



Os números racionais no ensino primário em Portugal (1930-1974)

Rational numbers in primary school in Portugal (1930-1974)

*Rui Pedro Campos Bento Barros Candeias*¹

*Mária Cristina Ribeiro Correia de Almeida*²

*Maria Cecília Soares de Moraes Monteiro*³

Resumo

O trabalho analisa a abordagem aos números racionais não negativos presentes nos documentos curriculares oficiais e nos manuais do curso de formação inicial dos professores do ensino primário. Analisaram-se os programas destes cursos, os programas do ensino primário e quatro manuais de autores de referência na formação de professores em Portugal, na época. Fez-se uma análise documental, com uma perspetiva histórica. A primeira abordagem e definição dos números racionais é feita através da medição de grandezas, mas, os manuais também apresentam diferentes significados para as frações nos exemplos com contexto. Nos manuais destaca-se a importância atribuída às diferentes representações, para a apresentação da definição de número racional e em dois destes manuais releva-se os diferentes contextos para as frações. Os manuais analisados seguem as indicações dos programas na abordagem proposta aos números racionais, no entanto, alguns autores evidenciam aspetos diferentes na abordagem que fazem a estes números.

Palavras-chave: Formação de professores; Ensino primário; Números racionais não negativos; História da educação matemática.

Abstract

The work focuses on the approach to non-negative rational numbers explored in official curriculum documents and textbooks for the initial training courses of primary school teachers. The analysis was centered in the curricula of those courses, the primary education curricula and four manuals by reference authors in teacher training in Portugal, at the time. A document analysis was carried out, with a historical perspective. The first approach and definition of rational numbers is done through the measurement of quantities, but, implicitly, the manuals also present different meanings for fractions in context. In the manuals the importance given to the different representations is highlighted, for the presentation of the definition of rational number and in two of these manuals the importance given to the different contexts for the fractions is highlighted. The analysed manuals follow the instructions of the official documents, in the proposed approach to rational numbers. However, it is also possible to observe some autonomy of the authors of the manuals in relation to the official curricular documents.

Keywords: Teacher training; Primary school; Non-negative rational numbers; History of mathematics education.

Submetido em: 13/12/2021 – **Aceito em:** 25/01/2022 – **Publicado em:** 26/05/2022

¹ Doutor em Ciências da Educação pela Universidade Nova de Lisboa/Instituto Superior de Psicologia Aplicada, Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Professor do Agrupamento de Escolas Terras de Laru, Portugal. Email: rp.candeias@campus.fct.unl.pt. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4670-7090>

² Doutor em Ciências da Educação pela Universidade Nova de Lisboa, Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Professora em mobilidade na Agência Nacional para a Qualificação e Ensino Profissional, Portugal. Email: merca@campus.fct.unl.pt. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1532-832X>

³ Doutor em Ciências da Educação pela King's College, Reino Unido, Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Professora Aposentada da Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal. Email: ceciliam@eselx.ipl.pt. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5928-8641>

Introdução

Neste texto analisamos a forma como os manuais da formação inicial dos professores do ensino primário interpretam as orientações dos documentos curriculares oficiais quanto ao trabalho a desenvolver na abordagem aos números racionais não negativos, no período de 1930 a 1974. A data de início do período em análise é marcada por uma alteração no formato dos cursos de formação dos professores deste nível de ensino e o seu final marca a alteração na formação inicial destes professores ocorrida após uma revolução que pôs fim à ditadura que vigorava em Portugal desde 1933. O estudo foca-se no ensino dos números racionais, centrando-se na forma como é trabalhado o conceito de número racional nos manuais utilizados nas escolas de formação de professores do ensino primário, publicados no intervalo de tempo definido no estudo.

O conhecimento profissional do professor para ensinar matemática e, em particular, para o ensino dos números racionais, tem sido alvo de diversas investigações (ver por exemplo Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005; Nunes, Bryant & Watson; Pinto, 2011). No entanto, Matos (2018) salienta a necessidade de se refletir sobre a relação entre a investigação em história da educação matemática e a educação matemática, em que a história da educação pode contribuir com a apresentação de um outro ponto de vista sobre os conteúdos de matemática estudados.

Os manuais utilizados nas escolas de formação inicial dos professores do ensino primário são importantes fontes de pesquisa para fazer a reconstituição histórica de uma determinada disciplina escolar (Chervel, 1990). Valente (2007) destaca o papel dos livros didáticos e a sua ligação com o desenvolvimento da matemática escolar, salientando que a disciplina de matemática é uma das em que é mais evidente a relação entre os livros didáticos e o ensino. Esta relação tão próxima entre a disciplina e os livros didáticos dá-lhes um estatuto especial como fonte para a história dos saberes escolares. Valente (2019) ressalta que os manuais pedagógicos, os livros de texto e os programas de ensino são documentos de referência, de um dado tempo, para o trabalho docente, onde são fixados os saberes instituídos, ou seja, os saberes objetivados.

Os números racionais não negativos no contexto escolar

Klein, na sua obra *Matemática Elementar de Um Ponto de Vista Superior*⁴ considera as frações uma segunda extensão do conceito de número, após a introdução dos números negativos. Para Klein (2009) as frações, tal como são tratadas nas escolas, têm à partida um significado concreto, verificando-se apenas uma mudança de princípio em relação aos números naturais. Enquanto nos números naturais se trata de coisas numeráveis, nas frações transita-se para as coisas mensuráveis, ou seja, para a medida. Como exemplos de grandezas

⁴ Tradução portuguesa de 2009 baseada na versão inglesa do primeiro volume da obra de Felix Klein, "*Elementarmathematik vom hoheren Standpunkte aus*", sobre Aritmética, Álgebra e Análise, publicada em 1908 pela editora Teubner, def Leipzig.

mensuráveis, Klein (2009) apresenta os sistemas monetário, o sistema de pesos e o sistema de comprimentos, que considera um exemplo mais completo.

No contexto do trabalho escolar, no ensino dos números racionais, é importante salientar que muitas vezes se destacam diferentes significados das frações em contexto. É de certa forma consensual que os trabalhos de Kieren (1976) foram os primeiros a propor que os números consistem em diferentes constructos, e que para uma compreensão global do conceito de número racional, seria necessária a compreensão desses constructos e da sua confluência. Kieren (1976) apresenta sete significados diferentes que os racionais podem ter. Alguns anos mais tarde, Kieren (1988) reformula a sua classificação e apresenta cinco constructos que considera fundamentais no trabalho com os racionais na forma de fração: relação parte-todo, em que algo é dividido em partes iguais; quociente, que depende da partilha equitativa, representa o quociente entre dois números inteiros; medida, que compara duas grandezas; razão, como relação entre duas quantidades, referentes a duas partes de um todo; operador, que transforma o valor de um número noutro.

Monteiro e Pinto (2005) sintetizam a investigação feita neste campo e propõem seis significados que as frações podem assumir em contextos escolares, ao nível elementar, salientando que é na síntese dessa diversidade e nas relações que os alunos vão conseguindo estabelecer entre as situações, que o sentido de número racional se poderá estabelecer. Monteiro e Pinto (2005) definem assim os diferentes significados:

- a relação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, em que a fração surge da comparação entre a parte e o todo, sendo o todo a unidade. A fração $\frac{a}{b}$ refere-se a uma parte fracionada de uma só unidade, como um quinto de uma folha está pintada ou um quinto de uma coleção de 10 lápis são azuis, sendo o todo a folha de papel e a coleção de lápis respetivamente. Neste caso o denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador designa o número de partes selecionadas;

- o quociente entre dois números inteiros representados pela fração $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$). Este significado está associado à partilha equitativa, em que o numerador representa o número de coisas a partilhar e o denominador o número de recetores dessa partilha. Monteiro e Pinto (2005) salientam que esta é uma relação entre duas quantidades, mas que também pode assumir o significado de uma quantidade, se se pensar que é a quantidade com que cada um dos recetores ficou;

- a razão “parte-parte”, que se entende como a relação entre duas quantidades do mesmo todo (ex.: a razão entre o número de meninos e de meninas numa turma é de $3/2$ – lê-se “é de 3 para 2” e corresponde a uma quantidade intensiva;

- a razão entre duas grandezas diferentes, que dão origem a uma nova grandeza, como por exemplo a razão entre a distância e o tempo necessário para a percorrer, a velocidade, que corresponde a uma quantidade intensiva;

- o operador partitivo e o operador partitivo multiplicativo, em que a fração $\frac{a}{b}$ transforma o cardinal de um conjunto discreto, em que o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação;

- a medida, em que se compara uma grandeza com outra, tomada como unidade. Nesta situação ter-se-á de fracionar a unidade de tal forma que esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a medir.

Abordagem metodológica

O estudo enquadra-se nos trabalhos de investigação histórica, tendo a análise dos dados um carácter descritivo e interpretativo, destacando-se os elementos comuns e as principais diferenças entre as diferentes abordagens propostas nos manuais, e a sua relação com os documentos curriculares oficiais que os enquadram.

O *corpus* documental é constituído por manuais ou livros de texto com publicação entre 1930 e 1974 e os documentos curriculares oficiais da mesma época. Começou-se por fazer a identificação dos documentos curriculares publicados no período em estudo. A partir desta identificação, e da análise da literatura sobre o tema da formação de professores (Pintassilgo, 2006; Correia & Silva, 2002; Silva 2001), selecionaram-se os manuais publicados entre 1930 e 1974. Foi ainda necessário fazer uma pesquisa de fontes em arquivos de escolas superiores de educação, na Biblioteca Nacional de Portugal e na Secretaria Geral do Ministério da Educação.

Na seleção dos manuais seguiu-se os seguintes critérios: livros de texto da área da matemática ou do seu ensino, que fossem explicitamente dirigidos aos cursos de formação de professores do ensino primário, publicados no âmbito cronológico do estudo, que fossem de autores portugueses e originais e que estivessem integralmente disponíveis. Numa segunda fase da seleção das fontes, fez-se um cruzamento dos manuais selecionados inicialmente, com as principais alterações curriculares que marcaram a formação inicial dos professores do ensino primário, no período de 1930 a 1974, selecionando-se um manual representativo de cada época e cada programa de formação inicial de professores do ensino primário, do período em análise. Chegou-se assim a uma lista final constituída por quatro manuais: Pimentel (1934), Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972, 1974).

Os autores dos manuais

As alterações efetuadas no curso de formação inicial de professores do ensino primário em 1930 levaram a que fossem praticamente eliminadas as disciplinas da componente de ciências da especialidade e o curso focou-se em grande parte na componente pedagógica. Desta forma, os quatro manuais analisados correspondem a disciplinas de didática, focando-se em aspetos do ensino dos números racionais. Neste período foram analisadas as obras de Alberto Pimentel Filho (1934), José Maria Gaspar e Orbelino Galdes Ferreira (1944), José Moreirinhas Pinheiro (1961) e Gabriel Gonçalves (1972, 1974). O

conhecimento que se tem sobre os autores dos manuais e a sua formação é importante no sentido de compreender a forma como abordam o ensino dos números racionais.

Os autores dos manuais analisados no período do estudo estão sobretudo ligados à pedagogia e à didática. Neste grupo de autores destaca-se Alberto Pimentel Filho, por ser o único com uma formação na área das ciências, sendo médico. Destacou-se na docência na Escola Normal de Lisboa e foi autor de diversos manuais na área da pedagogia e da história da educação. José Maria Gaspar e Orbelino Gerales Ferreira, coautores de uma das obras, fizeram a sua formação em escolas de formação de professores do ensino primário, em Coimbra, embora tenham obtido formações complementares posteriormente, nomeadamente em ciências pedagógicas. Trajetória de formação e profissional idêntica teve José Moreirinhas Pinheiro que se formou para a docência no ensino primário na Escola do Magistério Primário de Coimbra, tendo obtido uma formação complementar em ciências pedagógicas na Universidade de Coimbra. Exerceu a docência no ensino primário antes de chegar à docência na Escola do Magistério Primário de Lisboa. Foi autor de diversas obras na área da didática e da história da educação. Gabriel Gonçalves foi professor na Escola do Magistério do Porto, tendo posteriormente exercido a função de inspetor orientador do Ministério da Educação. Editou obras na área da didática, nomeadamente da aritmética e do português.

Resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados da análise dos documentos curriculares oficiais, tanto dos programas dos cursos de formação inicial de professores do ensino primário, como dos programas do ensino primário, e a análise dos manuais da formação inicial de professores do ensino primário, quanto ao trabalho com os números racionais.

Os documentos curriculares oficiais: os programas da formação inicial de professores e os programas do ensino primário

Apesar da instituição das escolas do magistério primário em 1930 (Decreto n.º 18.646, de 19/07/1930), e toda a reestruturação do curso de formação inicial de professores do ensino primário, nomeadamente do plano de estudos, os programas dos cursos de formação inicial de professores deste nível de ensino só foram alterados em 1935 (Decreto n.º 25.311, de 10/05/1935). Em 1943 (Decreto n.º 32.269, de 16/01/1943) há uma nova alteração dos programas, que se mantêm inalterados até 1974. Da análise destes programas é possível verificar que as disciplinas onde se trabalhavam os conteúdos de matemática eram essencialmente da componente pedagógica do curso, como a *Didática*, a *Didática Especial* ou a *Didática Especial do grupo B*. Os programas publicados em 1935 não permitem discriminar os conteúdos a lecionar em cada disciplina. Os programas publicados em 1943 referem na disciplina de *Didática Especial* o conteúdo de metodologia de ensino das frações e dos decimais, mas sem especificar o que deveria ser essa metodologia.

No que diz respeito aos documentos curriculares oficiais que publicam os programas do ensino primário, no início do período em estudo estavam em vigor os programas de 1929

(Decreto n.º 16.730, de 13/04/1929), sendo posteriormente publicados programas em 1937 (Decreto n.º 27.603, de 29/03/1937), em 1960 (Decreto-lei n.º 43.369, de 02/12/1960) e em 1968 (Portaria n.º 23.485, de 16/07/1968).

Nos programas de 1929, o trabalho com os números racionais começava na 2.^a classe, na disciplina de Aritmética, com a “noção concretizada de fração ordinária, cujos termos não excedam dez”. Na 3.^a classe, o trabalho com os números racionais continuava com as frações decimais e as quatro operações com frações decimais. Na 4.^a classe, eram estudadas as frações ordinárias, a conversão de frações ordinárias em decimal e vice-versa, a simplificação de frações e as quatro operações com frações ordinárias. Nas *Instruções* da 2.^a classe, apresentadas nos programas, indicava-se que as frações ordinárias, com termos até 10, deveriam ser trabalhadas de forma concretizada, utilizando-se objetos considerados apropriados ou segmentos de reta. As *Instruções* do programa da 3.^a classe centravam-se nas frações decimais e na sua representação decimal, assim como nas operações com decimais e nos procedimentos para a colocação correta da vírgula nos resultados das operações com decimais. Na 4.^a classe continuava-se a dar algum destaque ao trabalho a realizar com as frações, nomeadamente à conversão de frações ordinárias em decimais, à equivalência de frações e à sua simplificação, às operações com frações e ao trabalho com os números mistos. Também se recomendava a resolução de problemas numerosos que envolvessem frações.

Em 1937, o ensino primário elementar limitava-se aos três primeiros anos de escolaridade. Nos programas de *Aritmética*, os números racionais começavam a ser trabalhados na 2.^a classe, com o estudo da “fração própria com números dígitos”. Na 3.^a classe, este estudo envolvia as quatro operações com números inteiros e decimais. Nas observações dos programas de 1937 não constam quaisquer indicações específicas para o trabalho com os números racionais.

Em 1960, o ensino primário elementar correspondia aos quatro primeiros anos de escolaridade. Nestes programas há uma alteração na abordagem inicial aos números racionais, já que o primeiro trabalho com este conjunto numérico passa a ser feito através da representação decimal. A preparação do estudo começava na 3.^a classe, na disciplina de Aritmética com “medições com unidades lineares já conhecidas; escrita e leitura dos números representativos dessas medições; uso da vírgula. Noções de décima, centésima e milésimo de qualquer unidade”. O programa da 3.^a classe previa ainda a escrita e leitura de números decimais e as quatro operações com números decimais. Na 4.^a classe trabalhava-se ainda a “Ideia da fração ordinária. Conversão de fração ordinária em número decimal (apenas nos casos de dízima finita). Ideia de fração de um número e de percentagem”.

Nas *Observações* incluídas nos programas de 1960 considerava-se que o maior obstáculo a vencer na 3.^a classe eram os números decimais. De acordo com estas *Observações* os números decimais “devem ser ensinados a partir do metro e dos seus submúltiplos”. Partindo do conhecimento que os alunos já deveriam ter do metro, indicava-se que na 3.^a classe se fizesse a sua partição em 10, 100 e 1000 partes iguais. Os programas davam orientações, observando que:

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

De posse destas novas unidades, medirão comprimentos em que o metro entre um número exato de vezes, e verificarão que dessas medições resultam números inteiros. Medirão, depois, comprimentos em que entre uma ou mais vezes o metro e o decímetro. O professor mostrará então aos alunos como estas medições se exprimem por números decimais mistos, em que a unidade principal é seguida pela vírgula. Sucessivamente, e pelo mesmo método prático, se introduzirão os centímetros e os milímetros. Verificarão assim que as regras aprendidas na formação de números inteiros são as mesmas que regulam os números decimais. Os algarismos continuam a ter um valor absoluto e um valor de posição. Suprimindo as unidades, passar-se-á dos números decimais mistos aos números decimais simples.

Uma vez familiarizadas com estas unidades concretas, as crianças já estarão aptas a aceitara generalização, dividindo qualquer unidade em décimas, centésimas e milésimas. (Decreto n.º 42.994, 125, de 28/05/1960, p. 1277)

Ainda na 3.^a classe eram trabalhadas as operações com números decimais, que deveriam ser ensinadas em confronto com as operações com os números naturais já trabalhados. Considerava-se que, selecionando problemas adequados, não seria difícil levar o aluno a compreender a forma de colocação da vírgula nos resultados obtidos.

O programa de Aritmética da 4.^a classe tinha as frações como um dos assuntos essenciais. O estudo das frações deveria ser restrito, partindo-se de um trabalho intuitivo e de problemas simples que explorassem a relação parte-todo. Na 4.^a classe, na determinação da fração de números era considerado de interesse especial a utilização das percentagens, pelo uso frequente que se fazia dessa representação.

Em 1968, o ensino primário elementar correspondia aos quatro primeiros anos de escolaridade. Os conteúdos e as *Instruções* que constavam nos programas publicados em 1968 eram em tudo semelhantes aos que estavam incluídos nos programas de 1960, mantendo-se a primeira abordagem aos números racionais através da representação decimal, feita na 3.^a classe. O trabalho da 4.^a classe centrava-se no estudo das frações. É, no entanto, de salientar que, neste programa de 1968, deixavam de ser estudadas as percentagens.

Os manuais

No período analisado (1930-1974), observamos que no manual de Pimentel Filho (1934), num ponto designado por *Frações ordinárias*, este começa por destacar que a noção de fração é uma noção basilar no ensino da aritmética pelo que deve merecer uma atenção especial. O autor discute desde logo o interesse que a noção de fração poderá provocar na criança, salientando que todos os princípios relativos a este conteúdo devem ser “exclusivamente induzidos de casos concretos, reais, realizados diretamente pelos alunos. Mais do que em qualquer outro caso, a passagem das noções concretas à abstração deve aqui ser lenta e gradual.” (p. 147). É uma discussão inicial que se centra no conhecimento da relação do aluno com aquele conteúdo em específico e com a necessidade de ser feita uma concretização dos diferentes aspetos a trabalhar.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

No terceiro ponto do capítulo, Pimentel Filho (1934) apresenta as frações através da utilização de materiais concretos, indicando que a apresentação deve seguir três fases, a apresentação da unidade concreta, a apresentação da fração concreta e a medida da fração. A seguir à concretização, os materiais são representados pictoricamente e estabelecendo-se posteriormente uma relação com a representação verbal, com exercícios de nomenclatura. As frações não unitárias são introduzidas da mesma forma, recorrendo-se à concretização e posteriormente às imagens. As ilustrações são utilizadas para realizar exercícios de leitura das frações representadas. Nestes exemplos iniciais, Pimentel Filho (1934) privilegia a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua.

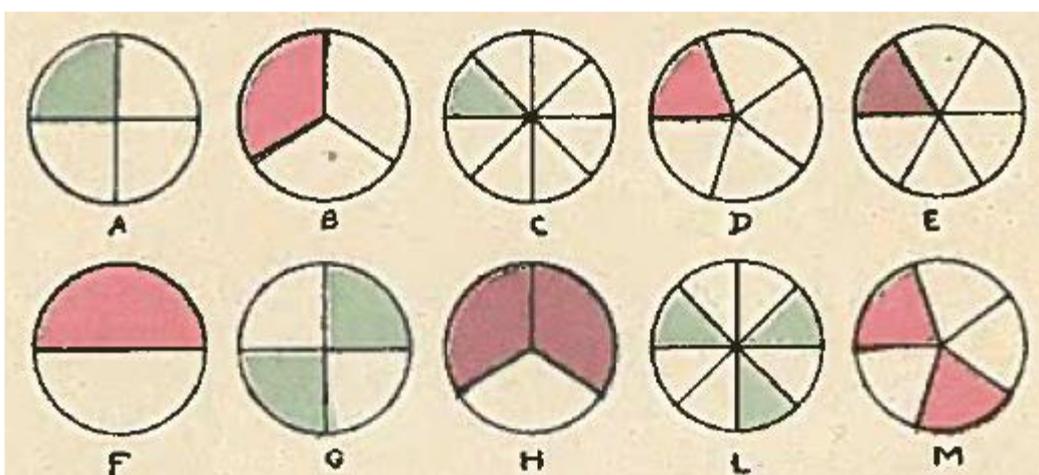


Figura 1 - Discos seccionados em diferentes partes, representando diferentes frações da unidade, onde surge a representação de frações não unitárias

Fonte: Pimentel Filho, 1934, p. 150 (digitalização, 100% do original)

Após a apresentação concreta e pictórica das frações até aos nonos, e depois de se estabelecer uma relação com a representação verbal, Pimentel Filho (1934) sugeria a apresentação da representação numérica da fração em três fases, representação numérica da fração, representação das expressões fracionárias, designação utilizada pelo autor para a fração imprópria, e representação de números fracionários, designação utilizada para identificar o numeral misto. Na primeira fase, insiste na importância dos significados do numerador e do denominador. Sugere que de início a escrita da fração seja feita por extenso, e que só se vá abandonando essa escrita conforme a leitura das frações esteja consolidada. Na segunda fase, apresenta as frações impróprias que designa por expressões fracionários, continuando a recorrer à representação pictórica, que relaciona com a representação verbal e simbólica. Nesta fase continua a privilegiar a apresentação da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

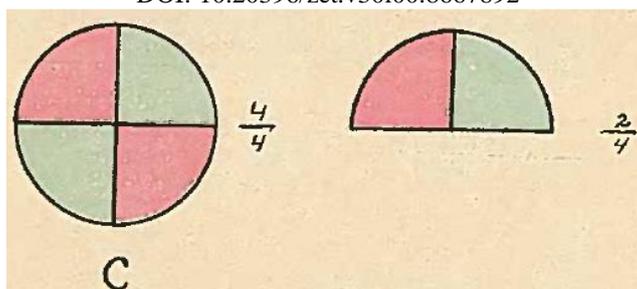


Figura 2 - Representação de uma proposta de abordagem à fração imprópria
 Fonte: Pimentel Filho, 1934, p. 152

Na terceira fase, Pimentel Filho (1934) destaca os numerais mistos, que designa como números fracionários, definindo-os como aqueles que são “formados por um número inteiro mais uma fração, como $2 + \frac{2}{3}, 5 + \frac{3}{4}$, etc” (Pimentel Filho, 1934, p. 154). Nesta fase não é utilizada a notação simbólica mais usual do numeral misto, sendo representado como uma adição de um inteiro com uma fração. A notação simbólica só é usada quando são exploradas as operações de adição e subtração. Note-se que a designação verbal de numeral misto não é utilizada, nem posteriormente no contexto das operações. São dados exemplos de como se converte um número fracionário em expressão fracionária, ou seja, converter um numeral misto numa fração imprópria, por exemplo $2 + \frac{2}{3}$ seria convertido em $\frac{8}{3}$ visto duas unidades serem o mesmo que $\frac{6}{3}$ “e juntos aos $\frac{2}{3}$ soltos, dão $\frac{8}{3}$ ” (Pimentel Filho, 1934, p. 154)

Após as fases que constituem um primeiro passo na abordagem às frações, Pimentel Filho (1934) apresenta um conjunto de dezanove exercícios para a consolidação dos conteúdos trabalhados até aí. Destes exercícios, que se baseiam essencialmente em dois autores, Bourlet e Grosurin, deixamos aqui alguns exemplos:

- 1.º Converter em meios, terços, quartos, quintos ... nonos, 2, 3, 5, etc., inteiros.
- 2.º João tem 12 soldados de chumbo. ¿ Se der metade, com quantos ficará?
- 4.º Quantos lápis serão os $\frac{2}{5}$ de 25 lápis?
- 6.º ¿Se eu quiser dividir um queijo por 8 pessoas, que porção de queijo darei a cada uma? E se o dividir por seis pessoas? E por 5?
- 9.º Deram-me $\frac{17}{5}$ de laranjas? Juntando êsses $\frac{17}{5}$ quantas laranjas posso reconstituir, posso formar? ¿ Sobram alguns quintos? Quantos?
- 18.º Após ter perdido os $\frac{3}{5}$ dos seus belindres Paulo tem ainda 12. ¿Quantos belindres tinha êle? – (Grosurin) (Pimentel Filho, 1934, pp. 155-156)

Salientamos que, na citação anterior, o autor apresenta alguns exercícios (2.º, 4.º e o 18.º) que remetem para situações em que a unidade é um conjunto discreto, e em que a fração é entendida como operador partitivo multiplicativo, o que ainda não tinha sido abordado anteriormente na obra. É ainda de destacar o 6.º exercício cujo contexto remete para uma situação de partilha equitativa, com a fração entendida como um quociente.

No seu manual, Gaspar e Ferreira (1944) também começam por considerar o ensino das frações, e dos decimais, como essencial na aritmética. Estes autores observam que o

ensino destes números envolve noções muito abstratas para as crianças e, por isso, deveria ser particularmente intuitivo, prático e ativo. Na concretização das primeiras noções, Gaspar e Ferreira (1944) sugerem a utilização do metro articulado ou a utilização de medidas de capacidade. Estes autores sugerem uma sequência para apresentação das frações aos alunos, que começa por trabalhar a metade e posteriormente a quarta parte e a oitava parte, por se conseguirem obter a partir da metade e da quarta parte da metade. O terço, o sexto e o nono só seriam trabalhados após o trabalho com a décima. Os exemplos apresentados referem-se sempre à fração como parte de um todo de uma unidade contínua.

Gaspar e Ferreira (1944) defendem um ensino simultâneo da representação na forma de fração e a representação decimal, considerando que a representação decimal facilita a compreensão porque dá uma dimensão utilitária e lógica aos números, pela sua relação com o sistema métrico.

No manual de Pinheiro (1961), a primeira abordagem aos números racionais é feita a partir da representação decimal, números decimais como são designados por Pinheiro (1961), seguindo as instruções dos programas da época⁵. Nas instruções dos programas é destacado o trabalho que deve ser feito para a iniciação aos números decimais. De acordo com estas instruções, a iniciação aos números decimais deveria ser feita a partir do estudo do metro e dos seus submúltiplos. Os alunos deveriam começar por fazer medições em que o metro entrasse um número inteiro de vezes. Mediriam depois usando o metro e o decímetro representando na forma designada por decimal misto, utilizando a vírgula a seguir à unidade principal⁶. Deveriam repetir o processo para o centímetro e para o milímetro, observando as posições dos algarismos correspondentes e estabelecendo uma relação com as regras aprendidas na formação dos números inteiros⁷. Os alunos passariam depois para a utilização de decimais simples, ou seja, aqueles em que a unidade principal é zero. Depois do trabalho com as unidades concretas, os alunos poderiam generalizar, dividindo qualquer unidade em décimas, centésimas e milésimas. As operações com números decimais deveriam ser ensinadas, estabelecendo-se um paralelismo com as operações com os números inteiros. A citação das instruções do programa que Pinheiro (1961) apresenta dá a entender que preconiza uma abordagem aos números racionais não negativos a partir da sua representação decimal, com o estudo das medidas de comprimento, tal como defende o próprio programa. Depois do trabalho com esta unidade, os alunos deveriam fazer a generalização a qualquer unidade em décimas, centésimas e milésimas. É esta abordagem que Pinheiro (1961) faz na sua obra de didática, o que leva a um trabalho centrado na relação parte todo de uma unidade contínua.

⁵ Programas do ensino primário aprovados pelo Decreto-lei n.º 42:994, de 28 de maio de 1960.

⁶ A designação decimal misto é utilizada nas instruções do programa, assim como por Pinheiro (1961), para se referirem a um número que represente mais do que uma unidade, na sua representação decimal, em que uma vírgula separa a parte inteira da não inteira do número. As instruções do programa também referem decimal simples como um número na sua representação decimal, com um valor inferior à unidade.

⁷ Nas instruções dos programas refere-se os números inteiros, mas o que faz parte dos programas do ensino primário são apenas os números inteiros não negativos.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

No trabalho com as frações o autor destaca o trabalho com a representação pictórica, a representação verbal e posteriormente a relação com a representação simbólica. A fração é essencialmente apresentada como a parte de um todo de uma unidade contínua. A iniciação é feita através das frações unitárias numa sequência idêntica à proposta por Gaspar e Ferreira (1944). Também é apresentado um exemplo em que a fração surge como operador multiplicativo partitivo de uma unidade discreta. Pinheiro (1961) não explicita nenhuma indicação a diferenciar estes dois tipos de situações.

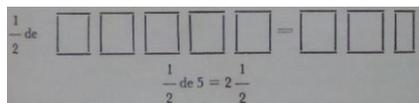


Figura 3 – Fração como operador multiplicativo partitivo de uma unidade discreta

Fonte: Pinheiro, 1961, p. 80

A proposta de Gonçalves (1974) para a iniciação aos números racionais centra-se no trabalho com a representação decimal. Esta opção de Gonçalves (1974) é justificada pelas orientações do programa do ensino primário em vigor na época⁸.

Na definição de fração, Gonçalves (1974) refere que as frações constituem “um mundo novo, com tipos próprios de unidades, de quantidades, de números: nova numeração, novas notações e operatória geral distinta.” (p. 142). O autor considera que a aritmética apresenta a fração como um caso de nova realidade de uma nova numeração e, por isso, o seu estudo não devia ser paralelo ao estudo dos números inteiros.

Gonçalves (1974, citando Augustine, s/d) destaca que o conceito de número fracionário é mais complexo do que o conceito de número natural e, por isso, requer da criança maior maturidade e conhecimentos matemáticos. Gonçalves (1974) distingue quatro significados diferentes nas frações em contexto, apresentando exemplos que diferenciam esses conceitos. O primeiro exemplo refere-se ao que se pode enquadrar na fração como a parte de um todo de uma unidade contínua “1) Na partilha de um conjunto contínuo ele significa «uma ou mais das partes iguais em que se dividiu esse conjunto».” (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original) sendo apresentada a seguinte figura.

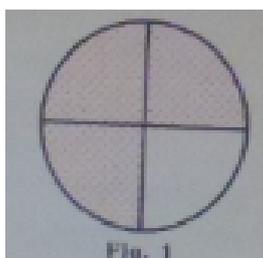


Figura 4 - Ilustração da fração como parte de um todo de uma unidade contínua.

Fonte: Gonçalves, 1974, p. 143 (digitalização, 100% do original)

⁸ Na época estavam em vigor os programas aprovados na Portaria n.º 23.485, Diário do Governo, 167, 16/7/1968, 1.019-36.

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

No segundo exemplo, este autor apresenta a fração no que se pode enquadrar como parte de um todo de um conjunto discreto, ou operador partitivo multiplicativo “2) Na partilha de um conjunto descontínuo, ele significa «uma ou mais das partes iguais desse conjunto» (de coisas, pessoas, etc.)” (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original). Para ilustrar a fração neste sentido, apresenta a seguinte figura.

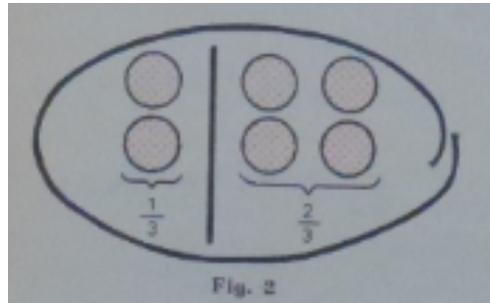


Figura 5 - Ilustração da fração como parte de um todo de uma unidade discreta.

Fonte: Gonçalves, 1974, p. 143 (digitalização, 100% do original).

No terceiro conceito que Gonçalves (1974) distingue nas frações, apresenta um exemplo que remete para o que se pode designar como a fração como o quociente entre dois números inteiros, numa situação de partilha equitativa, ver figura 6.

3) Pode significar o «quociente de dois números naturais (divisor \neq zero)». Se eu quiser dividir três barras de sabão por 4 lavadeiras, posso dividir cada barra em 4 partes, dando a cada lavadeira três quartos, pois as barras são três. Ver fig.3 (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original).

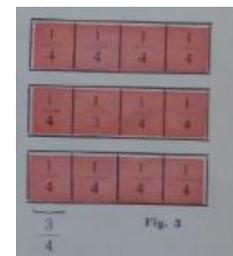


Figura 6 – Ilustração da figura 3 citada

Fonte: Gonçalves, 1974, p. 143

Este autor apresenta ainda um quarto significado que o conceito de fração pode encerrar, referindo-se à fração como uma razão “a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos”. O exemplo apresentado para este caso é o seguinte

4) Pode também significar «a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos». Se, num fruteiro, houver 5 bananas e eu comer duas, a relação entre as bananas que comi e as que havia no fruteiro é de 2 para 5 \leftrightarrow 2/5.” (Gonçalves, 1974, p. 143, aspas no original).

Para Gonçalves (1974) este último significado da fração está no fundamento do estudo da percentagem.

Gonçalves (1974) recomenda que o desenvolvimento do conceito intuitivo de fração seja feito através da partilha equitativa de conjuntos que designa por contínuos, seguida da formação de subconjuntos de um conjunto determinado. Define também a função do numerador e do denominador na fração, esclarecendo da seguinte forma o que designa por número fracionário:

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

número fracionário é uma *ideia* e a sua representação simbólica denomina-se *fração* (numeral do número fracionário), a qual pode ter a forma a/b , e que a e b designam números naturais, podendo também referir-se a como dividendo e b como divisor, sendo $b \neq 0$ (Gonçalves, 1974, p. 144, itálicos e negritos no original).

Ainda na definição de fração, Gonçalves (1974) distingue o que designa por unidade fracionária, quando se divide a unidade inteira em partes iguais e se toma apenas uma dessas partes, da quantidade fracionária que resulta da junção de várias unidades fracionárias. Salienta ainda que a fração pode representar uma quantidade que não é inteira, mas também pode representar unidades inteiras. Só depois do trabalho com a noção de fração é que Gonçalves (1974) introduz a nomenclatura utilizada normalmente nas frações como traço de fração, que o autor designa por risco de fração, numerador, denominador e termos da fração. Gonçalves (1974) apresenta também as frações impróprias mencionando que esta designação se deve ao facto de elas se referirem a frações que valem mais do que a unidade. No exemplo anterior, este autor apresenta também a fração imprópria representada na forma de numeral misto, sem explicar verbalmente o significado da parte inteira e da parte fracionária, apresentando apenas a relação entre a figura e a representação simbólica. Verbalmente refere apenas as frações impróprias, destacando que as crianças devem observar que o numerador é igual ou maior do que o denominador⁹. E, numa nota de rodapé, destaca ainda que os números naturais devem ser considerados como um subconjunto dos números fracionários, e que as crianças devem ir adquirindo essa noção de números fracionários.

Considerações finais

No que se refere à definição de número racional é importante começar por salientar que, nem nos manuais, nem nos documentos curriculares oficiais, é utilizada a designação de número racional, tendo sido identificadas designações como fração para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é menor do que a unidade, ou número fracionário para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é maior do que uma unidade. Algumas designações utilizadas para designar fração própria, fração imprópria ou numeral misto também são diferentes das que são comuns encontrar nos manuais na atualidade. Algumas das designações utilizadas por autores como Pimentel Filho (1934) parecem estar relacionadas com a utilização de traduções de manuais em castelhano. É de salientar que a utilização da designação número racional é muito recente no contexto do que é o 1.º ciclo do ensino básico em Portugal, correspondente ao ensino primário, surgindo pela primeira vez associada ao Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007 (Ponte et al., 2007).

Os quatro manuais que analisamos neste trabalho, centram-se na componente pedagógica, dando resposta às alterações que foram efetuadas nos cursos de formação inicial dos professores do ensino primário, em 1930, com a publicação de programas em 1935 e em

⁹ Gonçalves (1974) considera como fração imprópria as frações que representam números maiores ou iguais à unidade.

1943. A análise dos programas destes cursos permitiu verificar que são muito genéricos, não discriminando de forma pormenorizada os conteúdos a lecionar em cada disciplina.

Na obra de Pimentel Filho (1934) é privilegiada a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua. Na iniciação às frações também são apresentados exemplos que remetem para situações em que a fração aparece com o significado de operador partitivo multiplicativo de um conjunto discreto (Monteiro & Pinto, 2005). Na abordagem é destacada a importância e as dificuldades que este conteúdo oferece aos alunos na iniciação, embora não sejam referidas dificuldades específicas do conteúdo. É uma abordagem que privilegia a relação entre as diferentes representações, ativas, pictóricas e verbais e simbólicas, fazendo-se um amplo uso das imagens com cor. Na obra nunca é usada a expressão número racional, sendo utilizadas designações como fração, expressão fracionária para designar fração imprópria, número fracionário para designar numeral misto, e números decimais. A proposta está centrada na apresentação de uma sequência de ensino que privilegia a iniciação a partir das frações e só depois dos decimais, mas não apresenta definições muito formais. Pimentel Filho (1934) discute os tipos de unidades logo no início do capítulo sobre as frações. O manual de Pimentel Filho (1934) foi editado quando estavam em vigor os programas do ensino primário de 1929. Na obra é possível verificar que a primeira abordagem aos números racionais é feita a partir da representação na forma de fração, sendo essa representação também a primeira abordagem preconizada nos programas em vigor na época. No entanto, é de realçar que o manual apresenta conteúdos que vão para além dos que são apresentados no programa do ensino primário.

No trabalho de Gaspar e Ferreira (1944) é de sublinhar a importância que é dada à indicação de uma sequência de ensino com um enfoque inicial na fração, mas onde se defende que essa representação deve ser trabalhada em paralelo com a representação decimal. No trabalho inicial que incide sobre a fração unitária, apresentada sempre como parte de um todo de uma unidade contínua, os autores valorizam a relação entre as diferentes representações, pictórica, verbal e só posteriormente a simbólica, embora o destaque seja dado à relação entre a representação verbal e a simbólica, não se fazendo uso da imagem como acontecia por exemplo em Pimentel Filho (1934). Na época da edição do manual de Gaspar e Ferreira (1944) estavam em vigor os programas do ensino primário de 1937 que, embora continuassem a apresentar uma primeira abordagem aos números racionais centrada na representação na forma de fração, começavam a destacar e a centrar o trabalho na representação decimal. Esta é uma abordagem que também se reflete no manual, que realça o trabalho paralelo entre as duas formas de representação.

A obra de Pinheiro (1961) distingue-se das obras anteriores por propor uma abordagem inicial aos números racionais a partir da sua representação decimal. O autor não apresenta uma discussão sobre essa opção e sobre as vantagens e desvantagens de fazer a iniciação através da fração ou dos decimais, justificando-se com as instruções do programa do ensino primário da época, programas do ensino primário de 1960, que indicavam esta sequência e centravam o trabalho na utilização do metro e dos seus submúltiplos e na relação que se podia estabelecer entre a organização dos decimais e a organização decimal dos

números inteiros. Só depois do trabalho com a unidade metro é que os alunos generalizavam a divisão da unidade em décimas, centésimas e milésimas a qualquer unidade. Apenas depois do trabalho com a representação decimal é que Pinheiro (1961) considera a iniciação às frações, destacando-se na sequência de ensino proposta o trabalho inicial com as frações unitárias e a relação entre as diferentes representações, pictórica, verbal e simbólica, numa ordem idêntica à proposta de Gaspar e Ferreira (1944). A fração é caracterizada essencialmente como a parte de um todo de uma unidade contínua, embora o autor apresente alguns exemplos em que a fração surge como operador multiplicativo partitivo aplicado a uma unidade discreta. Na obra de Pinheiro (1961) nunca é utilizada a designação número racional, sendo utilizada a designação fração.

Gonçalves (1972, 1974) também faz a opção pela iniciação centrada na representação decimal, justificando essa opção com as orientações do programa do ensino primário da época, programas do ensino primário de 1968. No entanto, apresenta uma discussão explícita sobre as possíveis sequências de ensino com início na representação decimal ou na representação na forma de fração. Gonçalves (1974) destaca algumas dificuldades que este conteúdo pode provocar nas crianças na sua representação em fração, porque representa um conjunto numérico novo, com tipos de unidades diferentes e com uma notação e operatória distinta, tal como referem Monteiro e Pinto (2005). Na obra de Gonçalves (1974) não é usada a designação número racional, sendo usada a expressão número fracionário para identificar os números que se podem representar por uma fração. Faz também uma distinção entre a expressão unidade fracionária, que utiliza para designar frações unitárias, e a quantidade fracionária que resulta da adição de unidades fracionárias. Este autor faz referência à complexidade do conceito do número fracionário, distinguindo quatro conceitos diferentes quando a fração é apresentada em contexto: partilha de um conjunto contínuo, partilha de um conjunto descontínuo, quociente de dois números inteiros e razão. Estes quatro conceitos podem enquadrar-se nos diferentes significados das frações em contexto, tal como são apresentados por Monteiro e Pinto (2005). Na sequência de ensino para as frações, Gonçalves (1974) salienta que a iniciação deve ser feita através do que se pode designar por partilha equitativa de conjuntos contínuos (Monteiro & Pinto, 2005). Nessa iniciação utiliza a relação entre a representação pictórica e a representação simbólica. No trabalho de Gonçalves (1974) é ainda possível verificar que existe uma necessidade de distinguir a ideia da sua representação, o que acontece por exemplo quando o autor distingue número fracionário da sua representação na forma de fração e número decimal da sua representação em numeral decimal.

Agradecimentos:

Este trabalho é suportado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017

Referências

- Baptista, M. (2004). *O Ensino Normal Primário. Currículo, práticas e políticas de educação*. Lisboa: Educa.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação, 2*, 177-229.
- Correia, A., & Silva, V. (2002). *Manuais pedagógicos – Portugal e Brasil – 1930 a 1971: produção e circulação internacional de saberes pedagógicos*. Lisboa: Educa.
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rationals numbers: its intuitive and formal development. In J. Hilbert & M. Behr (Org.), *Number concepts and operations in the middle grades VII* (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Klein, F. (2009). *Matemática elementar de um ponto de vista superior: volume 1 – 1.ª parte - Aritmética*. Lisboa: SPM.
- Matos, J. (2018). Revisitando a história da educação matemática: fundamentos, metodologias e temáticas. In Rodrigues, A., Barbosa, A., Santiago, A., Domingos, A., Carvalho, C., Ventura, C., ... Carreira, S. (Eds.). *Livro de atas do Encontro de Investigação em Educação*. Coimbra: ESE-IPC.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática, 14*, 89-107. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ni, Y., & Zhou, Y. (2005) Teaching and learning fraction and rational numbers: The Origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52, doi:10.1207/s15326985ep4001_3
- Nunes, T., Bryant, P. & Watson, A. (2009). *Keys understandings in mathematics learning*. Retirado em 20 de novembro de 2011, de [http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/MATHS_COMBINEDv_FINAL\(1\).pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/MATHS_COMBINEDv_FINAL(1).pdf)
- Pintassilgo, J. (2006). Os manuais de pedagogia no primeiro terço do século XX: entre a tradição e a inovação. In J. Pintassilgo, M. Freitas, M. Mogarro, & M. Carvalho (Orgs.), *História da escola em Portugal e no Brasil: circulação e apropriação de modelos culturais*, 175-200. Lisboa: Edições Colibri.
- Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. Tese de doutoramento: Universidade de Lisboa.
- Silva, V. (2001). *História de leituras para professores: um estudo da produção e circulação de saberes especializados nos “manuais pedagógicos” brasileiros (1930-1971)* (2 vols.).

DOI: 10.20396/zet.v30i00.8667892

Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Valente, W. (2007). História da educação matemática: interrogações metodológicas. *Revista eletrônica de educação matemática*. v2(2), 28-49.

Valente, W. (2019). Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. *Revista História da Educação (Online)*, 23, 1-22, DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/2236-3459/77747>

Fontes

Legislação

Decreto n.º 16.730. *Diário do Governo*, 83, (13/04/1929), 896-908.

Decreto n.º 18.646. *Diário do Governo*, 166, (19/07/1930), 1443-50.

Decreto n.º 27.603. *Diário do Governo*, 72, (29/03/1937), 286-90.

Decreto n.º 25.311. *Diário do Governo*, 106, (10/05/1935), 636-44.

Decreto n.º 32.269. *Diário do Governo*, 12, (16/01/1943), 31-41.

Decreto-lei n.º 42.994. *Diário do Governo*, 125, (28/05/1960), 2165-207.

Decreto-lei n.º 43.369. *Diário do Governo*, 279, (02/12/1960), 2674-6.

Portaria n.º 23.485. *Diário do Governo*, 167, 16/07/1968, 1019-36.

Manuais analisados

Gaspar, J. & Ferreira, O. (1944). *Notas de Didáctica Especial*. Lisboa: B.U. Amaral.

Gonçalves, G. (1972). *Didáctica do cálculo (apontamentos)*, 1.º volume. 2.ª ed. Porto: Porto Editora

Gonçalves, G. (1974). *Didáctica do cálculo (apontamentos)*, 2.º volume. 2.ª ed. Porto: Porto Editora.

Pimentel Filho, A. (1934). *Súmula didáctica*. Lisboa: Livraria Editora.

Pinheiro, J. (1961). *Introdução ao estudo da didáctica especial*. Lisboa: Escola do Magistério Primário de Lisboa.