais

Covariational approach to functions: aspects of teaching, learning and possibilities of digital technologies

César Thiago José da Silva [1]

Verônica Gitirana [2]

Resumo

A covariação envolve o foco em como as variáveis ou quantidades variam em conjunto. Este artigo descreve uma revisão sistemática de literatura que teve por objetivo analisar um quadro recente de pesquisas sobre a abordagem covariacional de função e as possibilidades das tecnologias digitais nessa perspectiva. Os dados foram coletados nas bases Periódicos Capes e Eric, resultando em 26 estudos, dos quais 11 envolveram o uso de tecnologias digitais. Os resultados apontaram: processos cognitivos e dificuldades de aprendizagem associadas ao raciocínio covariacional; especificidades da epistemologia de cada tipo de função; influências didáticas na abordagem de covariação, do currículo ao design de tarefas e o conhecimento de professores; e, por fim, aspectos das tecnologias digitais que podem dar suporte ou limitar o raciocínio covariacional.

Palavras-chave: Revisão Sistemática de Literatura; Funções; Covariação; Tecnologias digitais

Abstract

Covariation involves focusing on how variables or quantities vary together. This paper describes a systematic literature review that aimed to analyze recent research on the covariational approach to functions and the possibilities of digital technologies to support this approach. Data were collected on Periodicos Capes and Eric databases, resulting in 26 studies, 11 out of them involving digital technologies. The results showed: cognitive processes and learning difficulties associated with covariational reasoning; specificities of the epistemology of each function; didactic influences on the covariational approach, from curriculum to task design and teachers' knowledge; and finally, aspects of digital technologies that can support or limit covariational reasoning.

Keywords: Systematic Literature Review; Functions; Covariation; Digital technologies

Introdução

A perspectiva da covariação em função é caracterizada pelo foco em como variáveis ou quantidades variam em conjunto. A abordagem covariacional ganhou maior ênfase a partir dos trabalhos de Confrey e Smith (1994) sobre função exponencial e taxa de variação, e os de

---

Submetido em: 05/02/2021 – **Aceito em**: 10/11/2023 – **Publicado em**: 30/12/2023

[1] Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco, Brasil. Membro do Grupo de Estudos em Recursos para a Educação – GERE, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil. Email: cesarthiago.silva@gmail. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0203-8542

[2] PhD em Educação Matemática pela University of London, com Pós-doutorado pelo Institut Français de l'Éducation da ENS-Lyon. Professora titular na Universidade Federal de Pernambuco – Campus Agreste, Brasil. Email: veronica.gitirana@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2594-4203

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Thompson (1994) sobre como estudantes concebem relações entre quantidades cujos valores variam e a taxa de variação. A covariação é apontada como um aspecto crítico para a construção dos conceitos de função, taxa de variação, derivada, integrais, entre outros (Thompson & Carlson, 2017).

Contudo este aspecto parece ainda não ter o destaque apropriado na pesquisa e na sala de aula de matemática, principalmente no contexto brasileiro. A própria Base Nacional Comum Curricular[3] (Ministério da Educação, 2018) restringe-se a uma modesta referência à necessidade de desenvolver habilidades como as de compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas em situações contextualizadas de funções exponenciais e logarítmicas.

As tecnologias digitais têm sido apontadas como um importante suporte na aprendizagem de funções (Kaput, 1992; Ferrara, Pratt & Robutti, 2006; Lagrange, 2014). Kaput (1992) afirma que a mídia dinâmica computacional é a casa natural das variáveis, o que torna a representação da variação natural nesse meio. Essa e outras características sugerem que a abordagem covariacional, que privilegia a variação conjunta entre as variáveis, pode se beneficiar do suporte das tecnologias digitais.

Neste artigo, descrevemos um quadro das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de função com ênfase na ideia de covariação, no raciocínio covariacional e nas possibilidades das tecnologias digitais nessas perspectivas. A descrição deste quadro integrou uma pesquisa mais ampla que investigou os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional de estudantes (Silva, 2022); com isso, teve o papel de apontar aspectos relevantes da abordagem covariacional e contribuir para fundamentar o planejamento e a análise do experimento de ensino realizado com os participantes do estudo.

Nos baseamos em um modelo de revisão sistemática de literatura (Ramos, Faria & Faria; 2014) para responder às seguintes questões: (i) “Quais os aspectos envolvidos no ensino e na aprendizagem de funções sob uma perspectiva covariacional?” e (ii) “Quais as possibilidades, contribuições e limitações na abordagem covariacional por meio de tecnologias digitais apontadas nos estudos?”.

Nas seções que seguem, são descritos: um quadro da abordagem covariacional, suas ideias e desenvolvimentos teóricos; os aspectos metodológicos que orientaram a revisão sistemática; os resultados da revisão; e por fim, nas considerações finais, destacamos os principais resultados da revisão sistemática e perspectivas de investigação na abordagem covariacional.

Abordagem covariacional de função

Confrey e Smith (1994) descreveram duas abordagens gerais pelas quais relações funcionais podem ser conceitualizadas: correspondência e covariação. Enquanto a abordagem

[3] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define as aprendizagens a serem desenvolvidas pelos estudantes da Educação Básica no Brasil.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

de correspondência enfatiza a associação de um único valor de *x* com um único valor de *y* por meio de uma regra, a abordagem baseada na covariação implica “poder mover operacionalmente de y_m para y_{m+1} coordenando com o movimento de x_m para x_{m+1}”. (ibid, p. 33, tradução nossa). Em uma tabela, por exemplo, essa abordagem envolve poder “coordenar a variação nas colunas conforme move-se para cima ou para baixo na tabela.” (ibid, p. 33, tradução nossa).

Para eles, a abordagem de covariação é frequentemente mais poderosa que a abordagem de correspondência e dá visibilidade e centralidade ao conceito de taxa de variação, a qual os autores usam para caracterizar a função exponencial a partir da construção da ideia de uma unidade multiplicativa.

Já a abordagem de covariação de Thompson é baseada nos seus estudos sobre como estudantes concebem situações como compostas por quantidades e relações entre quantidades cujos valores variam e a taxa de variação. A noção de ‘quantidade’ é definida por ele como “a conceituação de alguém de um objeto, de modo que ele tenha um atributo que possa ser medido” (Thompson & Carlson, 2017, p. 425, tradução nossa). Com base nessa noção, o autor constrói a ideia de raciocínio quantitativo como uma conceitualização de uma situação em termos de quantidades e relações entre quantidades.

As noções de variação e covariação tornaram-se necessárias na Teoria do Raciocínio Quantitativo de Thompson, para “explicar o raciocínio de estudantes que conceituaram uma situação quantitativamente e, ao mesmo tempo, a consideraram dinâmica - eles imaginaram quantidades em sua situação conceitual como tendo valores que variavam” (Thompson & Carlson, 2017, p. 425, tradução nossa). Assim, na construção de Thompson, uma pessoa raciocina covariacionalmente “quando visualiza os valores de duas quantidades variando e os visualiza variando simultaneamente.” (p. 425, tradução nossa).

Além disso, segundo Saldanha e Thompson (1998), raciocinar covariacionalmente implica a concepção de um objeto multiplicativo, que segundo os autores é um objeto conceitual criado a partir da união mental dos atributos de duas quantidades:

> … nossa noção de covariação é de alguém que tem em mente uma imagem sustentada de dois valores de quantidades (magnitudes) simultaneamente. Isso implica unir as duas quantidades, de modo que, no entendimento de alguém, um objeto multiplicativo é formado pelas duas. Como um objeto multiplicativo, rastreia-se cada valor de uma quantidade com a percepção imediata, explícita e persistente de que, a cada momento, a outra quantidade também possui um valor. (Saldanha & Thompson, 1998, p. 299, tradução nossa)

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen e Hsu (2002) definiram o raciocínio covariacional como “as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades variáveis enquanto atendendo às formas como elas mudam uma em relação à outra.” (Carlson et al., 2002, p. 354, tradução nossa). Além disso, desenvolveram um quadro para analisar o raciocínio dos estudantes, estruturado em níveis de coordenação mental da variação das variáveis e com foco no conceito de taxa de variação.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Castillo-Garsow (2010, 2012) contribuiu teoricamente com o quadro do raciocínio covariacional ao descrever formas pelas quais é possível conceber a variação. Segundo o autor, os estudantes podem conceber o valor de uma quantidade variando de forma discreta ou contínua, e essa última pode ser distinguida entre variação contínua suave e variação contínua segmentada. Na variação suave se raciocina sobre a variação em termos de uma variação em progresso, já na variação segmentada, o estudante imagina essa variação ocorrendo por 'pedaços':

> Variação contínua segmentada é uma maneira de pensar semelhante a pensar que os valores variam discretamente, exceto pelo fato de o aluno ter uma imagem tácita de um continuum entre valores sucessivos (...) Essa imagem de variação é como colocar as réguas de ponta a ponta e marcar os pontos de extremidade. (Thompson & Carlson, 2017, p. 427, tradução nossa)

Thompson e Carlson (2017) revisitaram o quadro de raciocínio covariacional (Carlson et al,2002) e acrescentam as contribuições teóricas de Confrey e Smith (1994), Saldanha e Thompson (1998) e Castillo-Garsow (2010, 2012).

Quadro 1 – Níveis de raciocínio covariacional

Nível	Descrição
Covariação contínua suave	A pessoa imagina acréscimos ou decréscimos (de agora em diante, variações) no valor de uma quantidade ou variável (de agora em diante, variável) como acontecendo simultaneamente com variações no valor de outra variável, e imagina as duas variáveis variando suavemente e continuamente.
Covariação contínua segmentada	A pessoa visualiza variações no valor de uma variável como ocorrendo simultaneamente com as variações no valor de outra variável e visualiza ambas as variáveis em variação contínua segmentada.
Coordenação de valores	A pessoa coordena os valores de uma variável (x) com valores de outra variável (y) com a antecipação da criação de uma coleção discreta de pares (x, y).
Coordenação grosseira de valores	A pessoa forma uma imagem bruta dos valores das quantidades variando juntos, como "essa quantidade aumenta enquanto essa quantidade diminui". A pessoa não visualiza que valores individuais das quantidades andam juntos. Em vez disso, a pessoa visualiza um vínculo frouxo e não multiplicativo entre as mudanças gerais nos valores das duas quantidades.
Pré-coordenação de valores	A pessoa imagina que os valores de duas variáveis variam, mas de forma assíncrona - uma variável varia e a segunda variável varia, depois a primeira e assim por diante. A pessoa não antecipa criando pares de valores como objetos multiplicativos.
Sem coordenação	A pessoa não tem imagem de variáveis variando juntas. A pessoa foca na variação de uma ou outra variável sem coordenação de valores.

Fonte: Thompson e Carlson (2017, p. 441, tradução nossa)

Thompson e Carlson (2017) também apresentaram o que consideram um significado de função baseado em um raciocínio covariacional:

> Uma função, covariacionalmente, é uma concepção de duas quantidades variando simultaneamente, de modo que exista uma relação invariável entre seus valores que possui a propriedade de que, na concepção da pessoa, todo valor de uma quantidade

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

> determina exatamente um valor da outra. (Thompson & Carlson, 2017, p. 444, tradução nossa)

Nas seções seguintes, apresentamos e analisamos a revisão sistemática.

Aspectos metodológicos da revisão sistemática

Para realizar esta revisão sistemática tomou-se como base o modelo proposto por Ramos *et al.* (2014), que é operacionalizado de acordo com o seguinte protocolo:

(i) objetivos, que definem a problemática e o problema de pesquisa;

(ii) equações de pesquisa, que consistem dos termos da busca associados a operadores booleanos;

(iii) âmbito, que define as bases de busca, considerando suas especificidades;

(iv) critérios de inclusão, que definem características dos estudos que os qualifica como aceitáveis com base nos objetivos definidos na pesquisa;

(v) critérios de exclusão, que definem características dos estudos que os exclui dos resultados, com base nos objetivos definidos na pesquisa;

(vi) critérios de validade metodológica, que asseguram a objetividade da pesquisa;

(vii) resultados;

(viii) tratamento de dados.

Partiu-se inicialmente de um quadro mais geral de estudos sobre covariação, para em seguida fazer um recorte sobre aqueles estudos que envolveram o uso de tecnologias digitais pelos sujeitos. Foram coletados artigos de pesquisa entre os dias 10 e 20 de maio de 2019, em duas bases de dados: ERIC (Education Resources Information Center) e Portal de Periódicos Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Ambas as plataformas são bibliotecas digitais on-line que reúnem recursos e produções científicas a nível internacional.

As equações de busca foram baseadas na combinação “covariation OR covariational AND Mathematics Education” (traduzida em inglês, português e espanhol). Os critérios de inclusão e exclusão são descritos no quadro 2. A verificação dos critérios garantiu a validade metodológica da revisão.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Quadro 2 – Critérios de inclusão e exclusão

Critérios de inclusão	Critérios de exclusão
Artigos em periódicos revisados por pares, que abordam pesquisas na área da Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem de função na perspectiva da covariação	Inacessibilidade ou indisponibilidade do artigo no endereço de hospedagem
Período de publicação: 2014 a 2019	
Idiomas: português, inglês e espanhol	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Após a coleta, os estudos foram listados separadamente por base de dados e em seguida combinados em uma lista única de artigos, excluídas as duplicidades. Após isso, foi feita a leitura completa dos textos e posteriormente a análise.

Os resultados foram estruturados em duas partes, de forma a contemplar cada uma das questões de pesquisa. Foram categorizados dados gerais dos estudos como: ano de publicação, base de dados de origem, idioma, perfil dos sujeitos e objetivo do estudo. A primeira questão de pesquisa ("Quais os aspectos envolvidos no ensino e na aprendizagem de funções sob uma perspectiva covariacional?") foi subdividida nas seguintes questões específicas:

- Que aspectos cognitivos e dificuldades são apontados como importantes nos estudos sobre o raciocínio covariacional?
- Que aspectos epistemológicos das funções são destacados pelas pesquisas e quais as suas relações com o desenvolvimento do conceito de função por uma perspectiva covariacional?
- Que aspectos do ensino são apontados como tendo impacto na abordagem covariacional de funções?

Na segunda parte, os dados foram estruturados de forma a permitir uma análise das possibilidades das tecnologias digitais para uma perspectiva covariacional. Buscou-se responder à seguinte pergunta:

- Quais as possibilidades, contribuições e limitações na abordagem covariacional por meio de tecnologias digitais apontadas nos estudos?

Os estudos foram analisados com o objetivo de identificar-se especificamente como o uso das tecnologias digitais impactou os resultados. Esse impacto nem sempre se mostrou explícito nos textos, porque apesar de muitos deles envolverem o uso de tecnologias, não parecem ter considerado o seu papel como crítico na investigação. Nesses casos, analisou-se a discussão dos dados dos estudos e buscou-se identificar os momentos nos quais o uso das tecnologias e a análise desse uso foram explicitados pelos autores, de forma a construir uma análise do impacto das tecnologias nesses estudos.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Resultados

Os resultados são apresentados e discutidos nesta seção, com base nas perguntas da pesquisa e nos construtos teóricos da perspectiva covariacional de função.

Aspectos gerais dos estudos

Após a aplicação dos critérios de inclusão e exclusão, a pesquisa no ERIC resultou em 14 estudos, todos em inglês; a pesquisa no Portal da Capes resultou em 21 estudos, dos quais 20 em inglês e 1 em espanhol. A pesquisa em português não retornou resultados, o que sugere que a abordagem covariacional não teve a devida atenção da pesquisa brasileira até o período em que este estudo alcançou.

Excluindo-se as duplicidades de estudos nas duas bases, a revisão resultou em 26 estudos, dos quais 11 estudos envolveram o uso de tecnologias digitais pelos sujeitos das pesquisas. A tabela 1 detalha o processo de filtragem dos estudos de acordo com os critérios. A lista de estudos selecionados pode ser consultada no apêndice A.

Tabela 1 – Quantidade de estudos

Base	Total inicial	Excluídos (critérios inclusão)	Excluídos (critério exclusão)	Total	Total unificado	Uso de tec. digitais
CAPES	25	3	1	21	26	11
ERIC	49	31	4	14		

Fonte: Elaborada pelos autores.

Ao analisar e categorizar os objetivos de pesquisa dos estudos, foi encontrado que a maioria deles investigou como conceitos relacionados à função são construídos pelos sujeitos e o papel da covariação nessa construção. Outra parte considerável dos estudos analisou ou caracterizou aspectos do raciocínio covariacional em si e apenas dois estudos tiveram por objetivo investigar potencialidades de tecnologias para abordar covariação. O gráfico 1 representa essa categorização:

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

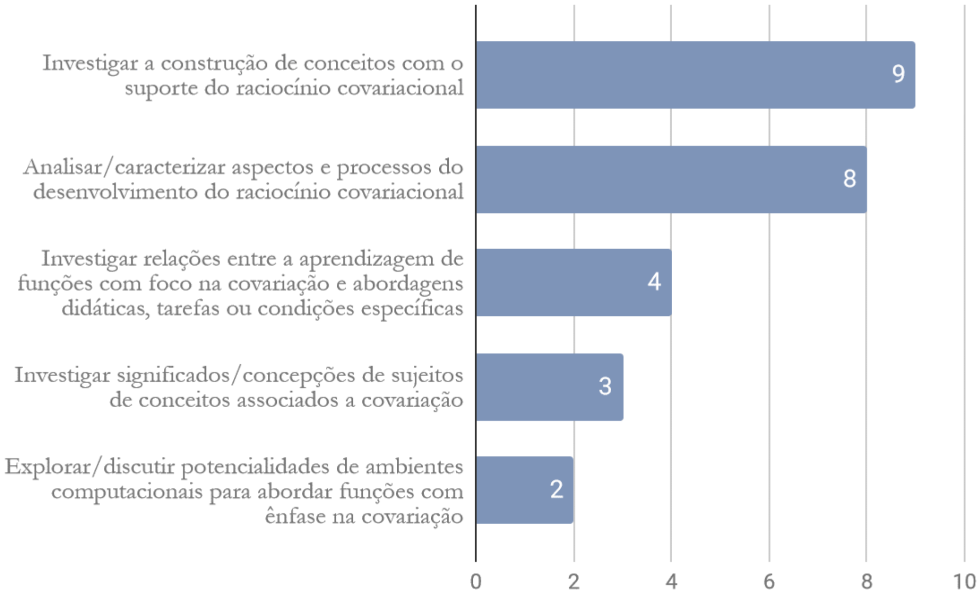

Gráfico 1 - Quantidade de estudos por categorias de objetivos

Fonte: Elaborado pelos autores

O gráfico 2 aponta os perfis dos sujeitos envolvidos nos estudos, que foram estudantes e professores. Os estudantes foram distinguidos pelo nível de ensino: secundário e superior. O ensino secundário, de uma forma geral corresponde à fase que abrange por volta do dos 11 aos 18 anos de idade em diversos países. A maior parte dos estudos em covariação foi aplicada com estudantes do Ensino Secundário, na sua maior parte, dos anos finais. Entre os estudantes do Ensino Superior, dos nove estudos, três foram com estudantes de cursos de formação inicial de professores de Matemática e os demais com outros cursos que incluem as disciplinas de Cálculo ou Pré-Cálculo na grade curricular. Os estudos com professores incluem dois envolvendo professores em prática e um envolvendo professores na pós-graduação.

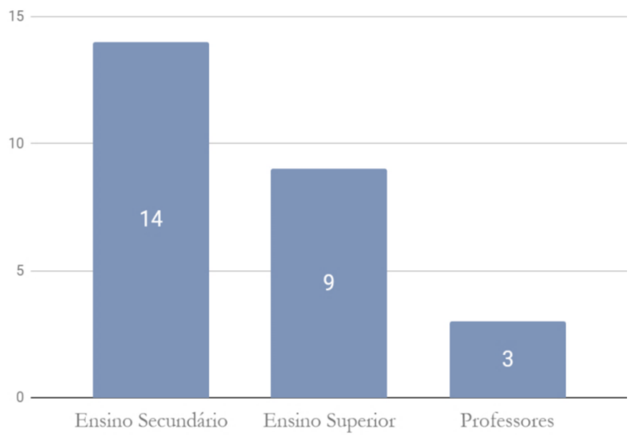

Gráfico 2 – Perfis dos sujeitos das pesquisas

Fonte: Elaborado pelos autores

Nas seções seguintes, aprofundamos a análise e a discussão sobre os aspectos

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

envolvidos na abordagem de funções sob uma perspectiva covariacional e, posteriormente, abordamos a contribuição das tecnologias digitais nessa perspectiva.

Aspectos cognitivos envolvidos na abordagem covariacional de função

Os resultados reportam a importância de processos e suportes cognitivos para o raciocínio covariacional, como a criação de objetos multiplicativos, a quantificação e o uso de imagens suaves de variação. Já as dificuldades associadas à covariação são relacionadas a: quantificar a variação, conceber a variação e a forma como variáveis/quantidades variam entre si, modelar relações funcionais covariacionalmente e, representar e interpretar a covariação em diferentes registros de representação.

A quantificação é essencial para o raciocínio quantitativo e covariacional (Thompson, 1994; Thompson & Carlson, 2017), esse processo envolve a conceitualização de um objeto, tal que ele tenha um atributo que possa ser medido. Os estudos E2, E11 e E17 apontaram a importância de conceber os atributos como coisas capazes de variar e possíveis de medir, para um raciocínio covariacional efetivo.

No estudo E2, Johnson e McClintock (2018) investigaram as condições que estimulam o discernimento de estudantes quanto à variação variável. Nessa investigação, os estudantes exploraram relações funcionais entre o comprimento e a área de figuras planas, nas quais havia situações de variação no aumento ou decréscimo das variáveis (ex.: aumento "decrescente"), os autores concluíram que os alunos que discerniram essa variação haviam concebido as quantidades envolvidas como possíveis de medir (quantificação) e variar. Já no estudo E17, Moore (2014) caracterizou o progresso de um estudante de Pré-Cálculo ao explorar a medida do ângulo e as funções trigonométricas. O autor considerou que a quantificação da medida do ângulo foi um trampolim crítico para um aluno raciocinar covariacionalmente na abordagem da função seno.

Outro processo apontado como importante é a criação de um objeto multiplicativo dos atributos das quantidades em covariação (Saldanha & Thompson, 1998). No estudo E9, Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua e Byerley (2017) investigaram o raciocínio covariacional de 487 professores, que após assistirem a uma animação dinâmica mostrando valores de duas magnitudes variáveis, foram solicitados a esboçar um gráfico que expressasse a relação entre ambas. Um dos resultados do estudo foi o de que os professores que criaram objetos multiplicativos dos valores das duas quantidades construíram os gráficos mais precisos.

O uso de imagens suaves de variação (Castillo-Garsow, 2012; Thompson & Carlson, 2017) foi apontado como importante nos estudos E11 e E19 para fomentar o raciocínio covariacional e dar suporte aos estudantes no discernimento da variação na intensidade da variação (figura 1). Em E11, Johnson, McClintock e Hornbein (2017) analisaram como o raciocínio covariacional de um estudante em uma tarefa envolvendo uma situação de roda-gigante influenciou o seu raciocínio covariacional em uma tarefa envolvendo o enchimento de garrafas. Já em E19, Johnson (2015) investigou o processo de quantificação de proporção e taxa de estudantes do ensino médio.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

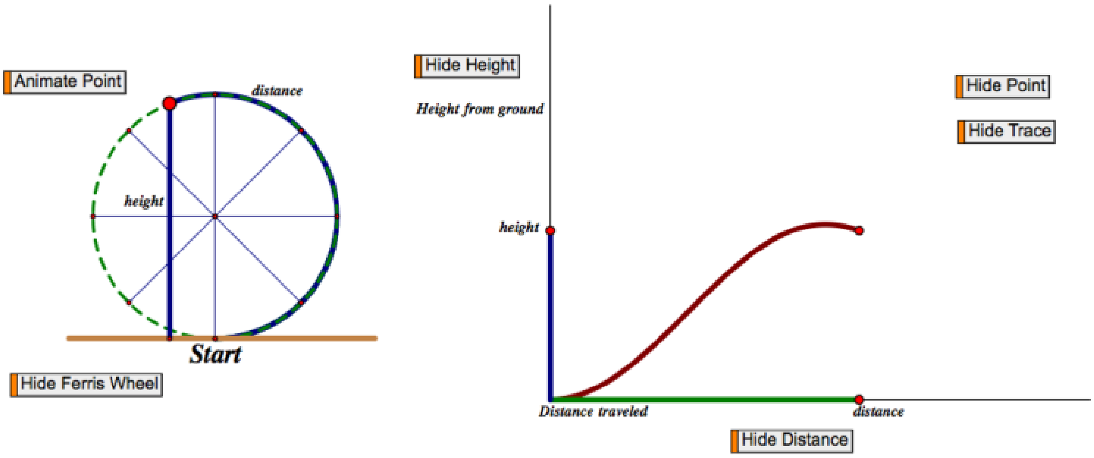

Figura 1 – Uma tarefa do estudo E11 envolvendo variação na intensidade da variação na relação funcional entre a distância percorrida em uma roda gigante e a altura relativa.
Fonte: Johnson, McClintock and Hornbein (2017, p.854)

As concepções dos estudantes de conceitos relacionados à covariação também podem estar relacionadas a um raciocínio covariacional mais consistente ou não. O conceito de razão foi apontado nos estudos E19 e E25 como tendo um papel importante na concepção dos estudantes de taxa de variação e em como eles utilizam esse conceito para raciocinar covariacionalmente. No estudo E25, Johnson (2015) investigou como os estudantes raciocinaram sobre quantidades envolvidas na taxa de variação ao trabalharem em tarefas que envolvem representações de quantidades em covariação.

Já os equívocos matemáticos nas concepções de limites tiveram um papel limitador para o raciocínio covariacional de estudantes nas pesquisas E5 e E23. No estudo E5, Jones (2015) examinou o raciocínio de estudantes de Cálculo com relação a limites no infinito e limites infinitos. Já no estudo E23, Nagle, Tracy, Adams e Scutella (2017) investigaram a construção do entendimento intuitivo de estudantes sobre limite como um valor previsto de uma função.

Com relação às dificuldades dos sujeitos em covariação (questão 2), a dificuldade em quantificar a variação apareceu nos estudos E1, E4 e E17 como uma limitação ao raciocínio covariacional, pois embora visualizassem a variação, os estudantes não conseguiam quantificar a forma como ela ocorria.

No estudo E4, Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan e Amidon (2016) investigaram o entendimento de estudantes de crescimento exponencial no contexto de quantidades em covariação. Os estudantes exploraram uma simulação computacional envolvendo uma planta cuja altura crescia exponencialmente em função do tempo. No início do experimento, embora os alunos descrevessem qualitativamente o crescimento exponencial, não conseguiam quantificar a maneira como a planta crescia. Já no estudo E1, Lagrange (2014) discutiu a contribuição de ambientes de software com características dinâmicas para o aprendizado de funções, ao analisar as interações de estudantes que exploraram a covariação em um

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

software, o autor apontou que alguns estudantes percebiam a variação, mas não entendiam que ela poderia ser quantificada.

Outra dificuldade apontada nos estudos realizados foi a incapacidade de relacionar a variação de uma variável com a variação em outra variável. O estudo E23 investigou a compreensão de limite de estudantes de Cálculo e apontou que muitos estudantes descreviam os valores em uma variável aproximando-se mais e mais de um valor específico, mas não descreviam o 'movimento' correspondente nos valores da outra variável. No estudo E7, Aranda e Callejo (2017), investigaram a construção do conceito de função integral por estudantes do ensino médio com o uso de um *applet*. Tanto em E7 quanto em E4, os estudantes não conectaram o crescimento na variável dependente com o crescimento na variável independente nas funções exponencial e integral.

Nos estudos E1 e E13, que investigaram o uso de ambientes computacionais para o ensino e aprendizagem de funções (Lagrange, 2014; Lagrange & Psycharis, 2014), os alunos tiveram dificuldades na identificação das variáveis que estavam em covariação na modelagem de relações funcionais em softwares.

A interpretação de gráficos de funções por uma visão covariacional também é problemática, tanto para estudantes quanto para professores em formação inicial. O estudo E17, ao analisar o raciocínio quantitativo de estudantes de Pré-Cálculo na função seno, apontou que, no início do experimento, eles interpretaram o gráfico com base em aspectos não-quantitativos, da forma e dos movimentos físicos envolvidos na situação, sem levar em conta a variação conjunta das variáveis envolvidas: "para os alunos, o gráfico era suave porque o percurso era suave tanto em movimento quanto em forma." (Moore, 2014, p.26, tradução nossa). Também foi apontada a dificuldade em interpretar o comportamento da taxa de variação a partir do gráfico da função.

No estudo E16, Yemen-Karpuzcu, Ulusoy e Işıksal-Bostan (2017) investigaram as habilidades em raciocínio covariacional de futuros professores de matemática em uma tarefa sobre eventos funcionais dinâmicos. Tanto em E16 como em E15, os sujeitos interpretaram os gráficos incluindo uma variável independente "tempo" em situações nas quais essa quantidade não estava envolvida, como gráficos de volume em função da altura.

Algumas dificuldades estão ligadas à representação da covariação. No estudo E21, Habre (2017) investigou como estudantes coordenaram a covariação no sistema de coordenadas polares com a covariação no sistema cartesiano (figura 2), os resultados mostraram que os modos de pensar dos estudantes sobre gráficos estavam enraizados no sistema cartesiano, o que dificultou uma intepretação covariacional no sistema polar, principalmente em situações com distâncias radiais negativas.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

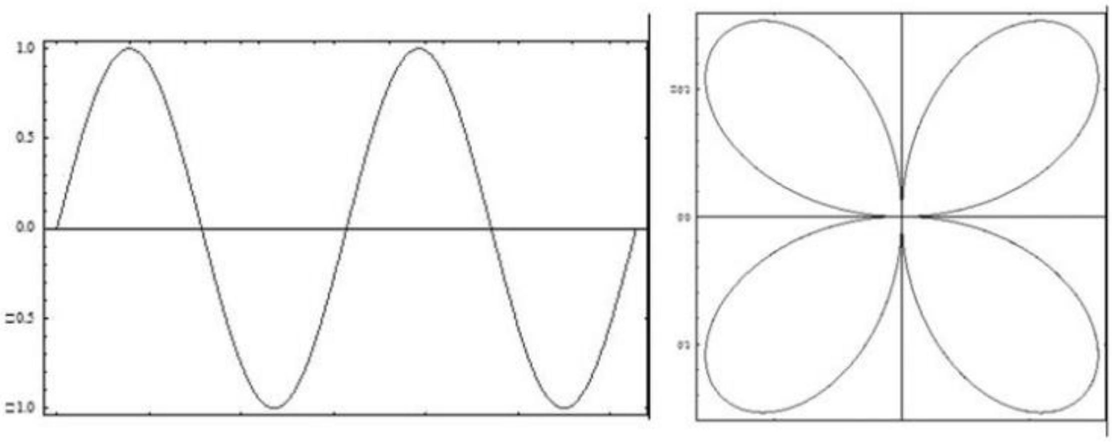

Figura 2 – Gráficos de y = sen (2*x*) e de r = sen (2*θ*)

Fonte: Adaptado de Habre (2017, p. 61)

Raciocinar covariacionalmente a partir de um modelo algébrico ou fórmula também foi apontado como um desafio. No estudo E3, Jones (2017) investigou as formas de entender e de pensar de estudantes do Ensino Superior sobre as derivadas aplicadas em contextos não-cinemáticos. O autor mostrou que estudantes interpretaram expressões da taxa de variação e da derivada pensando nelas como montantes para a quantidade original, como, interpretar $dF/fm = GM/r^2$ como se fosse $F = GM/r^2$. Mesmo aquelas expressões que não envolviam uma equação foram interpretadas como representando um montante e não uma taxa de variação ou uma expressão que define uma relação entre as variáveis.

Aspectos epistemológicos das funções e covariação

Os diferentes tipos de função têm diferentes aspectos covariacionais ligados à sua epistemologia matemática. Alguns estudos mostraram a necessidade de se levar em conta características intrínsecas à cada função para uma compreensão covariacional e que há dificuldades intimamente relacionadas a essas características.

O estudo E4 abordou o raciocínio de estudantes sobre o crescimento exponencial e mostrou que uma imagem desse crescimento como "multiplicações repetidas" e limitado a pequenos intervalos na reta dificultou a generalização para intervalos arbitrariamente grandes ou pequenos, embora essa forma de raciocinar esteja naturalmente relacionada à forma como a função exponencial é definida. Os autores apontam que a evolução no raciocínio covariacional dos estudantes iniciou com a mudança das imagens de repetição multiplicativa para uma capacidade de coordenar a razão de valores de y para variações em x por múltiplas unidades, um processo de reunitização, também apontado como fundamental por Confrey e Smith (1994).

Com relação às funções trigonométricas, o estudo E17 chama atenção para a necessidade do raciocínio covariacional não ser apoiado apenas numericamente, visto que essas funções não podem ser calculadas por operações aritméticas. O autor apontou a quantificação da medida do ângulo como um trampolim crítico para uma abordagem covariacional da função seno. (Figura 3).

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

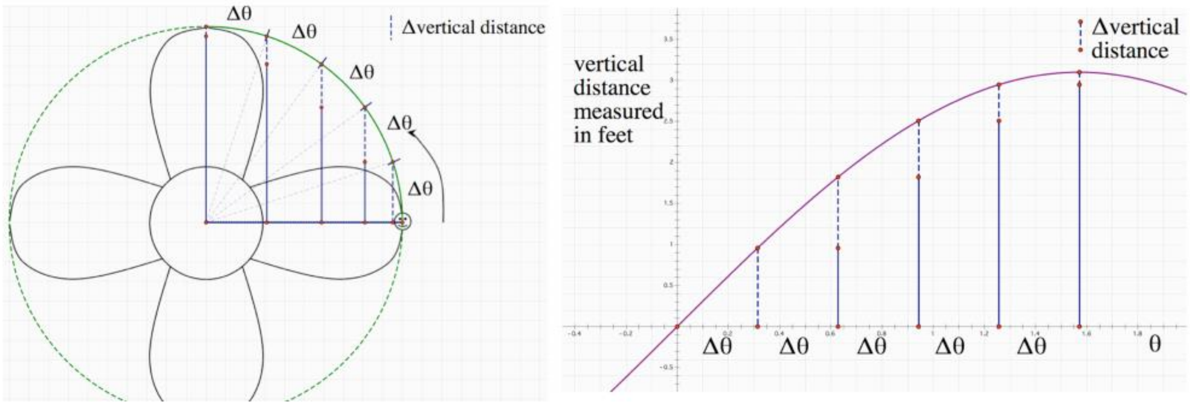

Figura 3 – Representação da covariação no problema do ventilador (estudo E17)

Fonte: (Moore, 2014, p.11)

As funções polinomiais têm um padrão de variação relacionado entre si (Lima et al, 2005). No estudo E20, Hohensee (2016) pesquisou como alunos perceberam aspectos covariacionais na função afim após uma instrução sobre a função quadrática. Os resultados mostraram que a maioria dos estudantes percebeu a caracterização covariacional na função linear após ter percebido a covariação na função quadrática. O autor concluiu que, em certas condições, 'perceber' aspectos em novos conceitos (no caso, taxa de variação na função quadrática) pode influenciar 'perceber' os mesmos aspectos em conceitos previamente encontrados (no caso, taxa de variação na função afim).

Os aspectos epistemológicos destacados mostram que há características importantes para uma compreensão covariacional que precisam ser levadas em consideração nessa perspectiva de função.

O ensino de funções por uma abordagem covariacional

No contexto do ensino, estudos revelaram influências das escolhas e aspectos didáticos no desenvolvimento do raciocínio covariacional.

Os estudos E6, E9 e E15 mostram como diferentes contextos pedagógicos e currículos influenciam nas diferenças entre estratégias, erros e concepções de estudantes e professores. No estudo E6, Watson, Ayalon e Lerman (2018) analisaram como conceitos importantes para entender funções são desenvolvidos em estudantes de dois contextos curriculares: Inglaterra e Israel. Nos dois contextos nacionais diferentes, um currículo de abordagem mais intuitiva e outro de abordagem mais formal de função foram relacionados com as diferentes estratégias de estudantes ao resolverem problemas com foco na covariação. No primeiro contexto, houve mais intuição sobre variabilidade, enquanto no segundo, houve maior êxito em generalizações por meio de uma expressão algébrica e na abordagem de correspondência.

O design das tarefas foi apontado como diretamente relacionado a um raciocínio covariacional mais explícito e efetivo nos estudos E2, E4, E6, E11, E12, E14 e E15. Em E12, essa relação foi apontada por Ayalon, Watson e Lerman (2015) em uma investigação das formas nas quais estudantes lidam com dados de sequências lineares e as relações entre esses dados e o *design* das tarefas. Tal relação também foi apontada em E14 por Wilkie e Ayalon

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

(2018), que investigaram evidências do pensamento funcional sobre funções afim em estudantes do ensino secundário em diferentes contextos e representações.

O estudo E6 aponta que experiências de tarefas escolares e as formas nas quais elas são apresentadas podem ter um efeito determinante no uso de um raciocínio baseado em covariação ou correspondência. Estudos também apontaram a necessidade de integrar diferentes representações (E1, E5, E7 e E13) e usar diferentes contextos (E3 e E13) para abordar função por uma perspectiva covariacional.

As pesquisas relacionadas ao conhecimento matemático e aos significados de professores em prática e em formação inicial mostraram que as dificuldades enfrentadas por eles são semelhantes às dos estudantes, o que aponta um ciclo problemático no ensino da covariação.

Foram relatados problemas com os significados atribuídos por professores a conceitos centrais como taxa de variação e com a interpretação de gráficos de funções covariacionalmente. No estudo E26, Musgrave e Carlson (2017) investigaram os significados matemáticos de estudantes de pós-graduação para a ideia de taxa de variação média; no estudo E18, Byerley e Thompson (2017) investigaram o significado de 251 professores do ensino médio para inclinação, medida e taxa de variação; já no estudo E10, Zengin (2018) investigou como 33 estudantes da formação inicial de professores construíram a relação entre conceitos de diferencial e derivada. Estes três estudos (E26, E10 e E18) mostraram significados frágeis e limitados de professores para taxa de variação, como "computar" um valor ou com significados ligados à velocidade.

O estudo E16 mostrou que professores podem interpretar gráficos de funções pela forma do gráfico, sem referência a como as variáveis variam, além de terem problemas para interpretar o papel de cada variável e incluírem o tempo como variável, mesmo em relações nas quais a variável tempo não está envolvida. Já o estudo E10 mostrou casos nos quais professores em formação inicial, ao explorarem relações entre os conceitos de diferencial, derivada, tangente e inclinação, interpretaram pontos e retas tangentes ao gráfico atribuindo movimento aos objetos em si: "a secante se torna tangente", revelando um significado equivocado de variável.

De forma geral, os estudos com foco em aspectos didáticos mostraram diversas variáveis envolvidas na abordagem covariacional e como dificuldades dos estudantes podem ter sua raiz nas escolhas didáticas ou nas concepções equivocadas dos professores, o que pode apontar para limitações da formação de professores para lidar com a abordagem da covariação.

O papel e as possibilidades das tecnologias digitais para uma abordagem covariacional

Para abordar a questão: "Quais as possibilidades, contribuições e limitações das tecnologias digitais na abordagem covariacional apontadas nas pesquisas?", foi feito um recorte nos resultados, que incluiu apenas os 11 estudos com o uso de tecnologias digitais (tabela 1).

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Uma consideração inicial é que, mesmo nesses 11 estudos, não necessariamente a tecnologia digital foi objeto da pesquisa ou um elemento central nas análises. Menos da metade (cinco) desses estudos citam as tecnologias no título ou no resumo do artigo e, apenas 2 estudos tiveram as tecnologias em si como foco principal nos seus objetivos, o que revela uma possível visão da tecnologia como mera coadjuvante na construção do conhecimento.

Os dados foram analisados e buscou-se por momentos nos quais o uso das tecnologias e a análise desse uso foram explicitados pelos autores, de forma a construir uma análise do impacto das tecnologias nesses estudos. Os resultados foram categorizados em dois tópicos: (i) aspectos e contribuições das tecnologias digitais para uma abordagem covariacional e (ii) dificuldades e limitações no uso de tecnologias digitais para uma abordagem covariacional.

Aspectos e contribuições das tecnologias digitais para uma abordagem covariacional

Os aspectos e contribuições das tecnologias digitais destacados nos estudos incluem: a representação da variação de forma dinâmica e contínua, que permite a manipulação dinâmica de variáveis; a conexão dinâmica e simultânea entre representações/notações; a possibilidade de ação sobre as representações/notações; a escala automática e contínua do gráfico e as ferramentas para a testagem de hipóteses e da invariância.

Os estudos E4, E10 e E13 apontaram contribuições da representação e manipulação dinâmica de variáveis. Em E4, os autores utilizaram uma simulação do crescimento de uma planta para abordar a covariação no crescimento exponencial (figura 4), os resultados apontaram que a possibilidade de manipular as quantidades de forma ‘contínua’ e dinâmica fomentou a capacidade dos estudantes de coordenar o crescimento multiplicativo em y com o crescimento aditivo em x, que é um aspecto central no crescimento exponencial.

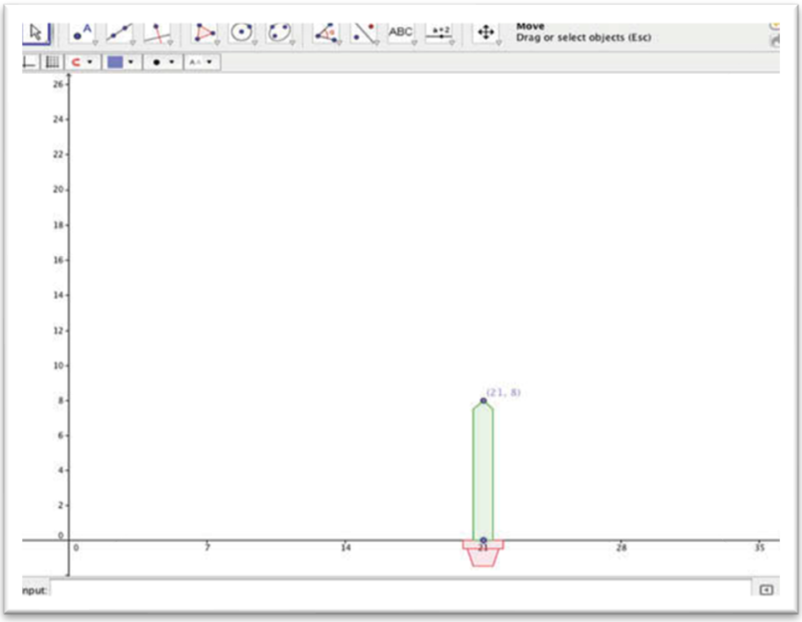

Figura 4 – O *script* jactus no ambiente Geogebra, utilizado no estudo E4.

Fonte: (Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan & Amidon, 2016, p.157)

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Para os autores do estudo E13, a exploração dinâmica em um ambiente LOGO (figura 5) contribuiu para que os estudantes identificassem e caracterizassem tipos de dependências (aditiva, multiplicativa) entre as quantidades em uma situação de construção de um modelo da letra "N". Além disso, a manipulação dos valores das variáveis por meio de controles deslizantes permitiu que os estudantes percebessem, por meio das deformações da figura, se as suas construções foram bem-sucedidas ou não. Já no estudo E10, o uso de controles deslizantes e a possibilidade de arrastar pontos no gráfico, contribuíram para relacionar a tangente a uma curva com a derivada.

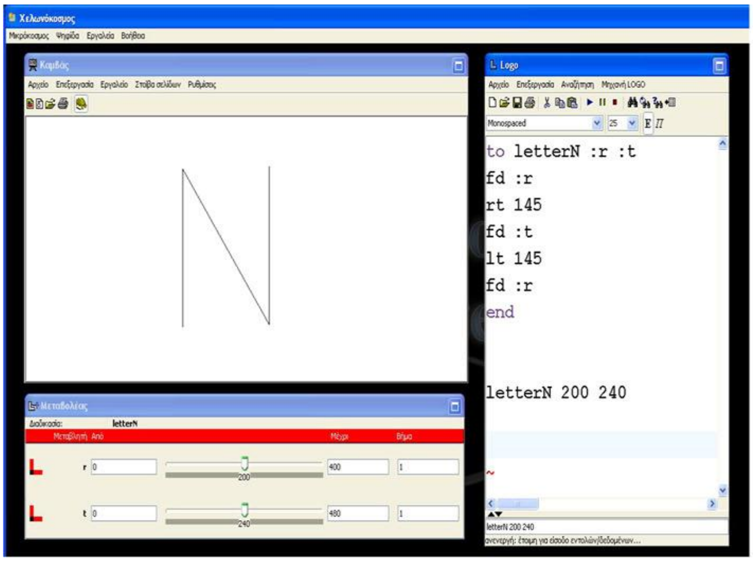

Figura 5 – Construção de um modelo da letra N no ambiente LOGO
Fonte: (Lagrange & Psycharis, 2014, p.266)

Um outro aspecto do meio computacional apontado como importante nas pesquisas E1, E2, E4, E7 e E11 é a conexão dinâmica e simultânea entre representações/notações, que possibilita representar variações dinâmicas simultaneamente e em múltiplas notações, permitindo assim a articulação de diferentes aspectos conceituais. Segundo Kaput (1992), ideias complexas raramente são bem representadas quando se usa apenas um sistema de notação, e ainda, a conexão de notações se justifica por "expor diferentes aspectos de uma ideia complexa e revelar os significados de ações em uma notação por meio da exibição das suas consequências em outra notação." (Kaput, 1992, p. 542, tradução nossa). No estudo E2, um ambiente utilizado para articular a variação da área de polígonos (triângulos e retângulos) com um gráfico de coordenadas (figura 6) foi apontado como um suporte ao discernimento da variação variável pelos estudantes.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

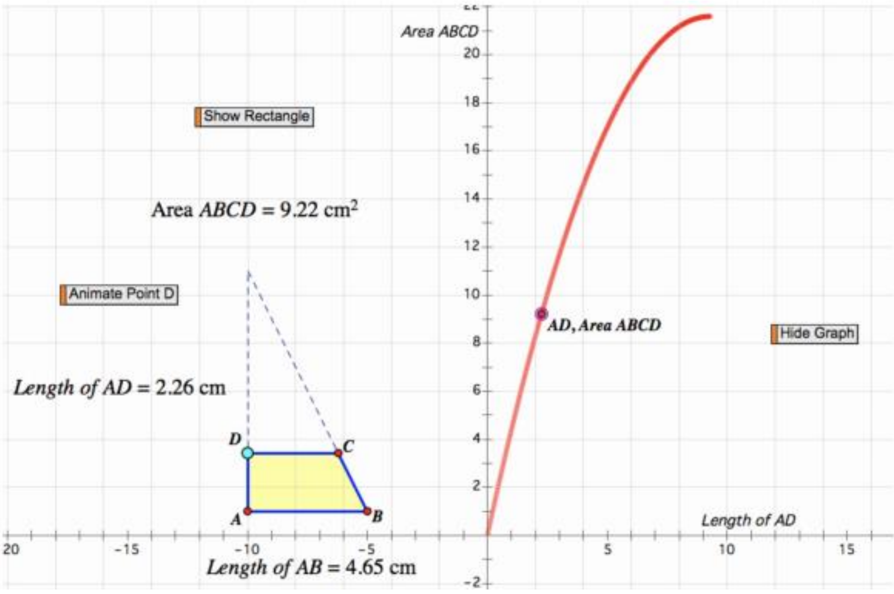

Figura 6 – Preenchimento da área do triângulo e covariação no estudo E2
Fonte: (Johnson & McClintock, 2018, p.8)

O estudo E1 destacou o potencial de um software que articulou formas simbólicas (gráficos, fórmulas algébricas etc.) às manipulações dinâmicas de objetos geométricos para que os alunos estabelecessem ligações com as magnitudes em situações de covariação (figura 7).

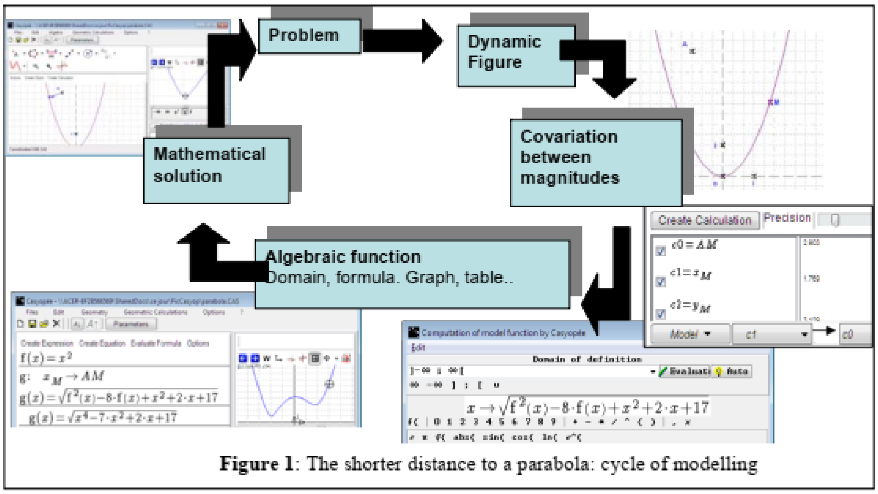

Figura 7 – Modelagem de uma relação de covariação com articulação de representações (estudo E1)
Fonte: (Lagrange, 2014, p.3)

Do ponto de vista da interação entre os sujeitos e as tecnologias, destacamos alguns aspectos que sugerem uma contribuição à exploração da covariação. A possibilidade de ação sobre as representações/notações foi destacada nos estudos E7, E10, E13 e E17 como um desses aspectos. Kaput (1992) diferencia uma notação de ação de uma notação de exibição: os sistemas usados apenas para exibir informações são referidos como notações de exibição, já aqueles usados como bases para transformações, são referidos como notações de ação. Assim, um gráfico que apenas exibe a curva de uma função distingue-se de um gráfico que

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

permite, além da exibição, ações como variar as variáveis, o intervalo e a escala no próprio gráfico, com alteração simultânea da curva. Essas possibilidades estão presentes nos estudos citados.

A possibilidade de manipular as variáveis diretamente no gráfico, em vez de apenas visualizar a variação passivamente, parece contribuir com um raciocínio mais efetivo, pois variar e observar o comportamento da variável são feitos de forma direta e simultânea pelo usuário. No estudo E7, essa possibilidade foi utilizada para dar suporte à construção da covariação entre uma variável, uma função *f* definida no intervalo dado e a sua integral (figura 8). Já os autores do estudo E13 afirmaram que as várias representações e a oportunidade de ação sobre essas representações estabeleceram um *milieu*[4] rico, oferecendo múltiplas oportunidades de geração de significados.

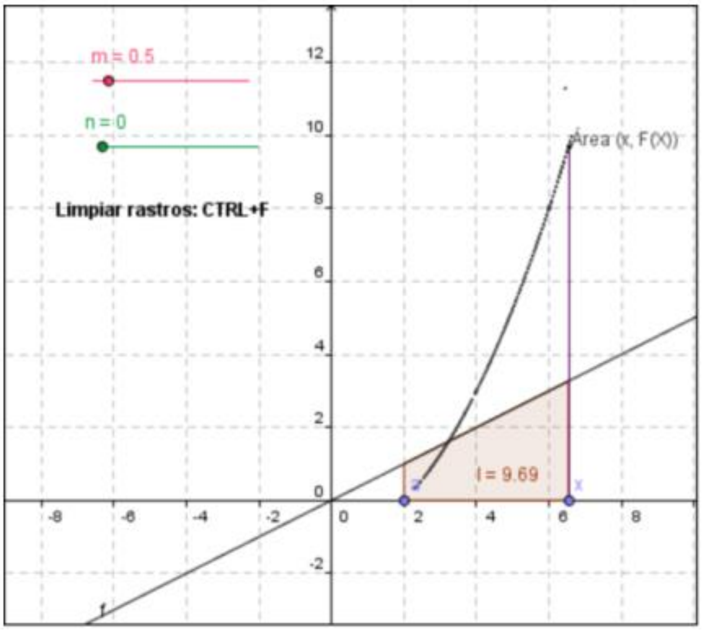

Figura 8 – Manipulação de variáveis diretamente no gráfico (estudo E7)
Fonte: (Aranda & Callejo, 2017, p.786)

Outra possibilidade, a escala automática e contínua do gráfico, foi destacada no estudo E4 por dar suporte aos estudantes na construção de imagens de variação suave (Castillo-Garsow, 2012; Thompson & Carlson, 2017) na exploração do crescimento exponencial. Antes, eles tinham uma imagem desse crescimento como limitando-se a uma multiplicação repetida.

Os estudos E13, E17 e E22 deram exemplos de como os estudantes podem utilizar as tecnologias digitais como ferramentas para testar suas hipóteses sobre covariação e testar a invariância. No estudo E13, em um dos softwares do estudo, o teste foi por meio da deformação ou não do objeto gráfico com a variação por meio dos controles deslizantes (figura 5), no outro software do estudo, estudantes perceberam que ao mover um ponto

[4] Da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau: subsistema autônomo, antagônico ao sujeito.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

horizontalmente em uma janela, o traçado do gráfico não se movia, permitindo inferências sobre a invariância na relação entre as variáveis.

Já no estudo E22, no qual Weber e Thompson (2014) analisaram como as compreensões de estudantes de gráficos de funções de uma variável influenciam suas generalizações para gráficos de duas variáveis, os estudantes utilizaram uma calculadora gráfica para traçar gráficos como forma de testar suas hipóteses prévias sobre o comportamento das funções.

Os aspectos computacionais apontados revelam um potencial para dar suporte à construção de significados de covariação pelos sujeitos. Embora reconhecendo esse potencial, outros elementos precisam ser levados em conta para uma efetiva contribuição, como o papel do professor, o design das tarefas, as condições e configurações de uso das tecnologias, os usos específicos, entre outros.

Dificuldades e limitações das tecnologias digitais para uma abordagem covariacional

Se por um lado as tecnologias digitais proveem um suporte à exploração da covariação, por outro, é possível que condições da sua utilização, aliadas às características do meio computacional e ao design do artefato em si, estejam relacionadas a dificuldades e limitações na exploração da covariação.

Como exemplo, o cenário rico em possibilidades e o dinamismo permitido pelo computador podem se converter em mais complexidade para o raciocínio, em certas situações. No estudo E10, professores em formação inicial explorando um ambiente dinâmico interpretaram o comportamento de variáveis e retas atribuindo movimentos a um mesmo objeto, como na expressão "a secante se torna tangente", um equívoco que pode emergir com mais facilidade em um meio dinâmico. Já nos estudos E1 e E13 foram reportadas dificuldades dos estudantes em identificar e relacionar variáveis em situações nas quais a covariação entre elas não estava explícita.

Os estudantes também tiveram dificuldades em conectar seus significados de função e covariação com a semântica de um software no estudo E13. Foi confuso para eles quando um comprimento no eixo y (na construção geométrica da figura 9) foi identificado como variável independente, já que na abordagem de funções a variável independente é comumente representada no eixo x. O estudo também mostrou que os estudantes tiveram dificuldades em conectar o conhecimento emergido na exploração de um software com o conhecimento matemático padrão, em um caso no qual a representação da covariação não se deu por notações matemáticas (figura 5).

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

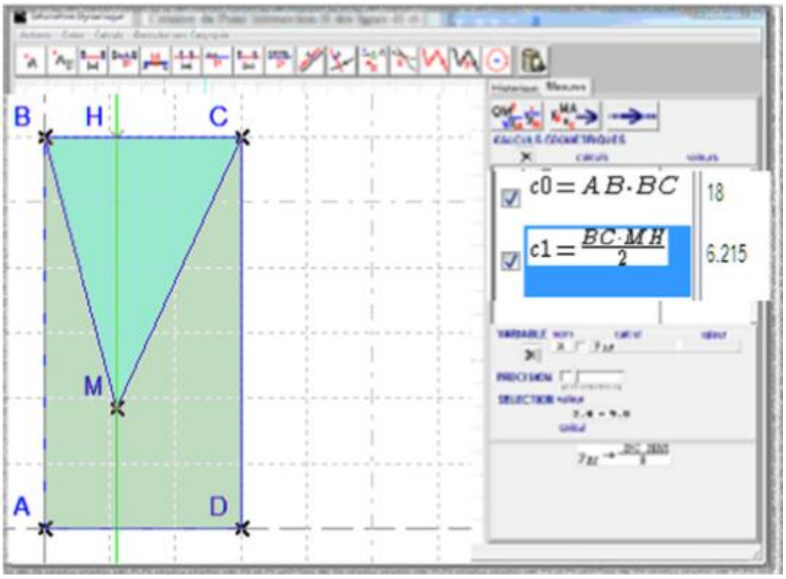

Figura 9 – Modelagem de uma função a partir de um contexto geométrico (estudo E13)
Fonte: Lagrange e Psycharis (2014, p.274)

As dificuldades e limitações que podem surgir com o uso das tecnologias digitais podem estar relacionadas tanto às características do próprio meio computacional, quanto às decisões de design das tecnologias e das tarefas aplicadas com o seu uso. Dessa forma, é necessária uma atenção específica a esses fenômenos, que a maioria das pesquisas não enfatizou suficientemente, o que revela uma parte das lacunas nas pesquisas sobre o uso de tecnologias digitais para explorar covariação.

Considerações finais e reflexões

Esta revisão de literatura teve por objetivo analisar um recorte do quadro atual de pesquisas sobre covariação, dos pontos de vistas cognitivo, didático, epistemológico e das possibilidades das tecnologias digitais.

Do ponto de vista cognitivo, processos e aspectos como a criação de objetos multiplicativos, a quantificação e o uso de imagens suaves de variação foram apontados como importantes para dar suporte ao raciocínio covariacional. Os estudos também relacionaram a abordagem da covariação às dificuldades dos estudantes em: conceber a variação conjunta entre as variáveis, quantificar a variação, modelar funções covariacionalmente e, representar e interpretar a covariação em diferentes registros de representação.

Do ponto de vista da epistemologia matemática, os diferentes tipos de funções têm diferentes aspectos covariacionais que os caracterizam. Dificuldades no raciocínio covariacional podem estar relacionadas às características intrínsecas de cada função, por isso, esses aspectos precisam ser levados em consideração.

No contexto didático, foram apontados fatores que podem influenciar na abordagem de covariação, desde as escolhas curriculares, às formas nas quais a covariação é abordada na sala de aula, como o design das tarefas e as formas de representar funções. Esses aspectos

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258
podem influenciar no quanto os estudantes mobilizam seu raciocínio covariacional ou não. Já os estudos sobre conhecimentos, significados e concepções de professores mostraram, de forma geral, um raciocínio covariacional insuficiente e significados frágeis para conceitos ligados à covariação.

Na análise do suporte das tecnologias digitais, observou-se que poucos estudos deram um status de objeto central ao uso das tecnologias, por outro lado, aqueles que o fizeram, mostraram como esse foco enriquece a análise e lança luz em fenômenos importantes, que de outra forma passariam despercebidos.

As contribuições das tecnologias digitais apontadas nos estudos envolvem aspectos como: a representação da variação de forma dinâmica e contínua, que permite a manipulação dinâmica das variáveis e a coordenação da variação; a conexão dinâmica e simultânea entre representações/notações, que permite a emergência e a articulação de diferentes aspectos conceituais da covariação; a possibilidade de ação sobre as representações/notações, que permite uma coordenação ativa da variação; a escala automática e contínua do gráfico, que permite um suporte à construção de imagens de variação suave e as ferramentas para testagem de hipóteses e da invariância.

Por outro lado, também foram apontadas dificuldades associadas ao uso dessas tecnologias, como as relacionadas a como as características e a semântica dos ambientes computacionais conectam-se aos significados de covariação dos estudantes e a como os estudantes lidam conceitualmente com características específicas do meio computacional, como o dinamismo dos objetos.

A pesquisa na perspectiva covariacional é relativamente recente e tem muitas questões a serem exploradas. Porém, ao considerar o cenário da pesquisa brasileira, a busca nas bases de dados no período pesquisado não retornou resultados, o que sugere que a abordagem covariacional de função não teve, pelo menos até o período indicado, a devida atenção como problema de pesquisa. É necessária mais atenção a este objeto, tanto no contexto da pesquisa como na formação de professores e no currículo de matemática do ensino básico brasileiro.

Thompson e Carlson (2017) listaram tópicos que necessitam de investigação: formas de conceitualizar aspectos da covariação, relações entre currículos e o raciocínio covariacional, a prática de professores no suporte ao raciocínio covariacional, entre outros. Defendemos a inclusão de um tópico importante e necessário nessa lista: o uso de tecnologias digitais no suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional. Além disso, entendemos que a investigação da aprendizagem em matemática apoiada no uso de tecnologias digitais, requer um olhar para os aspectos e fenômenos específicos desse contexto.

Referências

Aranda, C. & Callejo, M. L. (2017) Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: dos Estudios de Casos. *Bolema,* 31(58), 777-798. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Ayalon, M., Watson, A. & Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educ Stud Math,* 90, 321–339. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9628-9

Ayalon, M., Watson, A. & Lerman, S. (2016) Progression Towards Functions: Students' Performance on Three Tasks About Variables from Grades 7 to 12. *Int J of Sci and Math Educ* 14, 1153–1173. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9611-4

Byerley, C., & Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168-193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Issues in mathematics education*: Research in collegiate mathematics education III (Vol. 7, pp. 114–162). Providence, RI: American Mathematical Society.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 352–378. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/4149958

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning:* Current state of understanding, WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55–73). Laramie: University of Wyoming.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educ Stud Math* 26**,** 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T, Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation, *Mathematical Thinking and Learning*, 18(3), 151-181. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculu". In *The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus*. Leiden, The Netherlands: Brill | Sense. doi: https://doi.org/10.1163/9789087901127_010

Habre, S. (2017). Students' challenges with polar functions: covariational reasoning and plotting in the polar coordinate system, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 48-66. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1220027

Hitt, F., & González-Martín, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educ Stud Math,* 88**,** 201–219. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9578-7

Hohensee, C. (2016). Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 69-91. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.002.

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Jones, S. R. (2015). Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(1), 105-126. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941427

Jones, S. R. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 45, 95–110. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.002

Johnson, H. L. (2015). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities, *Mathematical Thinking and Learning*, 17:1, 64-90. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946

Johnson, H. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 89-110. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/43590240

Johnson, H.L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education*, 49**,** 851–864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Johnson, H.L., & McClintock, E. (2018). A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educ Stud Math*, 97, 299–316. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9799-7

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York: Macmillan.

Lagrange, J-B. (2014). A functional perspective on the teaching of algebra: current challenges and the contribution of technology. *The International Journal For Technology in Mathematics Education*, hal-01740456, Version 1. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01740456

Lagrange, J., & Psycharis, G. (2014). Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. *Tech Know Learn*, 19, 255–286. https://doi.org/10.1007/s10758-013-9211-3

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2005). *A Matemática do Ensino Médio*, v.1, 8 ed. Rio de Janeiro: SBM.

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasilia: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp.175–193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Issues in mathematics education: Research in collegiate mathematics education I* (Vol 4, pp. 139–168). Providence, RI: American Mathematical Society.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.45.1.0102

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Musgrave, S., & Carlson, M.P. (2017). Understanding and advancing graduate teaching assistants' mathematical knowledge for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 45, 137-149. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.12.011

Nagle, C., Tracy, T., Adams, G., & Scutella, D. (2017). The notion of motion: covariational reasoning and the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(4), 573-586. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1262469

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017) The parametric nature of two students' covariational reasoning, *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 137-151. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003.

Ramos, A., M. Faria, P., & Faria, A. (2014). Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. *Revista Diálogo Educacional, 14*(41), 17-36. doi:http://dx.doi.org/10.7213/dialogo.educ.14.041.DS01

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education North America* (Vol. 1, pp. 298–304). Raleigh: North Carolina State University. Disponível em http://bit.ly/1b4sjQE

Silva, C. T. J. (2022). O uso de um artefato computacional como suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional em função. (Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil). Repositório Digital da UFPE. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/45772

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179–234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P.W., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. The Journal of Mathematical Behavior, 48, 95-111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001

Watson, A., Ayalon, M., & Lerman, S. (2018). Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula. *Educ Stud Math* 97, 255–272. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9798-8

Weber, E., & Thompson, P.W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educ Stud Math*, 87, 67–85. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Wilkie, K.J., & Ayalon, M. (2018). Investigating Years 7 to 12 students' knowledge of linear relationships through different contexts and representations. *Math Ed Res J*, 30, 499–523. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0236-8

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2017). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions. *Int J of Sci and Math Educ* 15, 89–108. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9668-8

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Zengin, Y. (2018). Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educ Stud Math*, 99**,** 311–333. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

APÊNDICE A

Quadro 3 – Estudos selecionados

Id	Título	Base	Ano	Tec. dig.
E1	A Functional Perspective on the Teaching of Algebra: Current Challenges and the Contribution of Technology	Eric	2014	Sim
E2	A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning.	Capes	2018	Sim
E3	An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts	Capes	2017	Não
E4	An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation	Capes/ Eric	2016	Sim
E5	Calculus Limits Involving Infinity: The Role of Students' Informal Dynamic Reasoning	Eric	2015	Não
E6	Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula	Capes/ Eric	2018	Não
E7	Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: dos Estudios de Casos	Capes	2017	Sim
E8	Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method	Capes/ Eric	2015	Não
E9	Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers	Capes	2017	Sim
E10	Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method	Capes	2018	Sim
E11	Ferris Wheels and Filling Bottles: A Case of a Student's Transfer of Covariational Reasoning across Tasks with Different Backgrounds and Features	Capes/ Eric	2017	Sim
E12	Functions Represented as Linear Sequential Data: Relationships between Presentation and Student Responses	Capes/ Eric	2015	Não
E13	Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions	Capes	2014	Sim
E14	Investigating Years 7 to 12 students' knowledge of linear relationships through different contexts and representations	Capes	2018	Não

Fonte: Elaborado pelos autores

DOI: 10.20396/zet.v31i00.8664258

Continuação do quadro 3 – Estudos selecionados

E15	Progression towards Functions: Students' Performance on Three Tasks about Variables from Grades 7 to 12	Capes/ Eric	2016	Não
E16	Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events during Peer Interactions	Capes/ Eric	2017	Não
E17	Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac	Eric	2014	Sim
E18	Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change	Capes	2017	Não
E19	Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities	Capes/ Eric	2015	Não
E20	Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning	Capes	2016	Sim
E21	Students' Challenges with Polar Functions: Covariational Reasoning and Plotting in the Polar Coordinate System	Eric	2017	Não
E22	Students' images of two-variable functions and their graphs	Capes/ Eric	2014	Sim
E23	The Notion of Motion: Covariational Reasoning and the Limit Concept	Eric	2017	Não
E24	The parametric nature of two students' covariational reasoning	Capes	2017	Não
E25	Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change	Capes	2015	Não
E26	Understanding and advancing graduate teaching assistants' mathematical knowledge for teaching	Capes	2017	Não

Fonte: Elaborado pelos autores