



Indícios de significação a partir de diferentes sistemas semióticos no pensamento algébrico

Significance indications from different semiotic systems in the algebraic thinking

Jefferson Tadeu de Godoi Pereira¹

Adair Mendes Nacarato²

Resumo

O presente artigo é recorte de uma investigação realizada em uma sala de aula do 7.º ano do ensino fundamental em uma escola pública estadual do interior de São Paulo. Trata-se de uma investigação da própria prática, de abordagem qualitativa, que se apoia na perspectiva histórico-cultural e nos estudos de Luis Radford para a discussão da elaboração do pensamento algébrico. O objetivo deste texto é analisar os indícios do processo de produção de significados com a utilização de diferentes sistemas semióticos para a representação do pensamento algébrico. Foram videogravadas aulas pautadas na resolução de problemas, tendo como foco a construção de generalizações algébricas, a partir da observação de sequências simbólico-numéricas. A análise de um episódio interativo ocorrido durante o processo de síntese das produções dos alunos envolvendo um dos problemas propostos revelou indícios de significação para a utilização da linguagem algébrica formal.

Palavras-chave: Ensino Fundamental; Pensamento algébrico; Linguagem algébrica; Perspectiva Histórico-cultural.

Abstract

This article is an excerpt from an investigation carried out in a classroom in the 7th year of teaching elementary school in a state public school in the countryside of São Paulo. It is an investigation of the own practice, with a qualitative approach, which is supported by the cultural historical psychology and studies of Luis Radford for the discussion of the elaboration of algebraic thinking. The purpose of this text is to analyze the evidence of the process of producing meanings with the use of different semiotic systems for the representation of algebraic thinking. Lessons were videotaped based on the resolution of problems, focusing on the construction of algebraic generalizations, from the observation of symbolic-numeric sequences. The analysis of an interactive episode that occurred during the synthesis of the students' productions involving one of the proposed problems revealed signs of significance for the use of formal algebraic language.

Key-words: Elementary school; Algebraic thinking; Algebraic language; Cultural historical psychology.

Introdução

O ensino de álgebra, historicamente, foi marcado pelo formalismo das representações simbólicas, deixando de lado, muitas vezes, a possibilidade de utilizar outros sistemas de representação para expressar esta forma do pensamento. Uma ampla literatura aborda as

Submetido em: 12/04/2021 – **Aceito em:** 17/11/2022 – **Publicado em:** 14/12/2022

¹ Doutorando em Educação pela Universidade São Francisco. Professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, Brasil. E-mail: jefferson.tadeu1@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8925-8889>.

² Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas. Professora da Universidade São Francisco, Brasil. E-mail: adair.nacarato@usf.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6724-2125>.

questões relativas ao pensamento algébrico e tem possibilitado discussões pertinentes sobre a temática; no entanto, muitas dessas discussões não chegam até as salas de aula. Há bons materiais didáticos para ser usados em sala de aula, mas eles nem sempre são compreendidos pelos professores, pois isso requer a ruptura com concepções formalistas de ensino. Entretanto, a investigação da própria prática tem potencialidades para incentivar a ruptura com esses modelos, pois promove o estudo e a reflexão do professor sobre a temática, os modos de condução da aula e o movimento interativo com os alunos.

Nessa perspectiva, o recorte aqui apresentado é de uma pesquisa de mestrado do primeiro autor³, que investigou a sua própria prática, analisando os processos de significação no desenvolvimento do pensamento algébrico em uma sala de aula de 7.º ano de uma escola pertencente à rede estadual paulista. Dentre as possíveis abordagens para a temática, optamos por analisar os indícios de produção de significados dos diferentes sistemas semióticos para a representação do pensamento algébrico.

O texto está organizado em três seções: inicialmente apresentaremos as reflexões teóricas pautadas na teoria histórico-cultural e nos estudos de Luis Radford sobre os sistemas semióticos de representação; na sequência descreveremos o contexto em que a pesquisa foi realizada, destacando os procedimentos metodológicos para a organização da sala de aula e da produção de dados; na terceira seção relataremos o episódio interativo e sua análise; e finalizaremos com algumas considerações.

Nossos pilares

Partindo de nosso objetivo para este texto, apresentamos aqui alguns conceitos fundamentais, a partir da teoria histórico-cultural, para analisar os processos que ocorrem durante a elaboração do pensamento algébrico, ao utilizar os sistemas de linguagem em sua representação retórica e simbólica.

Defendemos que todo conhecimento é construído de forma histórica, a partir das relações sociais que se dão entre os sujeitos, assim como é (re)elaborado por cada um destes, com base nas significações produzidas. Nesse processo, os signos têm papel central. Fontana e Cruz (1997) nos ajudam a compreender esse conceito-base:

O signo é comparado por Vigotski ao instrumento⁴ e denominado por ele “instrumento psicológico”. Tudo o que é utilizado pelo homem para representar, evocar ou tornar presente o que está ausente constitui um signo: a palavra, o desenho, os símbolos (como a bandeira ou o emblema de um time de futebol), etc. (p. 67)

Logo, a compreensão da forma como elaboramos os conceitos passa, inevitavelmente, pela mediação dos signos que são mobilizados para a construção das significações. A mediação, portanto, assume papel de suma importância para que o indivíduo possa produzir suas significações, pois o conhecimento é (re)construído a partir das relações sociais com o

³ Orientado pela segunda autora.

⁴ Fontana e Cruz (1997, p. 66) definem instrumento como tudo aquilo que se interpõe entre o homem e o ambiente, ampliando e modificando suas formas de ação.

outro (sujeito social). Segundo Fontana e Cruz (1997), a partir da teoria vigotskiana,

para consolidar e dominar autonomamente as atividades e operações culturais, a criança [adolescente] necessita da mediação do outro. O mero contato da criança com os objetos do conhecimento ou mesmo a imersão em ambientes informadores e estimuladores não garante a aprendizagem nem promove necessariamente o desenvolvimento, uma vez que ela não tem, como indivíduo, instrumental para reorganizar ou recriar sozinha o processo cultural. (p. 73)

Então, não há como compreender os processos voltados à (re)elaboração do conhecimento, sem que haja mediação, ou seja, o contato com o outro. Nós, enquanto seres historicamente constituídos, integramos uma corrente de elos, os quais dão subsídios a todo o conhecimento gerado por nós, enquanto sociedade.

A mediação é um processo que permite que elementos semióticos (símbolos) se desenvolvam e mobilizem na relação com o outro, possibilitando um cenário propício à produção de significações. O signo, enquanto construção humana, age como elemento mediador, que remete a algo; como operador, que faz com que se crie; ou mesmo como transformador, que modifica uma significação já existente. Smolka (2004) colabora conosco para a compreensão do conceito de significação:

a significação implica, mas não se restringe à representação. A representação, enquanto possibilidade de formação de imagens, ideias, pensamentos, tem um caráter, ou funciona, em um nível individual. Só que essas imagens, ideias, pensamento não se formam, não se compõem independentemente das relações entre pessoas, fora da trama de significações, isto é, sem a mediação, a operação com signos. O signo, como aquilo que se produziu e estabilizou nas relações interpessoais, age, repercute, reverbera nos sujeitos. Tem como característica a impregnação e a reversibilidade, isto é, afeta os sujeitos nas (e na história das) relações. (p. 56)

O processo de construção de significações pode ser compreendido como ação de (re)construção do conhecimento por parte do indivíduo, tendo como fator condutor a mediação realizada pelo outro, a partir da operação de elementos semióticos (signos) necessários para construir um ambiente propício para todo esse processo.

Retomando nosso objeto de pesquisa, o qual se fundamenta na observação do uso das linguagens durante o processo de elaboração do pensamento algébrico, precisamos compreender a forma como pensamento e linguagem se inter-relacionam. Para isto, recorreremos a Vigotski (2001), o qual nos diz que “o pensamento e a linguagem não estão ligados entre si por um vínculo primário, o que ocorre é que o pensamento surge, modifica-se e amplia-se no processo do próprio desenvolvimento do pensamento e da palavra” (p. 396).

Embora entendamos que o pensamento e a utilização da linguagem se consolidem como dois processos distintos, tais atividades não se dão de forma independente.

A constituição e a apropriação da palavra, enquanto signo que está sendo mobilizado, não são simplesmente representações externas do pensamento, pois a palavra, como unidade de análise, se une ao pensamento e à produção de linguagem. Ou seja, a palavra como instrumento semiótico, por meio dos processos de mediação, é dotada de significado pelo sujeito, de forma a estruturar a dinâmica da (re)construção do conceito, como nos mostra

Vigotski (2001):

O conceito é impossível sem palavras, o pensamento em conceitos é impossível fora do pensamento verbal; em todo esse processo, o momento central, que todos temos os fundamentos para ser considerado causa decorrente do amadurecimento dos conceitos, é o emprego específico da palavra, o emprego funcional do signo como meio de formação de conceitos. (p. 170)

Por conseguinte, a palavra, instrumento semiótico, age de forma a construir a representação externa do pensamento, passa pelo processo de mediação, o que possibilita utilizar a palavra de forma específica, dotada do significado construído pelo sujeito, para elaborar e externalizar o conceito.

Para tratarmos de uma investigação a qual se dará em torno do pensamento algébrico, é essencial que explicitemos nossa compreensão sobre a temática. Em consonância com a teoria histórico-cultural, apoiamo-nos em Radford (2006a.), o qual elenca três elementos constituintes do pensamento algébrico:

O primeiro lida com o senso de indeterminação que é próprio de objetos algébricos básicos como incógnitas, variáveis e parâmetros. É a indeterminação (em oposição à determinação numérica) que torna possível, por exemplo, a substituição de uma variável ou de um objeto desconhecido por outro; não faz sentido substituir “3” por “3”, mas pode fazer sentido substituir um desconhecido por outro sob certas condições. Em segundo lugar, objetos indeterminados são tratados analiticamente.... Terceiro, o que torna o pensamento algébrico também é o peculiar modo simbólico que tem para designar seus objetos. Na verdade, como o filósofo alemão Immanuel Kant sugeriu no século 18, enquanto os objetos de geometria podem ser representados ostensivamente, incógnitas, variáveis e outros objetos algébricos só podem ser representados indiretamente, por meio de construções baseadas em signos (ver Kant, 1929, p. 579). Esses sinais podem ser letras, mas não necessariamente. Usar letras não equivale a fazer álgebra. (p. 2, tradução nossa⁵) Logo, o pensamento algébrico emerge de situações em que determinados objetos matemáticos são tratados a partir de uma “indeterminação”, cujas representações são construções baseadas em signos. Em especial, neste artigo, tomaremos situações ligadas à análise de padrões numéricos ou simbólicos, buscando construir uma generalização algébrica para a regularidade observada.

⁵ Texto original: “*The first one deals with a sense of indeterminacy that is proper to basic algebraic objects such as unknowns, variables and parameters. It is indeterminacy (as opposed to numerical determinacy) that makes possible e.g. the substitution of one variable or unknown object for another; it does not make sense to substitute ‘3’ by ‘3’, but it may make sense to substitute one unknown for another under certain conditions. Second, indeterminate objects are handled analytically.... Third, that which makes thinking algebraic is also the peculiar symbolic mode that it has to designate its objects. Indeed, as the German philosopher Immanuel Kant suggested in the 18th century, while the objects of geometry can be represented ostensively, unknowns, variables and other algebraic objects can only be represented indirectly, through means of constructions based on signs (see Kant, 1929, p. 579). These signs may be letters, but not necessarily. Using letters does not amount to doing algebra*”.

Radford (2006b) defende que o processo de elaboração de uma generalização algébrica se baseia na capacidade de perceber comunalidades em casos particulares, pertencentes ao padrão estudado (chamados de $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$), e permite estendê-las para os termos subsequentes ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$). Dessa forma, generaliza-se a regularidade observada, gerando uma expressão pela qual se pode ter acesso direto a qualquer termo da sequência. Podemos melhor observar este processo no fluxograma representado na Figura 1, a seguir:

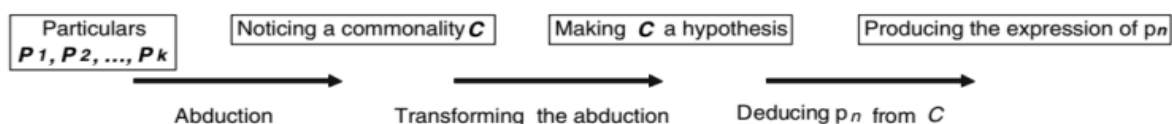


Figura 1: Arquitetura da generalização algébrica de padrões

Fonte: Radford (2007, p. 3)

Chamamos a atenção para o risco de construir uma generalização que não se paute nas condições estabelecidas para a constituição do pensamento algébrico. Este tipo de generalização decorre da observação de um padrão recursivo, ou seja, faz uso de um termo anterior para obter o próximo termo da sequência, mas não faz a relação entre a posição do termo na sequência e o número que compõe o termo. Radford (2007) nos ajuda a compreender a diferença entre o que chamamos de generalização algébrica e generalização aritmética:

A linha divisória entre a generalização aritmética e a algébrica de padrões deve, portanto, estar localizada em diferenças no que é calculável dentro de um domínio em oposição ao outro. Embora em ambos os domínios [no aritmético e no algébrico] algumas generalizações certamente ocorram, na álgebra, uma generalização levará a resultados que não podem ser alcançados dentro do domínio aritmético. (p. 2, tradução nossa⁶)

Para externalizar as construções produzidas a partir das situações envolvendo estes padrões, podemos usar diversos sistemas de representação. Por senso comum, pode parecer que esta representação deva se dar apenas por um sistema semiótico alfanumérico, pautado na escrita algébrica do padrão. Embora o desenvolvimento de habilidades voltadas à compreensão deste sistema semiótico seja claramente potencializador para o prosseguimento nos estudos voltados à álgebra, Ribeiro e Cury (2015) dizem que

efetivamente, no início do trabalho com álgebra, podemos expressar um problema em linguagem corrente, pensamos sobre ele, tentamos expressá-lo com ajuda de símbolos – que, dependendo da faixa etária dos alunos, podem ser figuras ou letras – e chegamos à linguagem algébrica que, por sua vez, por meio da generalização, nos permite utilizar o mesmo pensamento em outras situações-problema. (p. 14)

⁶ Texto original: “The dividing line between the arithmetic and algebraic generalization of patterns should hence be located in differences in what is calculable within one domain as opposed to the other. While in both domains some generalizations do certainly occur, in algebra, a generalization will lead to results that cannot be reached within the arithmetic domain”.

Também é importante destacar que a transição de um sistema de representação que faz uso de linguagem materna, para um sistema pautado em representação alfanumérica, constituído pela linguagem algébrica formal, não se dá por simples transposição. Como afirma Radford (2007):

a linguagem algébrica emergiu como uma ferramenta técnica e posteriormente evoluiu sócio-culturalmente a um nível de ser considerada como um objeto matemático. Normalmente, no currículo moderno, a linguagem algébrica aparece desde o início como um objeto matemático em si. Levando em conta este aspecto, é possível alguma mudança quanto à introdução da linguagem algébrica em sala de aula. (p. 02)

Ou seja, a introdução da linguagem algébrica formal nas práticas de ensino deve considerar que ela é um objeto historicamente construído e, sendo assim, sua utilização se deve dar de forma gradual, visando à produção dos significados relacionados a esse novo sistema semiótico.

Além disso, utilizar diferentes sistemas semióticos para representar situações matemáticas colabora para construir um cenário rico de detalhes, facilitando assim a compreensão do contexto que se está analisando. É o que observamos nas afirmações de Brizuela e Earnest (2008):

Uma representação solitária traz clareza a alguma parte da matemática, mas essa clareza esconde um tratamento indistinto de outros atributos matemáticos. A ambiguidade inerente a qualquer representação necessita da incorporação e do suporte de representações adicionais e seus conceitos ou estruturas matemáticas subjacentes para apreciar totalmente as nuances de uma situação matemática e, assim, resolver alguma ambiguidade em qualquer sistema. (p. 275, tradução nossa⁷)

Ou seja, a utilização de diferentes sistemas semióticos, considerando representações verbais e não verbais, auxilia a eliminar possíveis lacunas ou, mesmo, a perceber as comunicações necessárias para construir uma generalização a partir de padrão numérico ou simbólico.

Como forma de integrar os conceitos advindos da teoria histórico-cultural aos pressupostos aqui adotados quanto ao pensamento algébrico, apoiamos-nos na teoria cultural da objetivação, desenvolvida por Radford (2000), a qual considera, a partir das conjecturas filosóficas bakhtiniana e marxista, que a forma com que conhecemos os objetos do conhecimento e pensamos sobre eles está enquadrada por significados historicamente construídos, os quais vão além do próprio conteúdo da atividade em que ocorre o ato de pensar.

Consideramos o aprendizado da álgebra como a apropriação de uma maneira matemática nova e específica de agir e pensar, dialeticamente entrelaçada com um

⁷ Texto original: “A lone representation brings clarity to some part of the mathematics, but this clarity hides an indistinct treatment of other mathematical attributes. The inherent ambiguity of any one representation necessitates the embodiment and support of additional representations and their underlying mathematical constructs or concepts to fully appreciate the nuances of a mathematical situation, and thereby resolve some ambiguity in any one system”.

novo uso e produção de signos cujos significados são adquiridos pelos alunos como resultado de sua imersão social em atividades matemáticas. (Radford, 2000, p. 241, nossa tradução⁸)

O triângulo semiótico apresentado pela teoria cultural da objetivação (Figura 2) sintetiza as relações que se estabelecem entre o signo, seu objeto (objeto do conhecimento) e seu significado. Para sua análise e compreensão, destacamos as interações que ocorrem com os sujeitos e influenciam os signos e a produção de significações.



Figura 2: Triângulo semiótico - relação significado, objeto do conhecimento e sign.

Fonte: Radford (2006b, p. 109, nossa tradução e adaptação).

Por conseguinte, compreendemos que os objetos matemáticos aqui tratados são gerados historicamente. “De maneira mais precisa, os objetos matemáticos são padrões fixos de atividade reflexiva incrustados no mundo na troca constante da prática social mediada pelos instrumentos” (Radford, 2006b, p. 111, nossa tradução)⁹.

Toda a produção de significação e, conseqüentemente, a apropriação dos conceitos se dão pela tensão entre a subjetividade dos estudantes e os meios de objetivação semiótica.

Esses são os pressupostos que norteiam nosso estudo. Na sequência, apresentaremos nossas escolhas metodológicas para a produção e a análise dos dados.

Organizando nossos caminhos

O recorte aqui apresentado refere-se à pesquisa de mestrado do primeiro autor (Pereira, 2019), e os dados foram produzidos em sua sala de aula, caracterizando-se como uma investigação da própria prática, com foco na produção de significações que emergem durante o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico. Como ocorre em uma pesquisa de mestrado, orientando e orientadora interagem durante todo o processo, tanto na

⁸ Texto original: “We consider the learning of algebra as the appropriation of a new and specific mathematical way of acting and thinking which is dialectically interwoven with a novel use and production of signs whose meanings are acquired by the students as a result of their social immersion into mathematical activities”.

⁹ Texto original: “De manera más precisa, los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos”.

construção teórico-metodológica do trabalho, quanto na análise compartilhada dos dados.

A pesquisa, de abordagem qualitativa, foi realizada numa unidade escolar da rede pública estadual, situada na região periférica, em um município de pequeno porte no estado de São Paulo. O corpo discente da escola, na época, era constituído por cerca de 510 estudantes, com 260 matriculados no ensino fundamental, distribuídos em período matutino e vespertino, e 250 no ensino médio, no período matutino e no noturno.

O episódio aqui destacado ocorreu em uma sala do 7.º ano do ensino fundamental, formada por 32 alunos, com idades entre 12 e 13 anos, a grande maioria residindo no mesmo bairro de localização da escola.

Os dados analisados foram retirados da produção realizada para um estudo maior, e a seleção do episódio interativo, que não consta do texto da dissertação, justifica-se pela emergência de questões voltadas ao objetivo de pesquisa elegido para o presente artigo.

A sala de aula foi organizada em grupos de 4 a 5 alunos, priorizando assim a interação entre os alunos para discutir as tarefas propostas, visto que a gênese da produção de significações emerge das relações sociais, o que pressupõe as interações entre os alunos e entre eles e o professor. As aulas foram videogravadas, de modo a captar as vozes e os gestos dos alunos, possibilitando uma análise microgenética, coerente com a teoria histórico-cultural. Góes (2000) apresenta a videogravação como um procedimento fundamental para pesquisas que busquem a aplicação da análise microgenética, pois ela permite observar os processos que emergem nas minúcias das relações sociais que se apresentam no objeto de análise.

As videogravações foram transcritas e utilizadas de forma conjunta com o diário de pesquisa produzido pelo professor-pesquisador. Na transcrição os episódios foram organizados em turnos sequenciais, denominados pela inicial *T*, seguida de numeração (por exemplo: T01, T02, T03...). Os alunos estão identificados por nomes fictícios¹⁰, e as falas do professor estão indicadas pela letra *P*. Todas as falas diretas estão grafadas em itálico. Os dados entre colchetes referem-se às descrições das expressões gestuais e a outros detalhes importantes para a caracterização dos dados.

Na busca por uma situação de ensino e aprendizagem que se caracterizasse por seu potencial quanto à dinamização das interações e das discussões, definimos a resolução de problemas como opção metodológica para a aula utilizada como base para construir o cenário de pesquisa. Tal escolha se justifica, pois

quando os alunos se ocupam de tarefas [problemas] bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando

¹⁰ A presente pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP), por meio do processo CAAE 69062517.0.0000.5514.

os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas. (Van de Walle, 2009, p. 57)

Dessa forma, como problemas a serem investigados em nosso cenário de pesquisa, optamos por utilizar uma sequência de tarefas composta por nove problemas, retiradas do material curricular da rede pública de Estado de São Paulo - Programa São Paulo Faz Escola¹¹. A escolha desse material se justifica pelo fato de a escola onde foram desenvolvidas as investigações ser integrante da rede de ensino pública do estado e de uso do professor-pesquisador e também porque as tarefas se mostravam promissoras para discutir o desenvolvimento do pensamento algébrico, em especial os processos de elaboração de generalização. O material passou por pequenas alterações, numa ação partilhada entre orientando e orientadora, com o objetivo de alinhá-lo à metodologia de aula proposta pelo professor-pesquisador. O planejamento das aulas se deu a partir do modelo sugerido por Smith e Stein (2012), que define três fases fundamentais para o professor orquestrar as discussões de forma produtiva, quanto à produção de significações: lançamento; exploração; discussão e síntese.

A fase do “lançamento” é o momento em que o professor apresenta o problema a ser resolvido pelos alunos. É quando ele define que tipo de produção espera que seus alunos realizem, assim como as ferramentas disponíveis para isso. Na fase da “exploração”, os alunos deverão observar o problema proposto, levantar possibilidades de resolução e debatê-las em grupo, com o objetivo de traçar uma possível estratégia de resolução. E, por fim, na fase de “discussão e síntese”, os alunos apresentam, para a sala como um todo, as estratégias de resolução elaboradas. Aqui todos têm a oportunidade de opinar sobre as construções socializadas.

A partir da organização da aula nestas três fases, Smith e Stein (2012) sugerem que o professor aplique cinco práticas, para que assim possa orquestrar essas discussões, mantendo sempre o foco no objeto do conhecimento que pretende trabalhar na aula em questão – são as práticas de “antecipar”, “monitorar”, “selecionar”, “sequenciar” e “conectar”.

As autoras assim descrevem a prática do “antecipar”:

Antecipar as respostas dos alunos envolve estabelecer expectativas ponderadas sobre o modo como os alunos podem interpretar matematicamente um problema, o conjunto de estratégias — corretas e incorretas — que podem ser usadas para enfrentá-lo e a forma como essas estratégias e interpretações podem estar relacionadas aos conceitos matemáticos, às representações, aos procedimentos e às práticas que o professor gostaria que seus alunos aprendessem. (Smith & Stein, 2012, p. 8, tradução nossa¹²)

A prática do “antecipar” se dá antes do início das três fases aqui descritas, uma vez que se apresenta como um momento anterior àqueles a serem desenvolvidos em sala de aula,

¹¹ Programa criado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo em 2008, o qual é constituído por currículo oficial, bem como por materiais didáticos padronizados em todas as escolas pertencentes a esta esfera.

¹² Texto original: “*Anticipating students’ responses involves developing considered expectations about how students might mathematically interpret a problem, the array of strategies—both correct and incorrect—that they might use to tackle it, and how those strategies and interpretations might relate to the mathematical concepts, representations, procedures, and practices that the teacher would like his or her students to learn*”.

e mostra-se como uma ação de grande complexidade, pois aqui o professor terá que pensar na forma como espera que seus alunos pensem, simulando diferentes possibilidades. Entretanto, embora de considerável dificuldade, ela será fundamental para as próximas práticas. O professor se prepara para possíveis dúvidas ou questões postas pelos alunos, ainda que não se possa descartar a imprevisibilidade na sala de aula; muitas vezes, as resoluções apresentadas pelos alunos não são esperadas pelo professor, mas podem trazer outras perspectivas para a discussão.

A prática do “monitorar” se dá durante a fase de “exploração”, momento em que o professor deve observar o andamento das discussões em curso nos grupos. Aqui é importante destacar que a proposta trazida por Smith e Stein (2012) não é baseada em um processo de monitoramento puramente passivo por parte do professor, pois é fundamental a interação entre alunos e professor, e este último deve realizar mediações por meio do uso consciente da palavra, buscando mobilizar os conceitos necessários para a produção de significação.

Em continuidade, passamos às práticas do “selecionar” e “sequenciar”, que também serão desenvolvidas durante a fase da “exploração”, pois é quando o professor seleciona e sequencia as estratégias que estão sendo desenvolvidas pelos alunos, o que deve ocorrer durante a socialização, para favorecer a construção de uma sequência lógica nas apresentações, tendo em mente o objetivo que se busca com a situação proposta.

A última prática, o “conectar”, será desenvolvida durante a última fase da aula. Neste momento, é tarefa do professor apontar os pontos de convergência e divergência entre as diferentes estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, buscando criar as devidas conexões entre essas produções. Por ser nossa proposta pautada na construção de significações por meio das interações entre os sujeitos, temos em conta o que definem Smith e Stein (2012):

o professor pode ajudar os alunos a fazer julgamentos sobre as consequências de abordagens diferentes para a gama de problemas que podem ser resolvidos, sobre a precisão e a eficiência em resolvê-los e sobre os tipos de padrões matemáticos que podem ser mais facilmente discernidos. Em vez de ter discussões matemáticas que consistem em separar as diferentes maneiras de resolver um problema em particular, o objetivo é fazer com que as socializações dos alunos se construam umas sobre as outras para desenvolver ideias matemáticas poderosas. (p. 11, tradução nossa)

Portanto, a partir dessas perspectivas metodológicas, as aulas foram planejadas e constituíram o cenário de pesquisa. O episódio, objeto de análise do presente artigo, se deu na fase de “discussão e síntese”, durante a socialização das produções relativas ao sétimo problema aplicado. É importante considerar que os alunos já estavam há seis aulas trabalhando com a percepção de regularidades em diferentes tipos de sequência, mas ainda sem utilizar a linguagem simbólica; as generalizações foram produzidas com a linguagem materna.

Utilizamos a análise microgenética (Góes, 2000)¹³, que considera que a emergência de processos de significação e de elaboração conceitual se dá nas minúcias das interações sociais. Esses momentos interativos foram videogravados e transcritos. Na análise foram escolhidos momentos interativos entre alunos e entre eles e o professor, nos quais emergiam conceitos relativos ao pensamento algébrico. Cada episódio apresenta diálogos que são organizados em turnos, os quais são numerados (T01, T02,...) e, no processo analítico, os indícios de produção de significados e de elaboração conceitual são destacados.

Apresentaremos, na sequência, a análise do episódio selecionado.

Nossa produção

O episódio aqui descrito ocorreu durante a fase de discussão e síntese da aula realizada no dia 08/11/2017, a partir da situação proposta pelo problema 7 (P7). Portanto, este foi um momento de socialização das produções realizadas por cada grupo. Na Figura 3 está a proposta do P7.

Sequência extraída do material curricular oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Objetivo: realizar generalizações com linguagem escrita e com expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

A) Os grupos discutirão e proporão uma solução para cada um dos itens descritos abaixo, registrando suas conclusões no material curricular utilizado. (15 min.)

11. Observe a sequência de bolinhas e responda às perguntas.



a) Desenhe as bolinhas que devem ocupar as posições 5 e 6.

¹³ “de um modo geral, trata-se de uma forma de construção de dado que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação, resultando num relato minucioso dos acontecimentos” (Góes, 2000, p. 9).

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8665274

b) Preencha a tabela, associando o número de bolinhas com a posição da figura.

Posição	1	2	3	4	5	6
Número de bolinhas						

c) Quantas bolinhas terá a figura que ocupa a 10ª posição?

d) E a figura que ocupa a 45ª posição?

e) Descreva, em palavras, o padrão de formação dessa sequência.

Figura 3: Problema 7 (P7)**Fonte:** São Paulo [Estado] (2014, pp. 55-56)Segue a transcrição do episódio¹⁴:

- T 01 P: *Contem para mim como vocês fizeram para encontrar a posição 5 e a posição 6. [o professor havia solicitado que os grupos socializassem as estratégias criadas para a solução do item “c” da tarefa em questão. Ele se refere à posição 5 e 6, tentando auxiliar no processo de socialização do item em questão].*
- T 02 Gisele: *Como nós já estávamos na 6.ª posição [pois já tínhamos socializado o item “a” da tarefa], nós fomos contando até a 10.ª posição, aí deu 19. Fomos contando de 2 em 2.*
- T 03 P: *Até chegar na 10.ª [posição]?*
- T 04 Gisele: *Isso, 13, 15, 17 e 19.*
- T 05 P: *Beleza, galera, tem algum caminho diferente?*
- T 06 Ivo: *Aqui, professor, nós fizemos assim: nós pegamos o 10, porque era a 10.ª posição, mais o número de trás, que é 9, aí ficou $10 + 9 = 19$.*
- T 07 P: *Ok. Mas por que fizeram assim?*
- T 08 Ivo: *É assim. Como eu quero a 10.ª posição, então eu peguei o 10, aí eu somei com 9, que é o número que vem antes.*
- T 09 Paula: *Eu não entendi!*
- T 10 Ivo: *É assim, na figura, tem bolinha em pé e bolinha deitada [faz referência às bolinhas na linha horizontal e vertical que formam as figuras de cada posição da sequência]. Aí em pé, sempre tem igual à posição, e deitado é o número antes. [apresenta sua visão conforme*

¹⁴ Visando à preservação da identidade dos sujeitos participantes, como já citado na seção metodológica deste artigo, foram utilizados nomes fictícios para identificá-los.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8665274

ilustrado pela Figura 4].

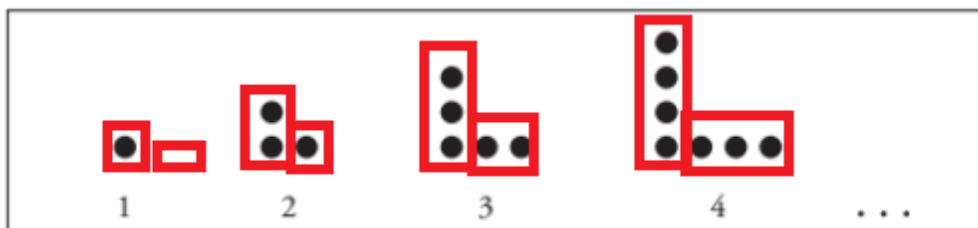


Figura 4: Representação da fala do aluno Ivo, em T10

- T 11 Ivo: *É a posição e o que está atrás dela.*
- T 12 P: *Mais um caminho diferente para resolver essa, então. Entendeu, Paula?*
- T 13 Paula: *Agora entendi.*
- T 14 P: *Alguém fez de outra forma?*
- T 15 Vários alunos [após um silêncio]: *Não, professor.*
- T 16 P: *Vamos para a próxima, então. O item “d” pedia para encontrarmos a 45.^a posição. E aí, como ficou, pessoal?*
- T 17 Kelly: *Nós fizemos duas vezes...*
- T 18 Paula: *Duas vezes 45, que dá 90. Aí a Kelly falou que tinha que tirar 1, porque...*
- T 19 Kelly: *Igual aqui na 3 [faz referência à figura da 3.^a posição da sequência], seria 2 vezes 3, que dá seis, só que na verdade é menos 1. Tem que ser 5 bolinhas.*
- T 20 Paula: *Aí fizemos igual. 45 vezes 2, que dá 90, aí tira 1. Dá 89.*
- T 21 P: *Isso vale para todas as figuras? Vocês testaram?*
- T 22 Kelly: *Vale, professor, se for a 4 [faz referência à figura que ocupa a 4.^a posição na sequência], fica 4 vezes 2, que dá 8. Tira 1 e fica 7. Dá certo.*
- T 23 P: *Ok, acho que é um bom caminho, muito legal. Acho que tem um grupo que pensou um pouco diferente. Qual foi?*
- T 24 João: *Aqui, professor. Nós vimos que todos são ímpares e que está aumentando de 2 em 2 [faz referência à quantidade de bolinhas de cada figura da sequência].*
- T 25 P: *Mas acho que tinha mais alguma coisa que tinham visto, o que era mesmo?*
- T 26 João: *O Eduardo que viu, quer falar [Eduardo]?*
- T 27 Eduardo: *Nós pegamos o 45, somamos com 45, deu 90. Aí tiramos 1, que fica 89.*
- T 28 P: *Beleza, mais um caminho, então. Mais alguém fez diferente? [silêncio]. Bom, acho que não. Vamos para a próxima, então. Item “e”. Pedia para escrever em palavras o padrão de formação dessa sequência. Legal. E aí, como vocês fizeram isso? O grupo das meninas ali.*
- T 29 Eloá: *Foi assim, a posição 45 vezes dois, dá 90.*
- T 30 P: *Mas por que vocês multiplicaram por 2 o 45?*
- T 31 Eliana: *Porque é a posição.*
- T 32 P: *Então nós pegamos a posição e...*
- T 33 Eloá: *Multiplicamos por 2.*
- T 34 P: *Mas por que multiplicar por 2?*
- T 35 Paula: *Acho que é porque está aumentando de 2 em 2.*
- T 36 P: *Pode ser!*
- T 37 João: *É isso, professor, se multiplicar por 2, fica igual a tabuada, aí vai aumentar de 2 em 2.*

- T 38 Eloá: *Aí, do resultado, tira 1.*
- T 39 P: *Então, como eu posso escrever aqui na lousa, então?*
- T 40 Eloá: *Multiplica a posição por 2, depois tira um 1.* [O professor escreve isto na lousa]
- T 41 P: *E aí, gente, ficou legal. Tem mais alguma forma de explicar?*
- T 42 João: *Dá para escrever que é a posição mais a posição, depois subtrai 1.*
- T 43 P: *Vou escrever aqui, a posição mais a posição, depois subtrai 1* [O professor escreve isto na lousa]. *Também pode ser. Os dois grupos, do João e da Eloá, disseram que precisa subtrair 1, por que será que isso está acontecendo na sequência?*
- T 44 Ivo: *Acho que é por causa da linha deitada* [faz referência à linha horizontal de cada figura da sequência, conforme Figura 4]. *É sempre 1 a menos que a posição. Por isso tem que tirar 1.*
- T 45 P: *O que acham, pessoal?*
- T 46 João: *Eu acho que o Ivo está certo, professor. Faz sentido.*
- T 47 Eloá: *A linha deitada é sempre 1 a menos.*
- T 48 P: *Isso mesmo, e, como o Ivo disse, aí encontramos o número de trás, o número que antecede a posição. Muito bom, pessoal. Para terminar, eu tenho uma pergunta. Será que dá para escrevermos estas explicações, utilizando símbolos matemáticos no lugar das palavras?*
- T 49 João: *Acho que dá, se o senhor está perguntando!* [risos da sala]
- T 50 P: *Muito bem observado, João. Mas e aí, como ficaria aqui?* [aponta para a escrita trazida pelo grupo da Eloá “multiplica a posição por 2, depois tira um 1”].
- T 51 Ivo: *Dá para escrever dois vezes* [faz o sinal de “×”] *alguma coisa, menos* [faz o sinal de “–” no ar].
- T 52 P: *É um bom caminho. Mas essa alguma coisa, é o quê?*
- T 53 Eloá: *É a posição.*
- T 54 P: *Então vamos utilizar um símbolo para representar esta posição. Vamos utilizar uma letra.*
- T 55 João: *Pode ser letra “P”?*
- T 56 P: *Pode ser. Aí como fica?*
- T 57 João: *Vai ficar $2 \times P - 1$* [desenha isso no ar]
- T 58 P: *Assim* [escreve a expressão na lousa]?
- T 59 João: *Isso, professor. E se for do nosso jeito* [faz referência à outra forma de expressão do padrão da sequência trazida pelo grupo “a posição mais a posição, depois subtrai 1”], *fica $P + P - 1$.*
- T 60 P: *Muito bem, pessoal, então conseguimos escrever o padrão da sequência utilizando a linguagem matemática. Muito bom...*

Logo no início deste episódio (T01), o professor abre a discussão, solicitando aos alunos que explicassem a estratégia que haviam utilizado para responder a um item anterior (item a), com o objetivo de recuperar as construções realizadas durante a socialização desse. Aqui se destaca a intencionalidade da ação do professor quanto ao estabelecimento de conexões entre os itens socializados, buscando assim construir gradativamente a generalização do padrão observado. O professor considera a relação entre pensamento e linguagem (Vigostki, 2001), como fundamental para este processo.

Em resposta a esta solicitação, Gisele (T02) utiliza-se da observação de um padrão recursivo, aquele que faz uso do termo anterior da sequência para a elaboração do próximo. Aqui destacamos que há a observação da comunalidade presente na sequência quanto ao seu

crescimento linear “*Fomos contando de 2 em 2*”. E temos, portanto, um processo de elaboração de uma generalização aritmética (Radford, 2007).

Continuando a discussão, o professor pergunta aos alunos se alguém construiu uma estratégia diferente (T05). De prontidão, Ivo (T06) apresenta a estratégia criada por seu grupo. Nesta contribuição, constatamos que o grupo de Ivo observou outras comunalidades encontradas na sequência, estabelecendo uma relação entre o padrão geométrico de organização das bolinhas em cada figura, com a quantidade de bolinhas encontradas.

A observação de comunalidades presentes em diferentes campos leva à produção de signos diversos, os quais podem atuar como importantes fatores para elaborar a generalização tida como objetivo, constituindo-se em instrumentos semióticos. É por meio desses signos que os sujeitos terão acesso ao objeto do conhecimento, e por um processo dialético que se estabelece entre os sujeitos, a partir dos modos de atividade (observação) constitui-se o significado, como retrata a teoria cultural da objetivação (Radford, 2000).

Já em T07, o professor solicita aos alunos que expliquem a estratégia adotada. Em seguida, Ivo continua sua explicação, destacando a relação que seu grupo estabeleceu a partir da observação do padrão geométrico representado na Figura 4 – linha horizontal e linha vertical de bolinhas. Aqui temos indícios do processo de elaboração de uma generalização algébrica (Radford, 2007), pois, por meio da estratégia apresentada pelo grupo de Ivo, é possível obter qualquer termo da sequência de forma direta (Radford, 2006a) e estabelecer, assim, uma relação funcional entre a posição do termo e sua quantidade de bolinhas.

Quando, em T16, o professor questiona sobre as estratégias elaboradas pela turma para o item d do problema proposto, em resposta, Kelly (T17) apresenta a solução encontrada pelo seu grupo. A estratégia aqui apresentada também estabelece uma relação entre a posição do termo na sequência e o quantitativo de bolinhas do termo. Ao compararmos as estratégias apresentadas pelo grupo de Ivo e de Kelly, percebemos que este segundo não fez uso do padrão geométrico identificado pelo grupo de Ivo.

Após o grupo de Kelly expor a estratégia criada, o professor questiona sobre a hipótese em questão, se sua validade se aplica a todos os termos da sequência. Em T22, Kelly afirma que sim e apresenta testes da hipótese, relacionados aos termos acessíveis da sequência observada.

As observações realizadas pelo professor durante a fase de exploração permitiram a ele saber que havia outra estratégia construída, a qual traria contribuições para o processo de elaboração da generalização. Diante disso, o professor (T23) solicita que essa estratégia seja socializada.

Em T24, João inicia sua exposição, trazendo comunalidades do âmbito aritmético e, em seguida, após o questionamento do professor, em T27, Eduardo complementa, apresentando uma estratégia que se baseia na relação entre a posição do termo na sequência e o quantitativo de bolinhas que o compõe. A generalização apresentada parte do seguinte pensamento: *posição + posição – 1*. Observamos que está se fazendo uso de um princípio

aditivo, diferentemente do princípio multiplicativo exposto pelo grupo de Kelly.

Destacamos aqui que as estratégias do grupo de João e Kelly partem da transposição de uma representação figurada – padrão geométrico e numérico – para uma representação puramente numérica, fazendo uso da tabela proposta pelo próprio problema, no item b.

Na dinâmica de discussão que se instaura durante a socialização das estratégias elaboradas, podemos encontrar indícios de que essas diferentes representações acabam por contribuir para o processo de elaboração da generalização algébrica (Radford, 2007). Por meio delas, podemos obter uma representação mais clara e abrangente da situação matemática observada, possibilitando assim o acesso a um melhor detalhamento da sequência (Brizuela & Earnest, 2008).

A partir da afirmação de João e Eduardo (multiplica-se a posição por 2 e, em seguida, subtrai-se 1) em T34, o professor pergunta “*Mas por que multiplicar por 2?*”. Em resposta, Paula afirma: “*Acho que é porque está aumentando de 2 em 2*”. Complementando, João afirma: “*É isso, professor, se multiplicar por 2, fica igual a tabuada, aí vai aumentar de 2 em 2*”. Nesse turno, notamos indícios da observação da regularidade que se estabelece a partir de uma multiplicação por um determinado fator (fator 2).

Encaminhando a discussão para o último item, o professor pergunta sobre como poderia representar (escrever) a generalização elaborada pelos grupos. Logo em seguida, Eloá – ela está no mesmo grupo de Kelly – afirma (T40): “*Multiplica a posição por 2, depois tira 1*”.

Em T42, João apresenta outra possibilidade: “*Dá para escrever que é a posição mais a posição, depois subtrai 1*”. Após isso, em T43, o professor questiona sobre a ocorrência da subtração de uma unidade em ambas as escritas. Respondendo ao questionamento, Ivo (T44) afirma que isso se deve ao que ocorre na linha “*deitada*” (horizontal) de bolinhas, fazendo referência ao padrão geométrico observado; e em T47 Eloá conclui que essa “*linha*” sempre possui uma bolinha a menos que a “*linha*” vertical.

Observando que a representação escrita por meio de linguagem materna já se concretizou e visando propor uma nova forma de representação, a partir de um sistema alfanumérico, direcionado à linguagem algébrica formal, o professor faz o questionamento contido em T48.

Destacamos a resposta dada por João (T49), a qual traz à tona a legitimação do discurso realizado pelo professor, apresentando assim sua possível compreensão da intencionalidade da fala do professor. Também podemos interpretar o quanto os alunos compreendem as relações presentes num contrato didático de sala de aula, pois, se o professor pergunta, é porque tem uma resposta; João rapidamente se manifesta e sua fala é validada pelos colegas, por meio dos risos. O professor respeita a posição de João e da turma e reformula sua pergunta. O diálogo em sala de aula é fundamental, pois os alunos podem manifestar seus modos de pensar, e o professor, reelaborar seus modos de questionar.

Durante as tentativas da criação deste novo sistema, pautado na utilização de símbolos

matemáticos para a representação das generalizações elaboradas, o professor propõe (T54) a utilização de uma letra para representar a posição da figura (variável), uma situação de indeterminação (Radford, 2006a). A partir dessa proposta, João sugere a escrita $2 \times P - 1$, para representar a generalização, que parte do princípio multiplicativo, e $P + P - 1$ para o princípio aditivo.

Nesse momento é possível encontrar indícios do início do processo de construção de significado, com o emprego deste novo sistema de representação semiótico – a linguagem algébrica formal. Esta transição não se dá de forma direta, não é uma simples transposição. Este processo se concretiza por um processo de produção de significados desse novo sistema.

Encerramos o P7 com a representação da lei de formação (a generalização) da sequência na linguagem algébrica.

Para finalizar...

Ao assumirmos que todo conhecimento é historicamente construído a partir da relação que se estabelece entre os sujeitos sociais, estamos definindo que o processo ensino-aprendizagem se faz pelas mediações realizadas com instrumentos semióticos, pelos participantes da dinâmica social na qual nos inserimos. Foi com base nesse princípio que este artigo se construiu. Tínhamos como objetivo analisar os indícios do processo de produção de significados quanto à utilização de diferentes sistemas semióticos para a representação do pensamento algébrico. Para isso, durante a análise buscamos apresentar indícios deste processo de elaboração. As falas dos alunos vão se complementando, e os significados sendo produzidos, como disse João (T46): “*Faz sentido*”.

O episódio evidencia a importância da organização da aula, nas práticas sugeridas por Smith e Stein (2012), pois o professor, na fase de exploração, já observa quais grupos construíram estratégias que podem ampliar a discussão no momento da síntese. Isso ocorre em T23, quando o professor diz: “*Acho que tem um grupo que pensou um pouco diferente. Qual foi?*”. Dessa forma, o professor mobiliza os alunos a comunicarem suas estratégias, pois elas são validadas.

Os alunos estavam envolvidos na discussão, e em suas falas é possível perceber marcas da matemática escolar, como o uso da tabuada: “*se multiplicar por 2, fica igual a tabuada*” (T37). Os alunos, num 7.º ano, já estudaram os múltiplos; no entanto, o discurso da tabuada é mais forte que a utilização do conceito de ‘é múltiplo de’; estar na tabuada do 2 é ser múltiplo de 2.

Apresentamos aqui os caminhos trilhados por alunos do 7.º ano do ensino fundamental, em sua iniciação na utilização de um novo sistema semiótico. É importante destacar que este processo não se dá de forma linear. Os constructos aqui apresentados se constituem em um cenário maior de pesquisa, o qual se deu repleto de idas e vindas, e o problema aqui apresentado foi o sétimo da sequência desenvolvida. Portanto, os alunos já estavam imersos num contexto em que observavam as sequências e buscavam as

comunalidades. Algumas generalizações na língua materna já tinham sido realizadas, mas, neste problema, eles precisavam chegar à representação simbólica, o que foi possível com a mediação do professor.

Embora o ensino de álgebra seja historicamente marcado pela utilização de grande formalismo em sua representação, o que defendemos é que o pensamento algébrico não está diretamente relacionado à utilização desse sistema representacional. A utilização da linguagem algébrica formal possibilita a continuidade do desenvolvimento do pensamento matemático e amplia o universo de possibilidades, porém o professor precisa considerar que sua utilização deve se dar pela transformação desses símbolos em verdadeiros signos, historicamente construídos, os quais devem ser apropriados pelos sujeitos que os utilizam, com significações. Isso é um processo. É importante atentar ao fato de que esse processo, como nos afirma Radford (2007), não se consolida com uma simples transposição. Ao introduzir a linguagem algébrica, estamos propondo a utilização de um novo sistema semiótico.

O episódio aqui apresentado se integra a um contexto maior, no qual podemos identificar várias possibilidades de construções não abordadas pelo recorte selecionado.

Este artigo apresenta uma interpretação possível aos dados produzidos, com base nos pressupostos teóricos aqui assumidos. Outras interpretações podem ocorrer na análise do mesmo episódio.

Referências

- Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: the case of best deal problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton, *Algebra in the early grades* (1^a ed., pp. 276-301). Lawrence Erlbaum Associates.
- Fontana, R., & Cruz, N. (1997). *Psicologia e trabalho pedagógico*. Atual Editora.
- Góes, M. C. R. (2000). A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. *Caderno Cedes*, (20)50, 9-25.
- Kant, I. (1929). *Critique of Pure Reason* (Traduzido por Norman Kemp Smith das edições de 1781 e 1787). Nova Iorque: Editora St. Marin. 2^a impressão, 1965.
- Pereira, J. T. G. (2019) *O desenvolvimento do pensamento algébrico: significações produzidas por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental* (Dissertação de Mestrado). Universidade São Francisco, Itatiba, Brasil.
- Radford, L. (2006a). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective*. 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen. (v. 1, pp. 2-21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, n. especial, 103-129.

- Radford, L. (2007) Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 01-14.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.
- Ribeiro, A. J., & Cury, H. N. (2015). A álgebra, seu ensino e sua aprendizagem. In A. J. Ribeiro & H. N. Cury, *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função* (pp. 11-27). Autêntica Editora.
- São Paulo (Estado) (2014). Secretaria da Educação. *Caderno do aluno: 6ª série/7º ano - Matemática*. São Paulo.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (2012). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. The National Council of Teachers of Mathematics.
- Smolka, A. L. B. (2004). Sobre significação e sentido: uma contribuição à proposta de rede de significações. In M. C. R. Ferreira, K. S. Amorim, A. P. S. Silva & A. M. A. Carvalho (Orgs.), *A rede de significações e o estudo do desenvolvimento humano* (pp. 42-59). Penso.
- Van de Walle, J. (2009). *Matemática do ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula* (6.ª ed., Paulo Henrique Colonese, Trad.). Artmed.
- Vigotski, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem* (Paulo Bezerra, Trad.). Martins Fontes.