Zetetiké

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

# Abordagem Exploratória de Frações em um Estudo de Aula

## Exploratory Teaching on Fractions in a Lesson Study

*Daiane Tapparello*[1]

*Adriana Richit*[2]

**Resumo**

A compreensão de frações é uma dimensão essencial da aprendizagem matemática. Entretanto, esse processo reveste-se de complexidade devido às dificuldades apresentadas pelos alunos, solicitando intervenções de sala de aula, tais como a abordagem exploratória, que explicitem os modos de pensar e as estratégias dos alunos. O artigo analisa as aprendizagens de alunos do 7º ano sobre frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. A investigação qualitativa envolveu um estudo de aula, organizado em 12 encontros, com cinco professoras de Matemática do Ensino Fundamental II, cuja aula de investigação foi conduzida numa escola pública catarinense. O material empírico compõe-se das respostas ao questionário aplicado aos alunos previamente a aula de investigação, das observações registradas durante a aula e das entrevistas com os alunos ao final do processo. A análise, baseada no paradigma indiciário, evidenciou que a aprendizagem dos alunos envolveu a compreensão dos significados de fração a partir da tarefa, a mobilização de distintas representações para resolvê-la e as justificações formuladas para os resultados.

**Palavras-chave:** Abordagem exploratória, Estudo de aula, Aprendizagem sobre frações, Ensino Fundamental II.

**Abstract** (10pts – negrito - justificado)

Learning of fraction is an essential dimension of mathematical learning. However, this process is complex due to the difficulties presented by students, requiring classroom practices, such as the exploratory approach, which explains students' ways of thinking and strategies. The article analyzes 7th-grade students' learning about fractions using an exploratory approach in a lesson study. The qualitative research involved a lesson study, organized in 12 meetings, with four Mathematics teachers from Basic School, whose research lesson was conducted in a public school in Santa Catarina. The empirical material consists of responses to the questionnaire administered to students before the research lesson, observations recorded during the class, and interviews with students at the end of the process. The analysis was based on the indiciary paradigm and showed that the students' learning involved understanding the meanings of fractions based on the task, the mobilization of different representations to solve it, and the justifications formulated for the results.

**Keywords:** Exploratory teaching, Lesson study, Learning of fractions, Basic School

**Submetido em**: 17/04/2024 – **Aceito em**: 20/05/2024 – **Publicado em**: 26/07/2024

[1] Mestre em Educação pela Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS. Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal Catarinense – IFC, Campus Concórdia. Professora da rede estadual de ensino de Santa Catarina. Brasil. E-mail: daiatapparello@gmail.com. https://orcid.org/0000-0002-7365-0886

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP. Professora da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, Campus Erechim. Brasil. E-mail: adrianarichit@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-0778-8198

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

## Introdução

O desenvolvimento de novas abordagens de sala de aula e, especialmente, a concretização de mudanças na Educação não ocorrem dissociados da formação do professor. Mudanças educacionais pressupõem processos de formação bem estruturados, que possibilitem a ação qualificada do professor (Richit & Maltempi, 2010). Essa perspectiva converge com os estudos de aula (lesson study), processo de desenvolvimento profissional docente sustentado nos princípios da colaboração e da reflexão (Richit, 2023), com potencial para promover mudanças no ensino e favorecer a aprendizagem dos alunos (Quaresma & Ponte, 2015; Richit, Agranionih, Zimer & Neves, 2024).

Os estudos de aula, originários do Japão no final do século 19, popularizaram-se nos Estados Unidos a partir dos anos 1990 e se disseminaram por vários países do ocidente mediante a divulgação, em língua inglesa, de resultados das experiências sobre essa abordagem (Murata, 2011; Richit, Ponte & Tomkelski, 2024). Um aspecto particular do estudo de aula é a perspectiva subjacente à aula de investigação, que é a abordagem exploratória (*inquire-based approach*). A abordagem exploratória é um princípio do estudo de aula adaptado em Portugal e no sul do Brasil, que tem embasado "[...] o planejamento da aula de investigação, a natureza das tarefas propostas para essa aula e, especialmente, a intervenção do professor que leciona a aula e promove a discussão coletiva em sala de aula" (Richit, 2020, p. 13).

A abordagem exploratória oportuniza aos alunos assumirem papel reflexivo e indagador na resolução de tarefas matemáticas. Quando o ensino da Matemática prioriza esse papel, o conceito de tarefa se torna essencial na medida em que as tarefas são reconhecidas como "[...] elemento organizador da atividade dos alunos" (Ponte et al., 2016) e mobilizador dos modos de pensar e das estratégias de resolução. A partir das tarefas, o aluno é convidado a interpretar as questões que lhe são propostas, representar informações, formular generalizações e elaborar conjecturas para as resoluções de determinada tarefa, comunicando-as e justificando-as (Richit, Tomkelski & Richit, 2021). Essa abordagem possibilita ao aluno construir ou aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos, representações, procedimentos e ideias matemáticas (Richit, Richit & Richter, 2023).

A compreensão de conceitos é uma das competências matemáticas específicas estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC, que é o documento orientador do ensino na Educação Básica no Brasil. Esse documento ressalta a importância de aproximar o ensino da Matemática ao cotidiano dos alunos, visando lhes possibilitar a compreensão dos conceitos matemáticos de forma contextualizada. A abordagem de tópicos curriculares a partir de contextos temáticos próximos da realidade dos alunos favorece a interpretação de enunciados, estimula a discussão entre pares e a formulação de questões, potencializa as investigações matemáticas e a resolução de problemas, contribui para explicitar os modos de pensar dos alunos, favorecendo, assim, a aprendizagem matemática (Richit et al., 2023).

Estes aspectos nos instigaram a realizar uma investigação centrada no objetivo de

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas de alunos do 7º ano sobre frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. A investigação centrou-se na seguinte questão: Quais aprendizagens sobre frações são desenvolvidas por alunos do 7º ano a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula?

A análise incidiu sobre a aula de investigação, 3ª etapa do estudo de aula, que foi realizada em uma turma de 7º ano de uma escola pública de Santa Catarina, situada na região de abrangência da Universidade Federal da Fronteira Sul, cuja missão precípua é promover o desenvolvimento social e educacional da região. A pesquisa pode trazer contribuições na medida em que explicita os princípios teóricos e as etapas da abordagem exploratória e suas possibilidades para promover a aprendizagem da Matemática, bem como para as questões relacionadas à aprendizagem de frações e seus significados (Graça et al., 2021; Lopes, 2008).

## Estudos de aula

Os estudos de aula começaram e se desenvolver no Japão na Era Meiji[3], caracterizando o processo pelo qual os professores buscavam desenvolver e melhorar progressivamente a forma de ensinar, trabalhando em conjunto com outros professores, refletindo criticamente sobre a prática pedagógica e modificando-a quando necessário (Isoda, Arcavi & Mena Lorca, 2007).

Uma das principais mudanças introduzidas no período Meiji, que promoveu uma reforma global no ensino escolar, foi a superação do ensino individualizado em detrimento do ensino mútuo. A primeira iniciativa deu-se a partir da Escola Normal[4] de Tóquio, que realizou uma experiência pioneira de ensino mútuo, desenvolvendo aulas para classes inteiras. A partir dessa experiência, esse modelo foi implantado em Tóquio e, em seguida, foi gradualmente sendo implementado em escolas do país (Isoda & Baldin, 2023).

A introdução desse modelo no Japão envolveu duas etapas. Na primeira, professores estrangeiros foram convidados para ministrar aulas coletivas na Escola Normal de Tóquio, a fim de disseminar a sabedoria ocidental no ensino mútuo. Em seguida, alguns professores japoneses, participantes da experiência, foram convidados a ministrar aulas na escola primária anexa à Escola Normal. A partir dessas experiências foram produzidos materiais de ensino, que foram distribuídos para todo país (Richit & Tomkelski, 2022).

A seguir, a partir das ações do Ministério da Educação japonês, os estudos de aula foram implementados em todo país, tornando-se política pública a partir de 1960 (Richit, 2023). Nesse movimento, foram promovidas aulas abertas para divulgar esse modelo,

[3] A Era Meiji foi responsável pelo fim do Feudalismo no Japão, destacando-se pela acelerada modernização do país e sendo reconhecida como potência mundial. O Ensino Mútuo teve origem nas práticas pedagógicas das escolas monásticas na Alta Idade Média e certas escolas de caridade no período anterior a Revolução.

[4] As escolas normais eram instituições que promoviam a formação de professores. Porém, por volta de 1880, após uma crise financeira, o governo fechou as "escolas normais", exceto a escola instalada em Tóquio (Isoda, Arcavi & Mena Lorca, 2007).

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

iniciativa que deu origem ao primeiro grupo de estudos de aula iniciados pelo governo japonês (Isoda et al., 2007). As aulas abertas, em alguns casos, eram assistidas por grandes grupos de professores (Isoda & Baldin, 2023).

A análise das experiências em estudos de aula tem apontado resultados promissores em relação à formação docente (Pina Neves, Fiorentini & Silva, 2022) e ao ensino, porque os professores se concentram nos conhecimentos e capacidades essenciais para melhorar as atividades de sala de aula e, com isso, desenvolvem o seu conhecimento acerca de determinado conteúdo, aperfeiçoando a maneira de ensiná-lo (Sibbald, 2009). Além disso, o estudo de aula possibilita ao professor analisar os diferentes tipos de tarefa a propor para as aulas e as consequências que essas tarefas podem ter para a aprendizagem dos alunos (Ponte et al., 2016; Richit, Tomkelski & Richit, 2021) e do professor (Fiorentini et al., 2023).

O estudo de aula é uma abordagem de formação docente fortemente ligada à prática de sala de aula, que tem por finalidade a melhoria do ensino e a aprendizagem dos alunos (Richit & Ponte, 2020; Pina Neves & Fiorentini, 2021). Este processo compõe-se de quatro momentos principais, realizados colaborativamente por uma pequena equipe de professores: identificação de um problema de aprendizagem; planejamento de uma aula, designada aula de investigação, visando superar esse problema; realização dessa aula, acompanhada de observação por toda a equipe participante do estudo de aula; e reflexão sobre a aula, com foco naquilo que foi registrado sobre as ações dos alunos (Richit, Ponte & Tomkelski, 2019).

Richit e Tomkelski (2022) destacam que um dos aspectos que caracterizam os estudos de aula desenvolvidos no Brasil é o fato dessa abordagem assumir uma perspectiva de democratização da aprendizagem da Matemática e da formação de professores. Enquanto que em países como Japão, Inglaterra e Estados Unidos os estudos de aula são desenvolvidos com foco na melhoria da aprendizagem dos alunos, das escolas e dos sistemas de ensino, no Brasil ainda buscamos tornar a Matemática e a sua aprendizagem acessível a alunos de distintas realidades. Ademais, Richit (2020) acrescenta que outro aspecto caracterizador do estudo de aula é a perspectiva subjacente à aula de investigação: a abordagem exploratória, que é uma perspectiva próxima ao *structured problem solving*, predominante no estudo de aula japonês.

## Abordagem Exploratória

A abordagem exploratória (*inquiry-based approach*), também denominada ensino exploratório, caracteriza um contexto em que os alunos se envolvem com tarefas para as quais não possuem estratégias de resolução imediatas e, portanto, precisam construir estratégias próprias e recorrer a conhecimentos prévios para resolvê-las (Ponte, 2005). Essa perspectiva representa uma importante mudança no ensino escolar, porque deixa “uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção de conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13).

> O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. Os

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

> alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011, p.11).

Nessa abordagem, a essência está nas tarefas propostas, na forma como são trabalhadas e na comunicação na sala de aula, porque as atividades realizadas pelos alunos e as reflexões sobre estas atividades resultam no que estes alunos aprendem na aula de Matemática (Chistiansen & Walther, 1986). Sendo assim, é fundamental escolher ou elaborar tarefas adequadas a fim de favorecer a aprendizagem matemática dos alunos.

Outro aspecto basilar da abordagem exploratória incide sobre a estrutura e a dinâmica da aula, que apresenta etapas bem definidas e distintas do ensino expositivo. O modelo de Stein et al. (2008) tem sido frequentemente referenciado na literatura sobre essa temática. No modelo de Stein et al. (2008), o ensino exploratório envolve três fases: "lançamento" da tarefa, na qual o professor apresenta a tarefa matemática à turma, sendo geralmente um problema ou uma investigação a ser realizada, evidenciando os objetivos da proposta e desafiando os alunos a realizarem a atividade. Na segunda fase, chamada de "exploração" ou trabalho autônomo, o professor observa e apoia os alunos na resolução da tarefa. Esta etapa pode ser realizada de forma individual ou preferencialmente em pequenos grupos, e o professor precisa estimular a participação ativa de todos na resolução da tarefa proposta. A terceira fase, denominada "discussão e sintetização", exige que o professor organize a discussão coletiva das resoluções dos alunos ou grupos. Ao gerir as interações, o professor visa fomentar explicações e argumentações que permitam que as resoluções apresentadas tenham qualidade matemática, assim como promover a comparação das resoluções apresentadas pelos alunos (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

A abordagem exploratória promove a participação efetiva dos alunos na aula e lhes oportuniza expressarem ideias e discutirem estratégias e conclusões. Com isso, propicia ao professor identificar diferentes modos de pensar dos alunos e, também, compreender dificuldades de aprendizagem deles. A abordagem exploratória possibilita a comunicação de ideias matemáticas, a mobilização de representações, a justificação de resultados e conclusões e a formulação de generalizações, favorecendo, portanto, o desenvolvimento do raciocínio matemático (Richit, Tomkelski & Richit, 2021).

A abordagem exploratória que caracteriza o estudo de aula tem como essência a investigação, com o intuito de desenvolver a compreensão dos alunos, os instigando a pensar matematicamente e desenvolver o raciocínio a partir de justificações e generalizações (Vale et al., 2018; Richit, Richit & Richter, 2023). Relativamente às justificações, Mata-Pereira e Ponte (2012) destacam que para que sejam válidas, os alunos devem utilizar conhecimentos anteriores, propriedades ou conceitos matemáticos, ou contraexemplos que refutem a afirmação. Nesta direção, Richit et al. (2021) destacam que a abordagem exploratória, promovida em estudos de aula, possibilita explicitar o pensamento e as estratégias dos alunos para expressarem suas compreensões sobre tópicos curriculares mediante a resolução de tarefas cuidadosamente elaboradas para alcançar objetivos específicos, levando-se em

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

consideração o contexto e os alunos. Em síntese, o objetivo central da abordagem exploratória é desenvolver o raciocínio dos alunos (Post et al.,1993).

De acordo com Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), raciocinar consiste em realizar inferências fundamentadas, usando as informações fornecidas nas tarefas para formular novas informações que possam ser aceitas como válidas em um dado contexto ou domínio de conhecimento (Quaresma & Ponte, 2015). As investigações matemáticas realizadas a partir da abordagem exploratória, as conjecturas formuladas e testadas, assim como as justificações e generalizações apresentadas pelos alunos contribuem para a aprendizagem da Matemática (Lannin et al., 2011).

A abordagem exploratória favorece a aprendizagem da Matemática na medida em que propicia um ambiente de sala de aula estimulante e um contexto de exploração matemática, que instiga e desafia os alunos. Este ambiente possibilita ao aluno ver surgir com significado conhecimentos e procedimentos matemáticos e, simultaneamente, desenvolvam capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, fazendo emergir ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011; Ponte, 2014).

No Brasil, há um crescente interesse nas temáticas ‘abordagem exploratória’ e ‘estudos de aula’, porém as pesquisas envolvendo abordagem exploratória e estudos de aula são escassas. Uma busca na plataforma *Scielo*, utilizando os descritores “abordagem exploratória da matemática” e “ensino exploratório da matemática”, identificou oito trabalhos relacionados à temática. E desses, apenas dois envolvem os estudos de aula.

Quadro 1 – Artigos disponíveis na Scielo com foco na abordagem exploratória.

| **Ano** | **Periódico** | **Título** | **Autor(es)** |
|---|---|---|---|
| 2014 | Bolema | Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória | João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma |
| 2018 | Bolema | Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de futuros professores de Matemática | Renata Rodrigues, Márcia Cyrino e Hélia Oliveira |
| 2021 | Acta Scientiae | Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula | Adriana Richit, Mauri Tomkelski e Andriceli Richit |
| 2021 | Bolema | Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula | Micaela Martins, Joana Mata-Pereira, João Pedro da Ponte |
| 2021 | Bolema | Práticas de Ensino Exploratório de Matemática e a Mobilização/Desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino por Participantes do PIBID | Alessandra Marins, Bruno Teixeira e Angela Savioli |

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2022 | Ciência e Educação | Visão profissional de estudantes de Pedagogia na análise de episódios de aula de matemática na perspectiva do ensino exploratório | Laudelina Braga e Marcia Cyrino |
| 2023 | Bolema | Conhecimento de Professores para Promover o Raciocínio Matemático: uma experiência de formação continuada | Márcio Martins, Ana Henriques e Joyce Caetano |
| 2023 | Uniciência | Enseñanza exploratoria de la geometría con software de geometría dinámica y el aprendizaje del profesorado de matemáticas: Una revisión sistemática | Rafael Gutiérrez-Araújo e Vinícius Pazuch |

**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2023)

Destacamos que apenas o trabalho de Richit et al. (2021) centra-se na aprendizagem matemática dos alunos a partir da abordagem exploratória, no qual os autores analisam as compreensões de área e perímetro mobilizadas por alunos do Ensino Fundamental II. A abordagem exploratória envolveu três momentos centrais: introdução da tarefa elaborada especialmente para aprofundar os conceitos de área e perímetro, trabalho autônomo dos alunos sobre essa tarefa e a “discussão coletiva das estratégias, resoluções e pontos de vista dos alunos, contribuindo para ampliar/aprofundar as compreensões sobre estes tópicos e para a superação de algumas dificuldades relacionadas à distinção entre eles e ao seu uso em situações problema” (Richit et al., 2021, p.31). Portanto, há um espectro de possibilidades de pesquisa envolvendo abordagem exploratória e estudos de aula, especialmente envolvendo tópicos curriculares historicamente problemáticos, como frações, por exemplo, para o qual o presente artigo vem contribuir.

## Metodologia

*Natureza e objetivos.* A pesquisa, de natureza qualitativa e interpretativa, buscou evidenciar e discutir as aprendizagens matemáticas de alunos do 7º ano sobre frações a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. A análise adotou a perspectiva do paradigma indiciário (Ginzburg, 1990).

*Contexto e participantes*. A investigação foi conduzida em um estudo de aula realizado no segundo semestre de 2021, que envolveu cinco professoras de Matemática da rede pública de ensino de Santa Catarina – Amália, Mafalda, Lily, Pietra, Angela, nomes fictícios. O estudo de aula foi organizado em doze encontros semanais de aproximadamente 2h50min cada e centrou-se no tópico frações (Lopes, 2008; Drechmer & Andrade, 2011). Os encontros de planejamento e reflexão foram realizados de forma remota devido à pandemia. A aula de investigação foi realizada presencialmente.

Após definir o tópico curricular a ser abordado no estudo de aula e o objetivo para a aula de investigação, mediante a reflexão sobre as dificuldades frequentes dos alunos no referido tópico, foram desenvolvidas as seguintes atividades: aprofundamento sobre a história, estrutura e possibilidades do estudo de aula; análise e reflexão sobre das diretrizes curriculares da Matemática; discussão sobre resultados de pesquisa relacionados ao referido

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

tópico (frações); planejamento da aula de investigação e elaboração de materiais; antecipação das dificuldades dos alunos na resolução da tarefa elaborada para a aula; preparação do roteiro de observação para a aula e da discussão coletiva. A aula de investigação foi desenvolvida em uma turma de 7º ano de uma escola pública catarinense, constituída de 20 alunos, os quais trabalharam em duplas na resolução da tarefa, sendo que cada dupla foi observada por um professor participante do estudo de aula. Devido à pandemia, a turma foi distribuída em dois grupos (Grupo A e Grupo B), os quais frequentavam as aulas presenciais alternadamente.

Quadro 2 – Duplas de alunos e professor observador.

| **Grupo A** | | **Grupo B** | |
|---|---|---|---|
| **Duplas de alunos** | **Professor observador** | **Duplas de alunos** | **Professor observador** |
| Luna e Edward | Amália | Jhenny e Willian | Amália |
| Ronald e Neville | Mafalda | Clauki e Emy | Mafalda |
| Bill e Molly | Lily | Jack e Petry | Lily |
| Mila e Stieve | Pietra | Percy e George | Pietra |
| John e Ketty | Angela | Any e Jullie | Angela |

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023)

A aula foi organizada em três momentos centrais, segundo os princípios da abordagem exploratória: introdução da tarefa (10 min), trabalho autônomo dos alunos sobre a tarefa (40 min) e discussão coletiva e sistematização (20 min). A tarefa proposta para a aula de investigação adotou como contexto as características dos favos de mel das abelhas europeias, porque a apicultura é uma atividade comum na região, e envolvia um conjunto de questões que exploravam o conceito de fração a partir desse contexto.

*Material empírico e análise de dados*. O material empírico compõe-se das respostas ao questionário aplicado aos alunos previamente a aula de investigação, notas de campo dos pesquisadores, das observações realizadas pelos professores durante a aula de investigação e das transcrições das entrevistas conduzidas com os alunos ao final do estudo de aula. Os dados foram analisados pela perspectiva do paradigma indiciário, priorizando-se examinar as estratégias de resolução, as representações matemáticas mobilizadas, os processos de raciocínio e as generalizações elaboradas pelos alunos no desenvolvimento da tarefa. A análise evidenciou aspectos distintos com relação à aprendizagem dos alunos sobre frações, as quais, mediante aproximações e convergências, constituíam as categorias de análise.

*Aspectos éticos da pesquisa*. A investigação foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, em 10 de junho de 2021, parecer número 4.764.981.

## Resultados: Aprendizagens dos alunos sobre frações

A análise evidenciou aspectos relativos às aprendizagens dos alunos favorecidos pela abordagem exploratória em um estudo de aula. São eles: (i) significados de fração, (ii) representações de fração e (iii) justificações para os resultados.

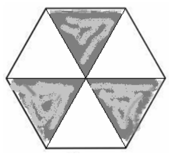
DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

***Significados de fração***

Ao analisar as resoluções apresentadas pelos alunos para a tarefa proposta na aula de investigação, cujo contexto envolvia as características dos favos de mel das colmeias de abelhas europeias, foram identificados processos de resolução associados aos diferentes significados de fração – relação parte todo, medida, operador, quociente e razão. Ressaltamos que, embora os significados sejam indissociáveis na aprendizagem matemática, optamos por abordá-los separadamente como forma de explicitar particularidades desses significados.

*Relação parte todo*. A relação parte-todo das frações associa-se a ideia de tomar o todo ($n$) e dividir em partes iguais, de modo que cada parte representa $1/n$ do todo, implicando em uma relação complementar em que o denominador representa o total de partes em que o todo foi dividido e o numerador representa quantas partes estão sendo consideradas (Drechmer & Andrade, 2011). Esse significado emergiu na resolução de algumas questões da tarefa. Por exemplo, as questões 4 e 5 da tarefa solicitavam que o hexágono fosse dividido em seis partes iguais, colorindo-se três partes, e em seguida fosse indicada a fração que representava a parte do hexágono que havia sido pintada, conforme ilustra a figura 1.

4- Divida o hexágono abaixo em seis partes iguais. Pinte três partes.



5- Observe apenas a parte colorida da figura acima. Indique a fração que representa a parte colorida em relação ao hexágono inteiro? Explique seu raciocínio para chegar a essa conclusão.

Figura 1 – Questões 4 e 5 da tarefa
Fonte: Resolução de Luna Edward (2021)

Para justificar a resposta, Luna explicou: “[...] três sextos, no meu raciocínio, pensei que o hexágono era uma pizza e nesta pizza três pedaços foram comidos [...]”. Nas demais questões da tarefa, a dupla também associou o denominador da fração com a representação de uma pizza inteira e o numerador com as partes consumidas, ressaltando a relação parte-todo.

Outras duplas associaram o denominador da fração ao todo (inteiro) e o numerador com as partes “retiradas” (consideradas/consumidas). Na discussão coletiva da tarefa, Ronald explicou que “a parte que não foi pintada você tem e a parte que foi pintada você não tem mais”. Neville justificou a resposta realizando a subtração entre os numeradores das frações consideradas, para a qual diz que “tinha seis espaços, pinta 3, ou seja 6 – 3 = 3” (Fig.2).

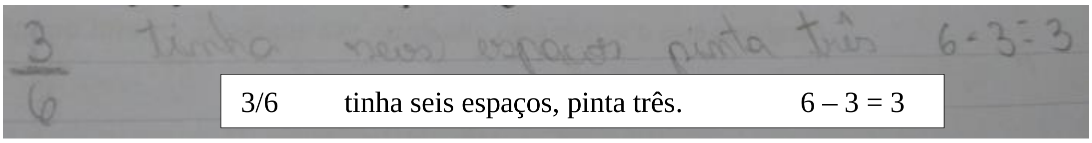



Figura 2 – Resposta para as questões 4 e 5 da tarefa
Fonte: Resolução da dupla Ronald e Neville (2021)

A tarefa estimulou os alunos a explorarem a relação entre o todo e as partes, as quais foram explicitadas nas discussões entre as duplas e no momento da discussão coletiva. Esse

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

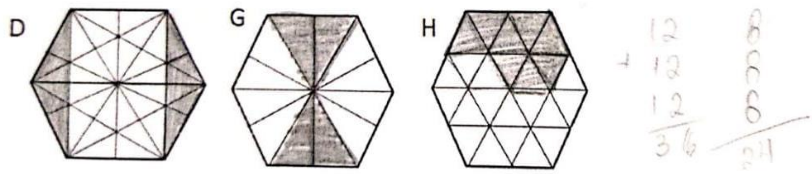
aprofundamento foi verificado na medida em que os alunos associavam a relação parte-todo com outras atividades que haviam realizado.

A questão 14 da tarefa, ilustrada na figura 3, solicitava colorir a terça parte de cada um dos hexágonos que estavam divididos respectivamente em 36, 12 e 24 partes iguais, levou os alunos a explorarem aspectos importantes na relação parte-todo.

14- Pinte a terça parte de cada uma das figuras D, G e H, abaixo, indicando a fração que representa cada uma delas. Em seguida compare-as. Você observa alguma relação entre as partes pintadas? Qual? Existe alguma relação entre as frações que representam as partes pintadas?

Figura 3 – Questão 14 da Tarefa
Fonte: Elaborado no estudo de aula (2021)

Primeiramente as duplas precisaram interpretar o enunciado e a representação de cada hexágono (D, G e H), identificando a terça parte em cada caso. Ou seja, precisaram analisar as referidas figuras, que já estavam divididas, e identificar a terça parte de cada uma, a qual deveria ser colorida. A partir disso, as duplas elaboraram estratégias de resolução, para as quais, algumas vezes, recorreram às operações aritméticas para mostrar que as soma da parte colorida com as partes não coloridas correspondia ao total de partes de cada figura (Fig.4).




| | | |
|---|---|---|
| 12 | 4 | 8 |
| 12 | 4 | 8 |
| + 12 | + 4 | + 8 |
| 36 | 12 | 24 |

Figura 4 – Resposta à questão 14
Fonte: Resolução da dupla Bill e Molly (2021)

A dupla decompôs o total de partes de cada hexágono em três parcelas iguais, as quais quando adicionadas resultavam em 36, 12 e 24 partes, conforme o enunciado. Assim, justificaram, por exemplo, que 12 + 12 + 12 = 36, concluindo que a terça parte do hexágono D correspondia as 12 partes (região colorida na figura). Na discussão coletiva, Bill explicou que as frações que representavam a parte colorida dos hexágonos D, G e H eram equivalentes (12/36 = 4/12 = 8/24), uma vez que todas correspondiam à fração 1/3.

A compreensão de que o denominador da fração indica não apenas o número total de partes, mas também o número de subpartes em que o todo foi dividido, e que o numerador é o conjunto que está sendo considerado, corrobora os resultados do estudo de Graça, Ponte e Guerreiro (2021), no qual os alunos evidenciaram este entendimento sobre frações.

Durante o trabalho autônomo sobre a tarefa, as duplas discutiram estratégias de resolução, dúvidas e conclusões, conforme relato de Mafalda: “[Na resolução da questão 14] um aluno tinha errado e o colega identificou o erro e explicou sua versão de como achava que era a resposta; logo ele compreendeu onde havia errado e refez a questão”.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

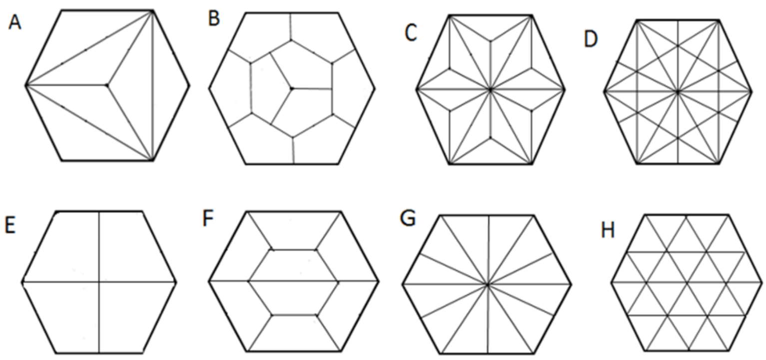
Portanto, a tarefa que embasou a aula de investigação, na perspectiva do ensino exploratório, possibilitou aos alunos relembrarem e aprofundarem a relação parte-todo, visto que identificaram a quantidade que representava o todo, coloriram as partes consideradas (as quantidades alvéolos dos favos indicados em cada questão) e, ao final, escreveram as frações que representavam as partes pintadas, que eram frações parte-todo.

Os alunos foram oportunizados a mobilizar e explorar conhecimentos e procedimentos matemáticos relacionados ao tópico ‘frações’, desenvolvendo capacidades matemáticas, tais como a resolução de tarefas elaboradas para alcançar objetivos específicos, a comunicação de ideias matemáticas, o raciocínio matemático (Canavarro, 2011) e, portanto, a aprendizagem matemática (Richit et al., 2021).

*Medida* é um conceito que envolve a comparação entre duas grandezas, podendo estas ser intensivas ou extensivas (Drechmer & Andrade, 2011). Ou seja, uma determinada unidade é tomada como referência para se medir algo, de modo que a fração é compreendida como o resultado dessa medição (Lins & Silva, 2008). A questão 7 (Fig.5), que solicitava que se indicasse a quantidade de partes em que estavam divididos cada um dos hexágonos, mobilizou o significado de fração como medida.

7- Observe os hexágonos regulares representados abaixo, identificados por letras do alfabeto. Cada hexágono está dividido em partes iguais. Observe e responda:

Figura 2: Hexágonos divididos igualmente




Fonte: Adaptado de Giménez e Bairral (2005)

Figura 5 – Questão 7 da tarefa
Fonte: Elaborado no estudo de aula (2021)

Percy explicou que sua estratégia consistiu em dividir cada um dos hexágonos em duas partes (conforme Figura 6), adotando uma destas para realizar a contagem das partes iguais. Em seguida, multiplicou esta quantidade por dois: “eu dividi em duas partes, a de cima e a debaixo, porque são duas partes iguais. Depois, fiz riscos para contar e multipliquei [o resultado] por dois” (Percy, transcrição discussão, aula de investigação). A questão 12, que solicitava que fosse pintada a metade do hexágono A e a metade do hexágono B, respectivamente divididos em 6 e 9 partes iguais, também mobilizou esse aspecto.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

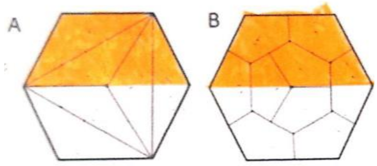



Figura 6 – Questão 12 da tarefa
Fonte: Resolução da dupla Percy e George (2021)

As duplas realizaram a contagem das partes em que os hexágonos estavam particionados, dividiram esta quantidade por dois e, em seguida, coloriram. O hexágono B, que estava dividido em 9 partes iguais, suscitou novas questões e mobilizou conhecimentos prévios, na medida em que ao tentar dividir as partes por dois, as duplas não obtiveram um número inteiro. Na discussão coletiva as duplas destacaram que:

> Jheny: mas o hexágono B está dividido em 9 partes e 9 é um número ímpar, não dá para dividir ao meio.
>
> George: mas qualquer valor pode ser dividido por dois, até esta carteira poderia ser dividida ao meio (risos).
>
> William: a não ser que a gente pinte 4 partes e meia de outra.

A estratégia de George consistiu em considerar o hexágono como uma unidade, um inteiro (mesmo estando subdividido). Em seguida, dividiu ao meio com um segmento horizontal (usando uma régua para isso). Por fim, coloriu a metade da figura, conforme solicitava a questão. Essa resolução corrobora o conceito de fração como medida ao considerar o todo como referência para medir uma parte (neste caso, a parte colorida).

A questão 12 ainda questionava se existia relação entre as partes pintadas em cada hexágono e, também, entre as frações que as representavam. Ao comparar os dois hexágonos, George respondeu que ambas as partes pintadas representavam a mesma quantidade, mesmo que os hexágonos estavam divididos internamente em sub-regiões com tamanhos e formas geometricamente diferentes. A conclusão de George corrobora o significado de fração como medida, ao mesmo tempo em que o leva a compreender o conceito de fração equivalente.

O significado de fração como medida emergiu associado ao processo de dividir os termos da fração (divisão entre o numerador e o denominador), por meio do qual puderam definir a parte (quantidade/tamanho) a ser colorida em cada hexágono. A compreensão do significado de medida possibilitou aos alunos compreenderem fração como uma grandeza, que é uma das compreensões associadas ao conceito de número racional, assim como aprofundarem frações próprias e impróprias. Além disso, a tarefa revelou potencialidades para que os alunos pudessem formular e justificar suas conjecturas (Lannin et al., 2011).

*Operador*. Este significado pode ser visto como uma modificação/transformação, ou seja, como algo que atua sobre uma situação modificando-a, estando associadas às operações de multiplicação e/ou divisão (Llinares & Sánchez, 1997). A tarefa oportunizou aos alunos explorarem o significado de fração como operador, a exemplo da questão 14. O aluno Edward aplicou o operador 1/3 à quantidade 36, 12 e 24, conforme ilustra a figura 7.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

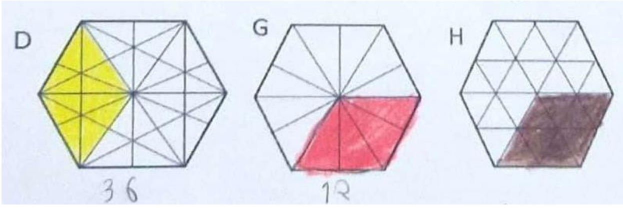



Figura 7 – Resposta questão 14 da tarefa
Fonte: Resolução da dupla Luna e Edward (2021)

Edward dividiu as quantidades de subdivisões de cada hexágono (o total de sub-regiões internas) em três partes iguais, obtendo respectivamente, 12, 4 e 8. Após identificar a quantidade de sub-regiões correspondente a cada uma das três partes, Edward coloriu-as.

A questão 4, a seguir (Fig.8), na qual os alunos deveriam indicar as frações correspondentes às quantidades de alvéolos de cor 1 dos favos 3 e 4, favoreceu o significado de o

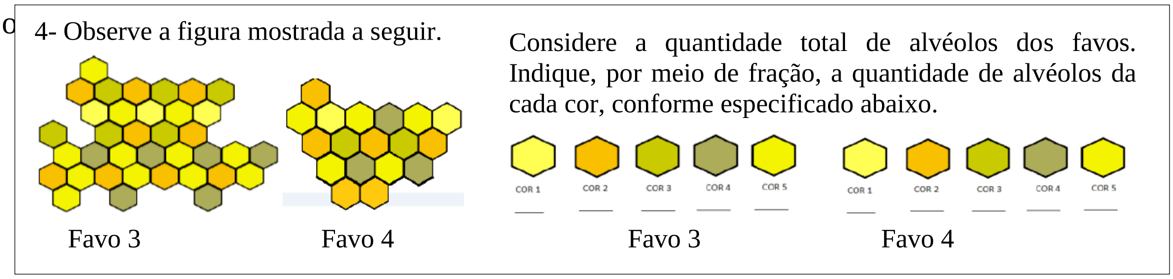



Figura 8 – questão 4
Fonte: Elaborado no estudo de aula (2021)

O item b dessa questão (Qual fração indica a quantidade de alvéolos da cor 1 ao adicionarmos os favos 3 e 4?) suscitou o significado de operador. Após indicar as frações 3/36 para o favo 3 e 2/18 para o favo 4, Molly multiplicou 2/18 por dois, a fim de encontrar uma fração com mesmo denominador da fração 3/36, que corresponde ao favo 3 (Fig.9).

$$\frac{2}{18} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$$

Figura 9 – Resposta questão 14
Fonte: Resolução da dupla Molly e Bill (2021)

Ao realizar a multiplicação, a aluna obteve a fração 4/36, que é equivalente à fração 2/18, processo que lhe permitiu determinar a fração de mesmo denominador que 3/36 e, assim, realizar a adição das frações 4/36 e 3/36 obtendo 7/36. Molly explicou a estratégia de encontrar uma fração equivalente da seguinte maneira: “[eu transformei a fração 2/18] porque senão não dava para somar porque os denominadores eram diferentes” (Molly, discussão coletiva, aula de investigação, 2021).

O significado de operador nas frações possibilitou aos alunos compreenderem a equivalência de frações, que foi fundamental para a realização das adições de frações com denominadores diferentes, possibilitando-lhes realizar as atividades, discutir e generalizar suas estratégias e conclusões.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

Q*uociente*. O significado de fração como quociente está associado a contextos de partilha equitativa. Neste significado, o numerador (dividendo) se refere ao número de partes iguais que cada participante recebe e que o denominador (divisor) nomeia essas partes (Graça et al., 2021). Para resolver a tarefa, os alunos utilizaram o significado de quociente ao realizar divisões, bem como ao justificar suas respostas.

Para resolver a questão 13, o aluno Jack considerou a relação entre as frações que representam as partes pintadas dos hexágonos nas questões anteriores e, assim, concluiu que "todos estão pintados a metade, todas as frações representam divisão" (Ficha de trabalho).

A observadora Lily afirmou que "[...] embora todos concordassem que havia sido pintada a metade dos hexágonos, o fato das frações serem escritas com números diferentes confundiu o raciocínio de alguns que somente conseguiram associar essa ideia no momento da discussão coletiva" (Notas da aula de investigação). Na etapa da discussão coletiva, ao serem convidados a justificar as respostas, os alunos explicaram que:

> Molly: Nós pintamos a metade, mas que deu resultados diferentes.
>
> Neville: Por que você acha que não deu mesmo resultado? Já experimentou fazer a divisão entre eles [as quantidades de partes] para concluir?
>
> Molly: Não.
>
> Neville: Então, lembra que o traço também é uma divisão e se eu dividir 1 por 2 dá quanto?
>
> Molly: Silêncio.
>
> Neville: Dividir um real para duas pessoas?
>
> Molly: Dá 50 centavos para cada uma.
>
> Neville: Então, dá 0,5. E 3 bombons para 6 pessoas quanto cada pessoa vai receber?
>
> Molly: Vai receber metade, ou seja, meio bombom.
>
> Neville: A metade é 0,5. São todas iguais, mesmo tendo números diferentes, como elas são iguais os resultados são iguais. (Aula de investigação).

O excerto da discussão coletiva evidencia o significado de fração como quociente, sendo possível perceber a compreensão de que se trata de uma partilha equitativa, em que a fração representa um número e não dois números separados, evidenciando a compreensão de número racional e da fração representando uma divisão (Graça et al., 2021).

No ensino fundamental, as frações são apresentadas inicialmente como relação parte-todo, em que são representadas, principalmente, quantidades em que o numerador é sempre menor que o denominador. Em seguida, usualmente os alunos são confrontados com a definição de frações impróprias, a partir da qual é introduzida a ideia da fração representando um quociente (Lopes, 2008). Porém, a transição de significados conduzida precocemente, sem que o aluno tenha se apropriado do significado parte-todo, acaba levando a uma lacuna na aprendizagem matemática dos alunos. Esse aspecto evidencia a importância de o ensino transitar pelos diferentes significados de frações.

O processo de significação de fração assume fundamental importância no desenvolvimento do raciocínio matemático, visto que a partir dessa compreensão de

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

significado se torna possível estabelecer as conexões necessárias para formular, testar e justificar conjecturas (Mata-Pereira & Ponte, 2012). A tarefa proposta na aula de investigação, baseada na abordagem exploratória, possibilitou aos alunos compreenderem que o denominador é a quantidade total de partes iguais consideradas (tomadas como referência) e o numerador indica as partes tomadas (consumidas). Compreenderam, ainda, que a partir desses é possível realizar divisões obtendo números inteiros ou decimais, evidenciando a utilização do significado de quociente para a resolução da tarefa. A partir da compreensão deste significado, os alunos ampliaram a compreensão sobre a relação de equivalência entre frações, visto que puderam confrontar as representações e as conclusões.

*Razão*, associada à relação ou comparação entre duas variáveis que não necessariamente são a parte e o todo de uma unidade (Menezes & Moraes, 2018), também foi explorada a partir da tarefa. A questão 6 (Fig. 10) da tarefa favoreceu este aspecto.

6- Compare as frações das questões 3 e 5. O que podemos concluir? Explique.

Figura **10** – Questão 6 da tarefa
Fonte: Elaborado no estudo de aula (2021)

A questão solicitava que os alunos comparassem as frações obtidas nas questões anteriores. A aluna Mila respondeu que as duas frações se referiam às divisões realizadas no hexágono. Stieve afirmou que as duas frações representam a mesma quantidade, embora apresentassem numeradores e denominadores diferentes. Petry justificou que ambas as frações representavam a metade das figuras (vide Fig.11).

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$. As duas atividades tem a figura dividida de maneira diferente, mas representam a metade.

Figura 11 – Resposta da questão 6 da tarefa
Fonte: Elaborada pela dupla Jack e Petry (2021)

Os alunos relacionaram e compararam as quantidades de partições realizadas sobre o hexágono, conforme destaca Luna na justificativa apresentada na figura 12.

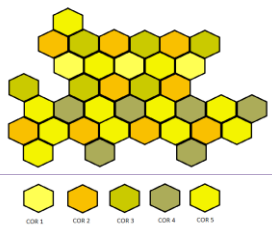
d) Reescreva aqui as quantidades de alvéolos das cores 3 e 5. Compare essas quantidades. Qual relação é possível estabelecer entre elas? Essa relação pode ser vista entre outras cores de alvéolos? Exemplifique.

Cor 3 - 6 A relação é que a cor 3 é a metade da
Cor 5 - 12 cor 5 e a mesma é a divisão da cor 3.

Figura 12 – Resposta da letra d da questão 3 da tarefa
Fonte: Elaborada pela dupla Luna e Edward (2021)

George expressou o significado de razão para associar as quantidades de alvéolos de cada uma das cores solicitadas na questão indicada na Figura 13 a seguir.

Considerando as frações que representam as quantidades de cores em relação ao favo, indique:




1. A fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 1 e 2 juntas.
   *Eu juntei as cores 1 e 2 e deu 12 - 12/36*
2. A fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 2 e 4 juntas.
   *Eu juntei as cores 2 e 4 e deu 15 - 15/36*
3. A fração que representa as quantidades de alvéolos das cores 3 e 5 juntas.
   *Eu juntei as cores 3 e 5 e deu 18 - 18/36*
4. Anote suas conclusões e explique a estratégia utilizada.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

Figura 13 – Resposta do item f da questão 3 da tarefa
Fonte: Transcrito da ficha de trabalho da dupla Percy e George (2021)

A dupla mobilizou o significado de razão como forma de relacionar as quantidades, utilizando comparação e proporção, permitindo-lhes criar estratégias para resolver a tarefa.

A maneira como os alunos comunicaram as estratégias, resoluções e conclusões explicita o percurso pelos significados de fração, aspecto que evidencia as possibilidades da abordagem exploratória para a aprendizagem matemática. Este aspecto é evidenciado nas falas dos alunos ao explicarem, por exemplo, que três sextos é o mesmo que três dividido por seis; ou que três está para seis assim como nove está para dezoito; ou ainda que a cada seis tenho três, etc. Transitar pelos diferentes significados de fração promove o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, possibilitando-lhes compreender distintas formas de operar com um mesmo símbolo matemático, relacionando esses significados. A aprendizagem desse conceito pressupõe a articulação entre os distintos significados (Graça et al., 2021).

A abordagem exploratória oportunizou aos alunos debruçarem-se sobre uma tarefa instigante, a qual fez emergir ideias matemáticas distintas sobre frações, que foram sistematizadas na discussão coletiva (Canavarro, 2011), promovendo a mobilização dos significados de fração e, assim, favorecendo a aprendizagem matemática (Richit et al., 2021).

## *Representações de Fração*

A *representação pictórica* se constituiu em uma linguagem de comunicação baseada em desenhos e outras formas de representação visual, utilizada de forma majoritária pelos alunos. As duplas tiveram necessidade de se apoiar na representação pictórica, visto que a partir destas conseguem visualizar e solucionar as questões propostas, especialmente no estudo de frações. As representações pictóricas são fundamentais para que os alunos concretizarem a relação com a representação numérica. A questão 1, ilustrada na Figura 14, mostra esse aspecto.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

1- Divida os hexágonos da figura abaixo da seguinte forma:

a) O hexágono A em duas partes iguais;

b) O hexágono B em três partes iguais;

c) O hexágono C em quatro partes iguais;

d) O hexágono D em seis partes iguais;

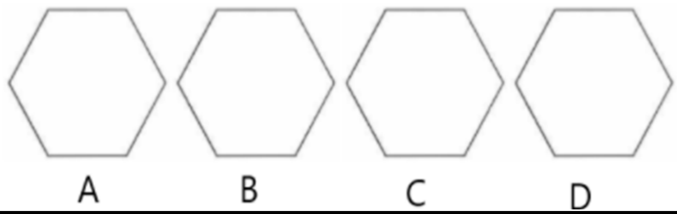



Figura 14 – Questão 1 da tarefa
Fonte: Elaborada no estudo de aula (2021)

Esta atividade mobilizou estratégias de resolução semelhantes nos grupos. Ao dividir o hexágono B em três partes iguais, os alunos recorreram, principalmente, o traçado de retas que seccionavam as figuras em partes iguais.

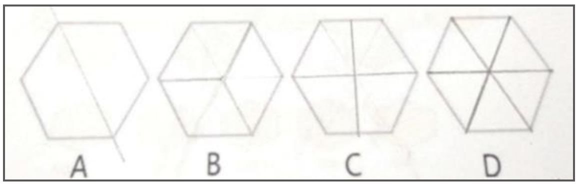



Figura 15 – Resposta da questão 1 da tarefa
Fonte: Elaborada pela dupla Percy e George (2021)

Percy afirma que para realizar a divisão solicitada, primeiramente dividiu cada hexágono em seis partes iguais e, em seguida, apagou algumas linhas, de modo que as partes fossem divididas igualmente.

> *A dificuldade foi mais na questão b, porque a resposta não fechava com o enunciado. Não tinha como dividir em três partes, mas eu percebi que era apenas dividir em seis partes e apaguei 2 partes em cada um para dar as três partes exatamente iguais (**Percy**, transcrito da ficha de trabalho da dupla, 2021)*

Luna utilizou outra estratégia: “[...] achei o meio [da figura], coloquei um ponto e fiz as retas dividindo em três partes iguais”. A aluna concluiu que “[...] a partir deste exercício, usando desenhos, aprendemos a dividir um mesmo inteiro em várias partes iguais, de formas diferentes, que isso é possível”. (Transcrição discussão coletiva, aula de investigação).

As representações pictóricas revelaram a compreensão do conceito de fração equivalente por parte dos alunos. Ao dividir o hexágono A em duas partes iguais, colorindo uma delas, e ao dividir o hexágono D em seis partes, colorindo três delas, conforme a Figura 16 abaixo, os alunos compreenderam que em ambos os casos, a fração correspondente à parte colorida representava a metade da figura.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

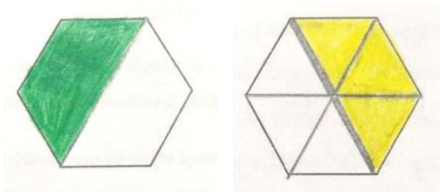


Figura 16 – Resposta da questão 1
Fonte: Elaborada pela dupla Neville e Ronald (2021)

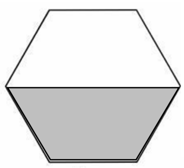
A partir da representação pictórica realizada o aluno Neville conclui que "[...] mesmo que os dois hexágonos estão divididos de formas diferentes (mais ou menos partes) os dois representam metade da figura, e as duas frações representam a mesma quantidade" (Transcrição discussão coletiva, aula de investigação, 2021).

As representações pictóricas auxiliam no raciocínio, visto que facilitam a visualização das informações do problema, possibilitando a mudança de estratégias de resolução quando necessário. Os recursos pictóricos possibilitaram aos alunos interpretar e formular representações, comunicar as suas ideias matemáticas e formular conclusões (Cox, 1999; Richit et al., 2021). As representações pictóricas foram decisivas para alcançar o objetivo proposto para a tarefa, porque auxiliaram o raciocínio matemático, desempenhando um papel fundamental na compreensão dos conceitos, visto que para essa compreensão é necessário fazer inferências fundamentadas usando representações (Ponte & Quaresma, 2014).

A análise sugere que quando a representação pictórica não foi suficiente, os alunos recorreram à representação numérica para resolver as questões da tarefa (Graça et al., 2021).

*Numérica*. A representação numérica (escrita na forma a/b) figurou nas estratégias de resolução das duplas, especialmente quando os alunos foram solicitados a responder a questão 1 da tarefa (Fig.17).

1- As abelhas formam suas colmeias a partir da fabricação de favos. Cada favo é formado pelo ladrilhamento de alvéolos. As abelhas europeias formam os favos a partir do ladrilhamento de alvéolos que possuem o formato de hexágono, como na figura abaixo.



Trace um segmento de reta sobre o hexágono acima, dividindo-o em duas partes iguais. Em seguida, pinte uma das partes.

Figura 17 – Questão 1
Fonte: Resolução da dupla Bill e Molly (2021)

A partir dessa questão, os alunos foram solicitados a responder a seguinte pergunta: a parte colorida representa qual parte do hexágono inteiro? A dupla Bill e Molly recorreu à representação pictórica, em seguida, respondeu "[...] representa a metade da figura, ½, pois ela foi dividida em dois". Ressaltamos que esta foi a primeira questão que mencionava o termo fração, ou seja, não havia sido mencionado que se tratava do tópico frações. A dupla utilizou ambas as representações, pictórica e numérica, o que pode indicar que os alunos sentem que é apropriado usar uma representação formal, a fração, como resposta.

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

As representações numéricas foram utilizadas pelos alunos para melhor compreensão das questões propostas e melhor sistematização das resoluções. Conseguinte, o raciocínio matemático do aluno é evidenciado por meio das representações, assumindo importante papel na aprendizagem. Assim, conhecer e flexibilizar as diferentes representações, pictórica e numérica, das frações possibilita aos alunos resolverem problemas, efetuando conversões para representações adequadas para si ou para o seu modo de raciocinar (Post et al.,1993).

A tarefa proposta para a aula de investigação favoreceu a descoberta de estratégias de resolução com a utilização e articulação de representações. A tarefa propiciou aos alunos a desenvolverem o seu raciocínio, um aspecto fundamental do ensino da Matemática (Ponte et al., 2014; Araman et al., 2019). A partir da abordagem exploratória, os alunos puderam compreender conceitos, mobilizar e articular representações, mobilizar conhecimentos prévios (definições e propriedades dos objetos matemáticos), formular conclusões (Richit et. al, 2021; Cox, 1999), realizando, assim, aprendizagens sobre frações. Na abordagem exploratória, os alunos são desafiados com tarefas, cuja resolução deve partir de estratégias formuladas por eles, oportunizando-os expressar e discutir suas estratégias e modos de pensar e, também, refletir sobre as ideias e estratégias dos outros (Richit, Richit & Teilor, 2023).

A realização das tarefas, de cunho exploratório, favorece a discussão de estratégias de resolução e representações, bem como a sua adequação em diferentes situações o que possibilita a ampliação do conhecimento das várias formas de resolver os problemas (Ponte & Quaresma, 2014). As representações pictóricas e numéricas revelaram-se fundamentais para a aprendizagem da equivalência de frações, possibilitando que os alunos visualizassem esse conceito e compreendessem a relação entre conceito e representação.

***Justificações para os resultados***

A observação das ações dos alunos durante a realização da tarefa revelou que eles não estavam familiarizados com a elaboração de justificações (ou justificativas) para os resultados encontrados ou a formulação de conclusões e, portanto, esses aspectos trouxeram desafios para os grupos. Ao mesmo tempo, caracterizou-se como uma importante aprendizagem matemática propiciada pelo estudo de aula.

Ao serem questionados sobre quais aspectos da aula de investigação consideraram diferenciados em relação às aulas que comumente frequentam, os alunos relataram que não estavam habituados a explicar e justificar como chegaram à resposta de determinada questão. Afirmaram que a tarefa exigiu que desenvolvessem o raciocínio na medida em que precisaram mobilizar conhecimentos prévios, estabelecer estratégias e apoiar-se em representações para formular justificativas. Esse aspecto evidenciou a importância de os alunos aprenderem a justificar as suas afirmações desde o início da escolaridade, assim à medida que avançam no percurso escolar os alunos dispõem de conhecimentos e ferramentas matemáticas que lhes possibilitem justificar, com embasamento matemático e de forma mais geral, suas resoluções (Mata-Pereira & Ponte, 2012).

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

*Justificações*. Ao formular e comunicar as suas justificações, o aluno tem a possibilidade de expor suas ideias descrevendo o seu raciocínio (Araman et al., 2019). Embora a formulação de justificativas foi um desafio para os alunos, essas foram válidas e oportunizaram explorar e compreender o tópico frações, porque os alunos utilizaram conhecimentos prévios e exploraram propriedades e conceitos matemáticos, não se baseando na autoridade, imposição ou mesmo soluções de outros (Mata-Pereira & Ponte, 2012).

A partir das atividades que embasaram a abordagem exploratória, as duplas foram convidadas a realizar justificações, as quais revelam o raciocínio que embasou a resolução das questões. Os alunos recorreram a estratégias válidas de justificar suas estratégias e conclusões, usando exemplos interessantes, a exemplo de quando Luna justificou a estratégia de dividir o hexágono em 6 partes e colorir 3 dessas, comparando a ideia de cortar uma pizza em seis pedaços e comer três. Também utilizam de linguagem matemática formal, quando, por exemplo, Neville diz: "[...] somei as frações, somente o numerador, porque o denominador representa o mesmo inteiro", se referindo a adição de frações com denominadores iguais. Ambas as justificativas sinalizam compreensão em relação ao significado da relação parte-todo.

Além disso, os alunos formularam justificações para explicar a não resolução da questão, a exemplo do aluno Jack: "[...] na letra B não pintei a metade, porque é um número ímpar e não ia fechar a quantidade igual de partes", ao não conseguir realizar a questão em que deveria colorir metade de um hexágono que estava dividido em nove partes iguais.

Algumas justificações revelam a ampliação da compreensão para além do que a questão propunha. Isso foi observado na justificativa de Percy: "[...] pintei 4 partes e meia, porque 9 dividido por dois é igual a 4,5, esse é um número decimal, todo número real pode ser dividido por dois". Esta justificação evidencia a compreensão do significado de quociente nas frações e aponta para uma possível generalização ao afirmar que todo número real pode ser dividido por dois.

A justificação sobre o significado de medida e operador foi assim elaborada por Molly: "[...] para somar as cores 1, 3 e 4 do favo, não podíamos contar e colocar em uma fração, porque eles têm subpartes de tamanhos diferentes, então, os denominadores eram diferentes. Por isso multipliquei o favo 3 por dois para ter subpartes do mesmo tamanho que o favo 4, depois somei os alvéolos da cor 1 chegando na fração 7/36".

Ao comparar as quantidades de alvéolos dos favos 3 e 4 e suas respectivas frações, George justificou que [...] as duas quantidades são pares, uma é o dobro da outra", comparando o todo das duas frações e relacionando que são proporcionais. A justificativa aponta para a compreensão do significado de fração como razão, essencial para o entendimento de equivalência. A análise evidenciou, portanto, que a abordagem exploratória oportunizou aos alunos explorarem o conceito de frações em seus diferentes significados, a partir do que puderam desenvolver a compreensão mediante o pensar matematicamente e o desenvolvimento do raciocínio a partir de generalizações e justificações (Mata-Pereira & Ponte, 2012; Vale et al., 2018; Richit et al., 2021).

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

Ao serem convidados a sistematizar as conclusões sobre as resoluções e, especialmente, sobre o conceito de frações, os alunos formularam explicações que revelam a compreensão dos significados de fração. Percy diz que: “não importa a quantidade de partes que a figura foi dividida, se pintarmos a metade dela, as frações sempre representam o mesmo valor”. Da mesma forma, Jhenny concluiu, na justificativa da sua resposta, que “½ é 0,5 e 3/6 também é 0,5, mesmo que as frações sejam representadas por números diferentes elas podem representar o mesmo valor”. A conclusão da aluna demonstra a compreensão de fração equivalente, bem como o significado de quociente igual.

Molly acrescenta que “não podemos somar a parte de baixo [denominador] das frações porque senão passa do valor do todo [todas as subpartes da figura]”. Essa conclusão ressalta o significado de relação parte-todo, compreendendo este conceito a aluna consegue entender o algoritmo para adicionar frações.

Relativamente à aula de investigação, os alunos ressaltaram que nunca haviam tido uma experiência assim. Entretanto, destacam que aprenderam na medida em que foram desafiados a justificar suas estratégias. A entrevista de um aluno destaca esse aspecto: “[A experiência foi boa porque nos forçou a] entender como e por que chegamos naquela resposta”, ou seja, raciocinar e formular conjecturas para obter as respostas e a partir disso generalizar, o que possibilita a aprendizagem matemática.

Consideramos, ainda, que a tarefa sobre os favos de mel das abelhas europeias desencadeou um processo dinâmico de conjecturar, explorar, explicar e generalizar o porquê das resoluções e desenvolver e avaliar argumentos, ou seja, generalizações e justificações que para o raciocínio matemático são essenciais (Lannin et al., 2011; Richit, Richit & Teilor, 2023). Por fim, inferimos que a abordagem exploratória favoreceu a autonomia dos alunos e oportunizou uma experiência de comunicação de suas ideias matemáticas na discussão coletiva (Stein et al., 2008; Araman et al., 2019; Richit et al., 2021), assim como na entrevista realizada após a atividade, em face a qual as duplas foram solicitadas a comentar alguns aspectos das resoluções da tarefa.

A abordagem exploratória favoreceu a aprendizagem dos alunos na medida em que oportuniza o desenvolvimento de capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, fazendo emergir ideias matemáticas, que foram sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011; Quaresma & Ponte, 2015). Esse aspecto foi potencializado na discussão coletiva, mediante a partilha das representações, interpretações e generalizações e a identificação de erros, incertezas ou irresoluções, que ao fim possibilitou a sistematização de conclusões e dos resultados.

A interação promovida pela professora que lecionou a aula e investigação valorizou as contribuições dos alunos e as argumentações apresentada por eles. Ao realizar a tarefa, na perspectiva da abordagem exploratória, os alunos foram oportunizados a discutir diferentes estratégias de resolução, mobilizar diferentes representações, formular hipóteses e justificar suas conclusões (Ponte, 2005; Stein et al., 2008; Oliveira et al., 2013; Richit et al., 2021).

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

A análise das estratégias dos alunos, das interações entre eles e das justificativas para os resultados apresentados revela que eles tiveram a oportunidade de compreender os diferentes significados das frações e relacionar esses diferentes significados, realizando aprendizagens sobre esses aspectos (Drechmer & Andrade, 2011). Além disso, a tarefa oportunizou aos alunos mobilizarem e compararem diferentes formas de representar frações (Lopes, 2008), assim como foram desafiados a justificar suas conclusões e propor, quando possível, alguma generalização (Graça et al., 2021). A tarefa possibilitou aos alunos recordarem a relação parte-todo para relacionar e representar diferentes partes dos hexágonos, permitindo que eles visualizassem um padrão na forma de colorir os hexágonos e consecutivamente concluindo que as frações eram equivalentes.

Além disso, ao resolver a tarefa, os alunos puderam propor e desenvolver estratégias de resolução apoiadas em representações pictóricas e numéricas, além de verbalizarem essas estratégias nos momentos de discussão em pares ou coletivamente, ampliando a capacidade de usar os diversos tipos de representações (Richit et al., 2021). Portanto, a realização da tarefa exploratória oportunizou aos alunos alcançarem o objetivo proposto para a aula de investigação que consistia em levá-los a compreender o conceito de fração e os seus significados, assim como realizar operações envolvendo frações.

Nesse sentido, o estudo de aula desvelou algumas possibilidades de favorecer a participação do aluno na aula, contribuindo para a sua aprendizagem (Oliveira et al., 2013; Ponte et al., 2016; Richit, Richit & Teilor, 2023). Por exemplo, a observação das ações dos alunos durante o trabalho autônomo sobre a tarefa e durante a discussão coletiva permitiu-nos explicitar e compreender os modos de pensar dos alunos ao estudar tópicos específicos da Matemática, as suas dúvidas e argumentações, as estratégias e as representações mobilizadas para resolver problemas de natureza aberta, como as tarefas exploratórias, assim como as aprendizagens realizadas nesse processo.

Por fim, os aspectos evidenciados na pesquisa apontam que a abordagem exploratória tem potencial para promover mudanças no ensino da Matemática, contribuindo especialmente para a aprendizagem dos alunos (Araman et al., 2019; Martins et al., 2021; Richit et al., 2021). Contudo, ressaltamos que os resultados não sugerem que a tarefa ou mesmo a abordagem exploratória possam resolver os problemas de aprendizagem sobre frações ou da Matemática, mas possibilitam favorecer alguns aspectos, uma vez que propicia papel ativo ao aluno na resolução das tarefas, além de promover aprendizagens em ambientes de colaboração mediante discussões e interações; propicia reflexões tanto aos alunos como aos professores, especialmente sobre como desenvolver no aluno a capacidade de formular conjecturas e generalizações.

## Conclusões

A análise aponta que o estudo de aula favoreceu a aprendizagem dos alunos sobre o tópico frações, devido, especialmente, a abordagem exploratória que embasou a aula de investigação. A tarefa sobre colmeias de abelhas europeias, cuidadosamente elaborada para

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335
explorar diferentes significados e representações de fração, possibilitou a aprendizagem na medida em que as professoras levaram em conta as principais dificuldades dos alunos nesse tópico, assim como buscaram antecipar as possíveis dificuldades para resolvê-la, organizaram a aula priorizando o trabalho autônomo e a discussão coletiva, bem como os instigaram a comunicar suas dúvidas e conclusões. A tarefa foi organizada de tal forma que priorizou organizar questões em nível crescente de desafio, com enunciados claros e coerentes, a fim de favorecer o engajamento das duplas.

Relativamente à aprendizagem de frações, a análise mostra que esse processo é desenvolvido quando o aluno tem a possibilidade de explorar esse conceito a partir de uma tarefa instigante e uma abordagem de sala de aula mais aberta e comunicativa (entre alunos e alunos e professor). Além disso, pressupõe um contexto que possibilite ao aluno mobilizar conhecimentos prévios e articular representações matemáticas para propor estratégias de resolução, comunicar suas ideias, formular conclusões e propor generalizações. Essa prática, por sua vez, solicita do professor uma ação diferenciada, instigando e desafiando os alunos a fazerem descobertas matemáticas.

A abordagem exploratória constituiu-se em contexto para encorajar o aluno a construir estratégias de resolução, a usar distintas representações, a explicar os seus raciocínios, a argumentar sobre suas resoluções, bem como a desenvolver formas de raciocinar como a generalização e a justificação, fundamentais para a compreensão de conceitos em Matemática. Evidenciamos, assim, as contribuições da abordagem exploratória para a aprendizagem da Matemática dos alunos a partir da sistematização de ideias na medida em que o desenvolvimento das tarefas pressupõe ênfase nas discussões realizadas em pares e coletivamente, possibilitando a compreensão de conceitos, operações e procedimentos matemáticos, assim como a construção de conhecimentos.

Contudo, são necessários mais estudos examinando as particularidades de cada etapa dos estudos de aula e da abordagem exploratória. Por exemplo, examinando de que forma e quais aspectos da intervenção do professor ou da própria estrutura da tarefa elaborada no estudo de aula sobre determinado tópico potencializa ou não a discussão entre pares ao realizar o trabalho autônomo, bem como quais modos de promover a discussão coletiva de maneira a encorajar os alunos a externar as suas dúvidas, o seu posicionamento, ou seja, ter papel ativo e assumindo postura crítica.

## Agradecimentos:

Agradecemos aos participantes do estudo de aula e ao CNPq pelo apoio financeiro a realização das pesquisas no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisa em (CNPq Processo n. 307153/2023-1). Agradecemos também a UFFS (PES 2022-0153).

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

## Referências

Araman, E. M. O., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2019). "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa,* 21(2), 466-490.

Canavarro, A. P. (2011). *Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios*. Universidade de Évora.

Christiansen, B., & Walther, G. (1996). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). D. Reidel.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction,* 9, 343-363

Drechmer, P. A. O., & Andrade, S. V. R. (2011). *O estudo de frações e seus cinco significados*. In Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife: UFPE.

Fiorentini, D., Honorato, A. H. A., & Paula, A. P. M. (2023). Experiências de Aprendizagem Docente na Gestão Colaborativa do Ensino-aprendizagem de Matemática baseado em Tarefas Exploratórias. *Perspectivas da Educação Matemática,* 16(42), 1-30. https://doi.org/10.46312/pem.v16i42.18404

Giménez, J., & Bairral, M. (2005). *Frações no Ensino Fundamental: Conceituação, Jogos e Atividades Lúdicas*. GEPEM/EDUR.

Ginzburg, C. (1990). Sinais: raízes de um paradigma indiciário. In C. Ginzburg (Eds) *Mitos, emblemas, sinais: Morfologia e História* (pp. 143-275). Companhia das Letras.

Graça, S. I., Ponte, J. P., & Guerreiro, A. (2021). Quando as frações não são apenas partes de um todo…! *Educação Matemática Pesquisa*, 23(1), 683-712.

Isoda, M., Arcavi, A., & Lorca, A. M. (2007). El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Chile: Pontifícia Universidad Católica de Valparaíso.

Isoda, M., & Baldin, Y. Y. (2023). Japanese Lesson Study, its Nature and its Impact on the Teaching and Learning Mathematics. *Paradigma (Maracay)*, XLIV, Edición Temática, 5-35.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones: La relacion parte-todo*. 4.ed. Sintesis.

Lins, R. C., & Silva, H. (2008). Frações. Fascículo 4. In Brasil, *Pró-Letramento: Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental-matemática*. Secretaria de Educação Básica, Ministério da Educação.

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Boletim de Educação Matemática*, 21(31), 1-22.

Martins, M., Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2021). Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

aula. *Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 343-364. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a16

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos. *Quadrante*, 21(2), 81-110.

Menezes, F., & Moraes, L. (2018). *Um estudo de caso sobre o ensino aprendizagem dos diferentes significados de frações em uma escola de educação básica*. Educação Pública, 18(12), 1-3. https://doi.org/18264/REP

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart et al. (Eds), *Lesson study research and practice in mathematics education*. Springer.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo param a elaboração de um quadro de referência. Quadrante, 22(2), 30-53.

Pina Neves, R. S., & Fiorentini, D. (2021). Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de Lesson Study. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(34), 1-30.

Pina Neves, R. S., Fiorentini, D., & Silva, J.M. (2022). Lesson study presencial e o estágio curricular supervisionado em matemática: contribuições à aprendizagem docente. *Paradigma, XLIII*(1), Edición Temática, 409-442.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática. O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In Ponte, J. P. (*Ed.*), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2014). Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50). 1464-1484.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. *Boletim de Educação Matemática*, 30(56), 868-891.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, T., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.327-358). Lawrence Erlbaum.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2015). Comunicação, tarefas e raciocínio: aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetiké*, 23(2), 297-310.

Richit, A. (2023). Professional development of professors in lesson study. *Educação Unisinos*, 27, 1-20. https://doi.org/10.4013/edu.2023.271.20

Richit, A. (2020). Estudos de Aula na Perspectiva de Professores Formadores. *Revista Brasileira de Educação*, 25(2), 1-24. https://doi.org/10.1590/S1413-24782020250044

DOI: 10.20396/zet.v32i00.8676335

Richit, A., Agranionih, N. T., Zimer, T. B., & Neves, R. B. (2024). Professional collaboration in a lesson study with university mathematics professors. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(2), em0772. https://doi.org/10.29333/iejme/14290

Richit, A. & Maltempi, M. V. (2010). Desafios e Possibilidades do Trabalho com Projetos e com Tecnologias na Licenciatura em Matemática, *Zetetiké*, 18(1), 1-20. https://doi.org/10.20396/zet.v18i33.8646692

Richit, A., & Ponte, J. P. (2020). Conhecimentos profissionais evidenciados em estudos de aula na perspectiva de professores participantes. *Educação em Revista*, 36, 1-29. https://doi.org/10.1590/0102-4698190699

Richit, A., Ponte, J. P., & Tomkelski, M. L. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 100 (1), 54-84. https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254.3961

Richit, A., Ponte, J. P., & Tomkelski, M. L. (2024). Professional collaboration among elementary school teachers in Lesson Study. *Journal of Research in Mathematics Education*, 13(2), 111-131. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14337

Richit, A., Richit, L. A., & Richter, A. (2023). Aportes del Contexto de Tarea en el Abordaje de Máximos y Mínimos en un Estudio de Clase en Cálculo. *Paradigma*, 44(2), 317-339. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p317-339.id1422

Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2022). Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(9), em2151. https://doi.org/10.29333/ejmste/12325

Richit, A., Tomkelski, M. L., & Richit, A. (2021). Compreensões sobre perímetro e área mobilizadas a partir da abordagem exploratória em um estudo de aula. *Revista Acta Scientiae*, 23(5), 2-27. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6226

Sibbald, T. (2009). The relationship between lesson study and self-efficacy. *School Science and Mathematics*, 8(109), 450-460.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Vale, C., Widjaja, W., Doig, B., & Groves, S. (2018). Anticipating students' reasoning and planning prompts in structured problem solving lessons. *Mathematics Education Research Journal*, 27, 283-309.